

ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ, ЯКИЙ ПЕРЕБУВАЄ В ОБЕРТОВОМУ РУСІ

І. А. УЛІТКО

Київський університет імені Тараса Шевченка

Отримано 7.04.98

Характеристики процесу поширення гармонічних хвиль в пружному півпросторі, який перебуває в рівномірному обертотому русі, розглядаються як наслідок та доповнення до раніше виконаних автором досліджень в аналогічно сформульованій задачі для необмеженого тіла. Прямим інтегруванням рівнянь руху встановлюються розподіли динамічних переміщень та напружень; виводяться асимптотичні формули для малих кутових швидкостей обертання; аналізується особливий випадок, коли швидкість обертання стає рівною круговій частоті хвиль. Отримані результати можуть бути корисними при розробці та аналізі функціонування гіроскопічних сенсорів нового типу.

ВСТУПНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Останнім часом у літературі знаходимо дослідження, присвячені принципам побудови та функціонування акустичних пристроїв нового типу – сенсорів кутової швидкості обертання, відомих також як твердотільні хвильові гіроскопи. Інтерес до них пов'язаний з можливістю точного вимірювання малих кутових переміщень при їх використанні. Поряд з відомими конструкціями, в яких використовуються розщеплення частот та зміни в згинальних формах коливань тонкостінних оболонок або стержнів [1, 2], пропонуються високочастотні активні елементи гіроскопів на поверхневих/об'ємних акустичних хвилях [3, 4] (ПАХ/ОАХ). Досконала технологія виготовлення хвильоводів ПАХ/ОАХ, сучасні методи генерації і детекції акустичних хвиль, контролю частоти потенційно задовольняють вимогам точного і якісного спостереження гіроскопічних ефектів.

З іншого боку, теоретичні моделі, в межах яких адекватно вивчалась би природа таких ефектів і створювалась основа для їх кількісного та якісного тлумачення, за виключенням кількох публікацій (див. напр. [3]), на думку автора не є задовільними. Досвід, накопичений під час розв'язування задач динамічної теорії пружності в тілах, які обертаються, показує, що справа не обмежується простим зсувом резонансної частоти коливань початково нерухомого об'єкта, який спостерігається в експериментах. Встановлені автором закономірності поширення гармонічних хвиль у необмеженому пружному середовищі, яке перебуває в обертотому русі [5], повною мірою виявляють себе і під час аналізу аналогічно сформульованих задач для пружного півпростору. Зокрема, для кожного напрямку хвильового вектора в такому середовищі можуть одночасно існувати три типи хвиль, які

поширюються з різними фазовими швидкостями. З'ясовується також, що не всі напрямки поширення хвиль по відношенню до напрямку вектора кутової швидкості є рівноцінними. При цьому, без дисперсії можуть поширюватися лише ті збурення, в яких напрямок переміщень частинок середовища є колінеарним напрямку вектора кутової швидкості обертання. Два інших хвильових розв'язки завжди є дисперсійними і зв'язаними завдяки дії сил Коріоліса. У випадку, коли напрямок вектора кутової швидкості й напрямок хвильового вектора співпадають, суперпозиція згаданих дисперсійних хвильових розв'язків породжує модульовані коливання континууму, які поширюються вздовж вісі обертання тіла зі швидкістю, що пропорційна кутовій швидкості обертання [6]. Цей ефект виявляє себе у гіроскопічних сенсорах оболонкового та мермерного типів [1, 2].

У даному дослідженні ми маємо на меті показати, яким чином встановлені раніше [5] кінематичні та фазові характеристики гармонічних хвиль у необмеженому середовищі (напрямок вектора кутової швидкості і напрямок хвильового вектора є взаємно-перпендикулярними) можна застосувати в аналогічно сформульованій задачі для напівобмеженого тіла. Вдавшись до прямого інтегрування рівнянь руху в задачі про гармонічне навантаження пружного півпростору нормальними силами, ми зосереджуємо увагу передусім на встановленні та дослідженні умов існування гармонічних хвиль, що визначають можливі резонансні стани системи, а також на вивченні розподілів у просторі переміщень і напружень для різних значень кутової швидкості обертання і кругової частоти хвиль. Отримані під час розв'язку задачі результати можуть бути корисними для аналізу основних характеристик гіроскопічних сенсорів нового типу.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Грунтуючись на описаних у літературі принципах побудови гіроскопічних сенсорів і скориставшись існуванням бездисперсійної зсувної хвилі у випадку, коли вектор кутової швидкості і хвильовий вектор є взаємно-перпендикулярними [5], введемо такі припущення.

Будемо вважати, що пружний півпростір обертається рівномірно навколо осі, що лежить в площині його границі. Введемо рухому декартову систему координат $Oxyz$ таким чином, щоб осі $0x$ та $0y$ лежали в площині границі півпростору, а вісь $0z$ спрямуємо назовні. Нехай тепер вісь $0y$ буде вісю обертання, так що в кожен момент часу для кутової швидкості $\vec{\Omega}$ маємо

$$\vec{\Omega} = \vec{j}\Omega_0, \quad \Omega_0 = \text{const.} \quad (1)$$

Тоді в проекціях на осі рухомої системи координат $Oxyz$ отримуємо два зв'язаних рівняння руху в переміщеннях (рівняння Ламе [7]):

$$\begin{aligned} 2\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}(\text{div}\vec{u}) - \frac{\partial\gamma_z}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_y}{\partial z} &= \\ &= \frac{\rho}{G}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \Omega_0^2 u_x + 2\Omega_0 \frac{\partial u_x}{\partial t}\right), \\ 2\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}(\text{div}\vec{u}) - \frac{\partial\gamma_y}{\partial z} + \frac{\partial\gamma_x}{\partial y} &= \\ &= \frac{\rho}{G}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \Omega_0^2 u_z + 2\Omega_0 \frac{\partial u_z}{\partial t}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

та одне незв'язане рівняння

$$2\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}(\text{div}\vec{u}) - \frac{\partial\gamma_x}{\partial z} + \frac{\partial\gamma_z}{\partial x} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \quad (3)$$

розв'язок яких слід шукати в області

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad z < 0. \quad (4)$$

В цих рівняннях G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуасона, ρ – густина матеріалу, Ω_0 – стала кутова швидкість обертання. Інші величини в (2)–(3) обраховуються за формулами:

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_x &= \text{rot}_x \vec{u} = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}, \\ \gamma_y &= \text{rot}_y \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \\ \gamma_z &= \text{rot}_z \vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

При виведенні цих рівнянь вважається, що відцентрові сили інерції зрівноважуються деякими зовнішніми силами. Таке припущення, справедливе для будь-якої відкритої коливальної системи, що займає скінчений об'єм у просторі, можна застосувати і до нашого випадку напівобмеженого тіла. Математична неузгодженість тут усувається шляхом введення деякої границі спеціального типу, яка забезпечує розповсюдження хвильових рухів назовні й не породжує відбитих хвиль всередину об'єму тіла. Частинний розв'язок задачі, що відповідає цьому припущенню, є елементарним і тут не наводиться. Більш важливою з фізичної точки зору є та обставина, що в умовах рівномірного обертання не можна нехтувати жодним з інерційних членів, які входять в праві частини рівнянь руху, незважаючи навіть на малість відносних переміщень $\vec{u}$.

В умовах однорідного зовнішнього навантаження можна досягти відокремлення змінних в функціях розв'язків по координаті y та по парі координат x, z так, що рівнянням (3) описуватимуться елементарні розв'язки відповідної задачі при відсутності обертання, а парою рівнянь (2) визначатимуться “коріолісові ефекти”, які й складають предмет нашого дослідження. При рівномірному обертанні пружного півпростору навколо осі, що лежить в площині його границі, джерело пружних хвиль будемо моделювати таким чином, щоб можливість відокремлення незв'язаної бездисперсійної хвилі реалізувалася.

У найпростішому випадку для досягнення цієї мети слід вважати, що на границі задано рівномірно розподілений тиск. Для збудження гармонічних коливань континууму з частотою ω покладемо

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=0} &= -\sigma_0 e^{i\omega t}, \quad \sigma_0 > 0, \\ \tau_{zx}|_{z=0} &= 0, \quad \tau_{xy}|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Формулювання граничних умов такого типу відповідає принципам побудови відомих гіроскопічних сенсорів [3, 4]. Наостанок зауважимо, що навантаження зосередженими силами на поверхні призводить до зв'язаності “по Коріолісу” всіх трьох скалярних рівнянь руху, що значно ускладнює і математичну структуру розв'язку, і адекватне фізичне тлумачення ефектів.

2. ПОБУДОВА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Оскільки введене нами навантаження не залежить від координат x і y , то задачу можна розглядати як плоску і шукати розв'язок рівнянь руху у

вигляді

$$u_x(z, t) = u(z)e^{i\omega t}, \quad u_z(z, t) = w(z)e^{i\omega t}, \quad (6)$$

$$u_y \equiv 0.$$

При цьому рівняння (3) задовольняється тотожньо, а рівняння (2) зводяться до простої системи звичайних диференціальних рівнянь відносно введених невідомих амплітудних функцій $u(z)$ та $w(z)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\omega^2}{c_2^2} (1 + \varepsilon^2) u - i 2\varepsilon \frac{\omega^2}{c_2^2} w = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\omega^2}{c_1^2} (1 + \varepsilon^2) w + i 2\varepsilon \frac{\omega^2}{c_1^2} u = 0, \quad (7)$$

де $c_1 = [2G(1-\nu)/\rho(1-2\nu)]^{1/2}$ та $c_2 = (G/\rho)^{1/2}$ – швидкості відповідно поздовжніх і поперечних хвиль в нерухомому пружному середовищі; $\varepsilon = \Omega_0/\omega$ – нормована кутова швидкість обертання. Підстановка

$$u(z) = Ae^{\lambda z}, \quad w(z) = Be^{\lambda z} \quad (8)$$

перетворює ці рівняння на алгебраїчні:

$$\left[\lambda^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} (1 + \varepsilon^2) \right] A - i 2\varepsilon \frac{\omega^2}{c_2^2} B = 0,$$

$$i 2\varepsilon \frac{\omega^2}{c_1^2} A + \left[\lambda^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} (1 + \varepsilon^2) \right] B = 0, \quad (9)$$

які, в свою чергу, мають нетривіальний розв'язок тоді й тільки тоді, коли

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) (1 + \varepsilon^2) \lambda^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \frac{\omega^2}{c_2^2} (1 - \varepsilon^2)^2 = 0. \quad (10)$$

З усієї сукупності хвильових розв'язків, що визначаються коренями даного характеристичного рівняння (10), виберемо лише ті, які відповідають хвилям, що поширюються від границі $z=0$ в глибину півпростору. Для всіх значень ε (за виключенням особливого випадку $\varepsilon = 1$) згідно (6) і (8) слід покласти

$$\lambda_1 = i\bar{\lambda}_1, \quad \lambda_2 = i\bar{\lambda}_2,$$

де

$$\bar{\lambda}_{1,2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2}{2} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^2}{c_2^2} \right)} \times$$

$$\times \left\{ 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4c_1c_2}{(c_1^2 + c_2^2)^2} \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)^2} \right\}^{1/2}, \quad (11)$$

а пару дійсних (ненульових) коренів $\lambda_{3,4}$ тимчасово виключити з розгляду. Тепер розв'язок для амплітудних функцій $u(z)$ і $w(z)$ можна представити у вигляді

$$u(z) = A_1 e^{i\bar{\lambda}_1 z} + A_2 e^{i\bar{\lambda}_2 z},$$

$$w(z) = B_1 e^{i\bar{\lambda}_1 z} + B_2 e^{i\bar{\lambda}_2 z}. \quad (12)$$

Прийmemo сталі B_1, B_2 за незалежні; тоді для сталей A_1, A_2 з другого рівняння системи (9) маємо ідентичні вирази

$$i 2\varepsilon \frac{\omega^2}{c_1^2} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \left[\begin{Bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\omega^2}{c_1^2} (1 + \varepsilon^2) \right] \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Слід зазначити, що корені (11) співпадають за формою з раніше знайденими значеннями коренів дисперсійного рівняння для квазі-поздовжніх і квазі-поперечних хвиль, які поширюються в необмеженому середовищі перпендикулярно до вісі обертання [5]. Для необмеженого тіла обидва типи хвиль можуть існувати незалежно, але як впливає з (12), в пружному півпросторі хвильове поле вже визначається суперпозицією обох згаданих елементарних хвильових розв'язків. Виявляється, що таке загальне положення у випадку рухомого у просторі тіла, має важливе фізичне значення [6].

Розглянемо докладніше розв'язок для амплітудних функцій переміщень (12), підпорядковуючи його граничним умовам задачі (5).

3. РОЗПОДІЛИ ДИНАМІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ У ВИГЛЯДІ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ

Перетворення граничних умов (5), аналогічні щойно наведеним перетворенням для функцій переміщень, дозволяють подати їх у вигляді

$$\frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \cdot \frac{dw}{dz} \Big|_{z=0} = -\frac{\sigma_0}{2G}, \quad \frac{du}{dz} \Big|_{z=0} = 0. \quad (14)$$

Підставляючи сюди вирази для амплітуд переміщень (12) з урахуванням залежностей (13), отримуємо алгебраїчну систему для визначення сталей B_1, B_2 . Її розв'язок має вигляд

$$\bar{\lambda}_1 B_1 = i \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \cdot \frac{\sigma_0}{2G} \cdot \frac{\bar{\lambda}_2^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} (1 + \varepsilon^2)}{\bar{\lambda}_2^2 - \bar{\lambda}_1^2},$$

$$\bar{\lambda}_1 B_1 = -i \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \cdot \frac{\sigma_0}{2G} \cdot \frac{\bar{\lambda}_1^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} (1 + \varepsilon^2)}{\bar{\lambda}_2^2 - \bar{\lambda}_1^2}. \quad (15)$$

Повертаючись до формул для переміщень (6) та (12), враховуючи (13) і (15) та приймаючи до уваги лише дійсні частини комплексних виразів, отримуємо такі значення динамічних переміщень точок півпростору:

$$u_x = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\sigma_0}{2G} \times \frac{\left[\bar{\lambda}_1^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} (1+\varepsilon^2) \right] \left[\bar{\lambda}_2^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} (1+\varepsilon^2) \right]}{2\varepsilon \frac{\omega^2}{c_1^2} (\bar{\lambda}_2^2 - \bar{\lambda}_1^2)} \times \left[\frac{\cos(\omega t + \bar{\lambda}_1 z)}{\bar{\lambda}_1} - \frac{\cos(\omega t + \bar{\lambda}_2 z)}{\bar{\lambda}_2} \right], \quad (16)$$

$$u_z = -\frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\sigma_0}{2G} \cdot \frac{1}{(\bar{\lambda}_2^2 - \bar{\lambda}_1^2)} \times \left\{ \left[\bar{\lambda}_2^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} (1+\varepsilon^2) \right] \frac{\sin(\omega t + \bar{\lambda}_1 z)}{\bar{\lambda}_1} - \left[\bar{\lambda}_1^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} (1+\varepsilon^2) \right] \frac{\sin(\omega t + \bar{\lambda}_2 z)}{\bar{\lambda}_2} \right\}.$$

Диференціюванням (16) по глибинній координаті z з використанням співвідношень типу (14) отримуємо значення динамічних напружень

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_0} = -\frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{1}{(\bar{\lambda}_2^2 - \bar{\lambda}_1^2)} \times \left\{ \left[\bar{\lambda}_2^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} (1+\varepsilon^2) \right] \frac{\cos(\omega t + \bar{\lambda}_1 z)}{\bar{\lambda}_1} - \left[\bar{\lambda}_1^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} (1+\varepsilon^2) \right] \frac{\cos(\omega t + \bar{\lambda}_2 z)}{\bar{\lambda}_2} \right\}, \quad (17)$$

$$\frac{\tau_{zx}}{\sigma_0} = -\frac{1-\nu}{1-2\nu} \times \frac{\left[\bar{\lambda}_1^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} (1+\varepsilon^2) \right] \left[\bar{\lambda}_2^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} (1+\varepsilon^2) \right]}{2\varepsilon \frac{\omega^2}{c_1^2} (\bar{\lambda}_2^2 - \bar{\lambda}_1^2)} \times \left[\frac{\sin(\omega t + \bar{\lambda}_1 z)}{\bar{\lambda}_1} + \frac{\sin(\omega t + \bar{\lambda}_2 z)}{\bar{\lambda}_2} \right].$$

Формулами (16) та (17) представлено розв'язок задачі для всіх значень нормованої кутової швидкості обертання $\varepsilon = \Omega_0/\omega$ за виключенням значень $\varepsilon=1$, коли в цих розподілах виникають особливості. Видно, що хвильові поля напружень і переміщень є досить складними. Скориставшись класифікацією гармонічних біжучих хвиль в необмеженому середовищі [5], можемо виділити в от-

риманих розв'язках члени, що відповідають квазі-поздовжнім (значення $\bar{\lambda}_1$ в аргументах біжучих хвиль) та квазі-поперечним (значення $\bar{\lambda}_1$) дисперсійним хвилям.

У граничній площині півпростору $z=0$ спостерігаємо еліптичний рух частинок поверхні. Півосі еліпсів, тобто амплітуди відносних переміщень, обраховані за формулами (16), можуть служити джерелом інформації про величину кутової швидкості обертання. На рис. 1 показано безвимірні значення переміщень $\bar{u}_z, \bar{u}_x$

$$\bar{u}_x = \frac{\sigma_0}{2G} \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\omega^2}{c_1^2} \cdot u_x, \\ \bar{u}_z = \frac{\sigma_0}{2G} \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\omega^2}{c_1^2} \cdot u_z$$

для різних значень нормованої кутової швидкості обертання з проміжку $0 < \varepsilon < 1$, а на рис. 2 – їх відношення, яке є більш зручним для аналізу при значеннях частоти обертання близьких до критичного $\varepsilon=1$. Як видно з рис. 1, обидва переміщення $\bar{u}_z, \bar{u}_x$ при $\varepsilon \rightarrow 1$ стають нескінченно великими, проте їх відношення $\bar{u}_z/\bar{u}_x$ (рис. 2) не перевищує 1. Коливання поверхні характеризуються лише глибинною компонентою переміщень $\bar{u}_z$, так що відношення $\bar{u}_z/\bar{u}_x$ стає рівним нулеві. У глибині півпростору для довільних значень $z < 0$ в загальному випадку траєкторіями руху частинок будуть вже не еліпси, а більш складні плоскі криві.

4. АСИМПТОТИЧНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ МАЛИХ КУТОВИХ ШВИДКОСТЕЙ ОБЕРТАННЯ

Як з точки зору прикладних застосувань, так і для аналізу отриманого розв'язку, більш важливим буде записати асимптотичні формули розподілів динамічних напружень і переміщень для малих у порівнянні з круговою частотою хвиль значень кутової швидкості обертання Ω_0 . Для цього слід спочатку спростити вирази для коренів характеристичного рівняння (11). З точних співвідношень випливає, що корені $\bar{\lambda}_1^2, \bar{\lambda}_2^2$ відрізняються один від одного і від відповідних значень для нерухомого у просторі тіла членами, пропорційними ε^2 . Отже, утримуючи члени порядку ε^2 і нехтуючи членами порядку ε^4 та вищими ступенями цього відношення ($\varepsilon \ll 1$), замість (11) можемо записати

$$\bar{\lambda}_{1,2} \approx \frac{\omega}{c_1} \left[1 \pm \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{c_2^2 + 3c_1^2}{c_1^2 - c_2^2} \right]. \quad (18)$$

Підставляючи тепер значення $\bar{\lambda}_1^2$ та $\bar{\lambda}_2^2$ з (18) у формули для переміщень (16) і напружень (17),

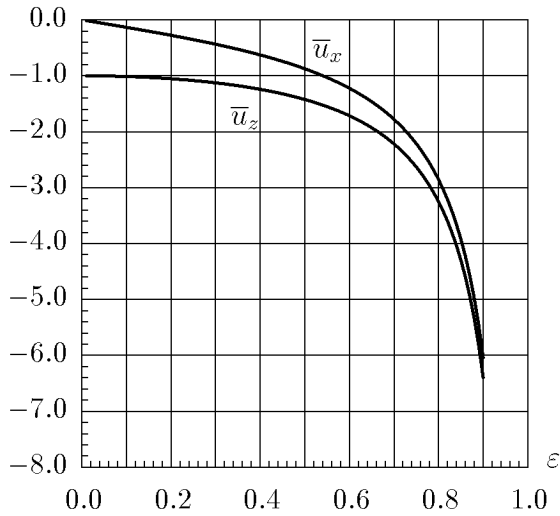


Рис. 1. Розрахунок амплітуд нормованих відносних переміщень в граничній площині півпростору $z=0$ для матеріалу з коефіцієнтом Пуассона $\nu=0.33$ в інтервалі $0 < \varepsilon < 1$

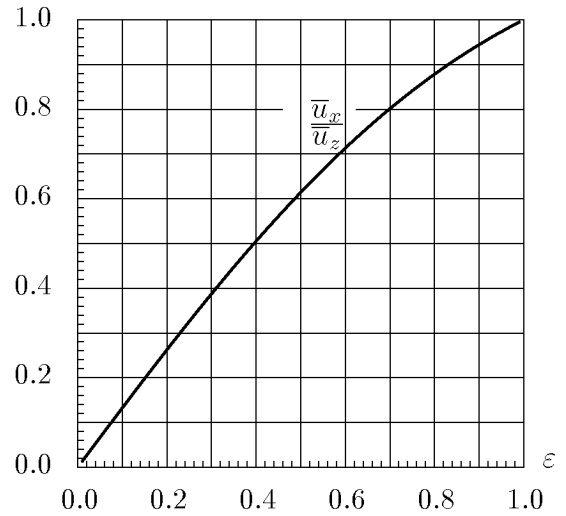


Рис. 2. Відношення амплітуд нормованих відносних переміщень в граничній площині півпростору $z=0$ для того ж інтервалу зміни нормованої кутової швидкості $\varepsilon = \Omega_0/\omega$

виконаємо асимптотичні розвинення по степеням відношення $\varepsilon = \Omega_0/\omega$. Під час виконання такої процедури з'ясовується, що зміни хвильового поля переміщень і напружень по відношенню до нерухомої конфігурації тіла характеризуються вже членами, пропорційними ε , так що при $\varepsilon \ll 1$ в аргументах біжучих хвиль можна покласти $\bar{\lambda}_1 \approx \omega/c_1$ та $\bar{\lambda}_2 \approx \omega/c_2$, що є взагалі справедливим лише для дослідження кінематичних характеристик хвиль. Отже, маємо такі асимптотичні формули:

$$u_x^{\text{ac}} \approx -4(1-2\nu) \cdot \frac{\sigma_0}{2G} \times \varepsilon \left[\frac{\cos \omega(t+z/c_1)}{\omega/c_1} - \frac{\cos \omega(t+z/c_2)}{\omega/c_2} \right],$$

$$u_z^{\text{ac}} \approx -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\sigma_0}{2G} \left[\frac{\sin \omega(t+z/c_1)}{\omega/c_1} + \frac{4c_1^2 c_2^2}{(c_1^2 - c_2^2)^2} \varepsilon^2 \frac{\sin \omega(t+z/c_2)}{\omega/c_2} \right]. \quad (19)$$

Тут же запишемо елементарний розв'язок в переміщеннях для нерухомого півпростору, який знаходиться граничним переходом в наведених ви-

ще точних та асимптотичних формулах

$$u_x^{(0)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_x = 0,$$

$$u_z^{(0)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_z = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\sigma_0}{2G} \cdot \frac{\sin \omega(t+z/c_1)}{\omega/c_1}. \quad (20)$$

З асимптотичних формул (19) випливає, що у хвильовому полі при малих кутових швидкостях обертання переважають товщинні коливання континууму u_z , що поширюються вглибину півпростору як поздовжня хвиля (20): $c_p^{(1)} \approx c_1$. Зміни в характері товщинної компоненти переміщень u_z^{ac} по відношенню до нерухомого тіла пов'язані з наявністю поперечної хвилі ($c_p^{(2)} \approx c_2$) з амплітудою, пропорційною ε^2 . В той же час, для зв'язаної компоненти переміщень u_x^{ac} і поздовжня і поперечна хвилі мають одну і ту ж амплітуду, пропорційну ε . Чисельні оцінки показують, що приведені асимптотичні формули можна використовувати з задовільною точністю для значень ε , що не перевищують 10^{-2} .

Аналогічні перетворення виразів для динамічних напружень (17) дозволяють подати їх у ви-

гляді ($\varepsilon \ll 1$)

$$\frac{\sigma_z^{ac}}{\sigma_0} \approx \left[\frac{\cos \omega(t+z/c_1)}{\omega/c_1} - \frac{4c_1^2 c_2^2}{(c_1^2 - c_2^2)^2} \varepsilon^2 \frac{\cos \omega(t+z/c_2)}{\omega/c_2} \right], \quad (21)$$

$$\frac{\tau_{zx}^{ac}}{\sigma_0} \approx 2(1-\nu)\varepsilon \times \left[\frac{\sin \omega(t+z/c_1)}{\omega/c_1} - \frac{\sin \omega(t+z/c_2)}{\omega/c_2} \right].$$

У хвильовому полі напружень при малих кутових швидкостях обертання спостерігаємо (по відношенню до відомого розв'язку для нерухомого у просторі тіла) ту ж закономірність: виникає пропорційна до ε зсувна компонента τ_{zx}^{ac} , а нормальні напруження σ_z^{ac} характеризуються наявністю складової другого порядку малості у вигляді поперечної хвилі.

Слід зауважити, що для аналізу наближених представлень для фазових характеристик хвиль у випадку рівномірного обертального руху при малих кутових швидкостях необхідно опиратися на значення коренів характеристичного рівняння у формі (18). Зокрема, для дослідження фазових швидкостей хвиль слід використовувати такі формули:

$$c_p^{(1)} \approx \frac{c_1}{1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{c_2^2 + 3c_1^2}{c_1^2 - c_2^2}},$$

$$c_p^{(2)} \approx \frac{c_2}{1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{c_2^2 + 3c_1^2}{c_1^2 - c_2^2}}.$$

Звідси видно, що зі зменшенням величини відносної кутової швидкості в області $\varepsilon \ll 1$ швидкість $c_p^{(1)}$ з перевищенням наближається до швидкості поздовжніх хвиль c_1 у нерухомому тілі, а швидкість $c_p^{(2)}$ з недостачею наближається до швидкості поперечних хвиль c_2 . Повний аналіз фазових співвідношень для будь-яких значень нормованої кутової швидкості ε виконано в роботі [5].

5. АНОМАЛЬНИЙ ВИПАДОК: КУТОВА ШВИДКІСТЬ І ЧАСТОТА ХВИЛЬ СПІВПАДАЮТЬ

Структура одержанного розв'язку задачі вказує на необхідність окремого аналізу поведінки хвиль у випадку коли кутлова швидкість обертання тіла Ω_0 співпадає зі значенням кругової частоти хвиль ω , тобто при $\varepsilon = 1$. В цьому випадку в першу чергу змінять свої значення корені біквадратного

характеристичного рівняння (10), а отже зміниться і природа шуканого розв'язку для переміщень і напружень.

Запишемо і дійсні й уявні значення цих коренів, скрізь покладаючи $\omega = \Omega_0$:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\bar{\lambda}, \quad \lambda_{3,4} = 0, \quad (22)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\Omega_0}{c_1 c_2} \sqrt{2(c_1^2 + c_2^2)}.$$

Загальний розв'язок для амплітуд переміщень з урахуванням співвідношень (13) тепер слід шукати у вигляді

$$u(z) = iB_3 + iB_4 z - i \frac{c_1^2}{c_2^2} B_1 e^{i\bar{\lambda}z} - i \frac{c_1^2}{c_2^2} B_2 e^{-i\bar{\lambda}z}, \quad (23)$$

$$w(z) = B_3 + B_4 z + B_1 e^{i\bar{\lambda}z} + B_2 e^{-i\bar{\lambda}z}.$$

Для виконання умови поширення хвиль вглибину півпростору ($z < 0$) необхідно, як і раніше, покласти $B_2 = 0$. Задовольняючи граничні умови (14), знаходимо, що $B_3 = 0$, але $B_4 \neq 0$. Після очевидних перетворень розв'язок задачі отримуємо у вигляді:

переміщення

$$u_x = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\sigma_0}{2G} \cdot \frac{c_1^2}{c_1^2 + c_2^2} \times$$

$$\times \left[z \sin \Omega_0 t - \frac{\sin(\Omega_0 t + \bar{\lambda}z)}{\bar{\lambda}} \right], \quad (24)$$

$$u_z = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\sigma_0}{2G} \cdot \frac{c_1^2}{c_1^2 + c_2^2} \times$$

$$\times \left[z \cos \Omega_0 t - \frac{\cos(\Omega_0 t + \bar{\lambda}z)}{\bar{\lambda}} \right];$$

напруження:

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_0} = -\frac{c_1^2}{c_1^2 + c_2^2} \times$$

$$\times \left[\cos \Omega_0 t + \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos(\Omega_0 t + \bar{\lambda}z) \right], \quad (25)$$

$$\frac{\tau_{zx}}{\sigma_0} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{c_1^2}{c_1^2 + c_2^2} \times$$

$$\times \left[\sin \Omega_0 t + \sin(\Omega_0 t + \bar{\lambda}z) \right].$$

Отже, при $\varepsilon = 1$ у хвильовому полі переміщень є аномальний випадок: квазі-поздовжня складова хвилі вироджується так, що маємо пропорційні до z члени в формулах для переміщень (24) та

незмінні з глибиною члени в формулах для напружень (25). Дослідження фазових характеристик цих складових для необмеженого тіла [5] показує, що відповідні елементарні розв'язки виявляють такі аномальні властивості, як нескінченна довжина та нескінченна фазова швидкість хвилі. У нашому випадку гармонічних коливань півпростору розв'язок необхідно доповнюється квазі-поперечними складовими переміщень і напружень. Фазова швидкість таких хвильових рухів завжди скінченна, менша за c_2 і, наприклад, дорівнює $0.6325c_2$ для матеріалу з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.33$.

ВИСНОВКИ ТА ДИСКУСІЯ

Головним наслідком виконаного дослідження є те, що розв'язок рівнянь динамічної теорії пружності у випадку гармонічних коливань тіла, яке перебуває в рівномірному обертovому русі, можна завжди представити у вигляді лінійної суперпозиції біжучих квазі-поздовжніх і квазі-поперечних хвиль. Таке положення є загальним, оскільки забезпечується лінійністю диференціальних операцій в рівняннях руху і ефективно використовується при побудові розв'язку ряду прикладних задач (див. наприклад [1, 2, 6]). Для коректності міркувань слід зазначити що, в наведених посиланнях застосовувалось інше формулювання задачі: розглядався випадок, коли напрямки вектора кутової швидкості й напрямку хвильового вектора співпадали, а знайдені розв'язки фактично були суперпозицією біжучих квазі-поперечних хвиль. В даному дослідженні за основу прийнято інший випадок: напрямки вектора кутової швидкості й напрямку хвильового вектора є взаємно-перпендикулярними. Отриманий в такій постановці результат має самостійне значення. Можна завжди встановити значення кутової швидкості обертання півпростору по спостереженню за відносними переміщеннями граничної поверхні. Записані асимптотичні формули у випадку малих кутових швидкостей обертання дозволяють прослідкувати вплив сил інерції обертovого руху на зміни у кінематичних та фазових характеристиках хви-

льового поля по відношенню до нерухомого півпростору. Виявляється, що зміни в розподілах динамічних переміщень і напружень відносно цих же розподілів у нерухомому тілі характеризуються вже першим порядком малості відношення $\varepsilon = \Omega_0/\omega$, тоді як для аналізу фазових швидкостей (а очевидно, і частот коливань тіл скінчених розмірів) необхідно враховувати члени, пропорційні до ε^2 .

Отримані результати відкривають перспективи побудови розв'язку стаціонарної задачі для пружного шару, який перебуває в обертovому русі – моделі, яка з огляду на прикладні застосування, краще враховує конструктивні особливості гіроскопічного сенсора. Наприкінці слід також звернути увагу на перспективи аналізу задач про нестационарне навантаження для пружного півпростору і пружного шару та на труднощі, з якими доведеться зустрітись під час побудови відповідних розв'язків (окремого дослідження у випадку поширення нестационарних хвиль в півпросторі, потребуватиме аномальний випадок $\omega = \Omega_0$).

1. Улітко А. Ф. Коливання тонкої п'єзокерамічної циліндричної оболонки, що знаходиться в обертovому русі // Мат. методи і фізико-механічні поля.– 1996.– **39**, N 1.– С. 7–18.
2. Ulitko I. A. Mathematical theory of the fork-type wave gyroscope // Proc. 1995 IEEE International Frequency Control Symp., IEEE Catalog N 95CH35752.– San Francisco, 1995.– С. 786–793.
3. Clarke N. S., Burdett J. S. A rotation rate sensor based upon a Rayleigh resonator // Trans. ASME, J. Appl. Mech.– March 1994.– **61**.– P. 139–143.
4. Lao B. Y. Gyroscopic effect in surface acoustic waves // Proc. 1980 IEEE International Ultrasonic Symp., IEEE Catalog N 80CH16022.– New York, 1980.– С. 687–691.
5. Улітко И. А. Дисперсия плоских гармонических волн в равномерно вращающемся упругом пространстве // Доклади НАН України.– 1995.– N 1.– С. 54–57.
6. Улітко И. А. Модуляция гармонических бегущих волн в равномерно вращающейся упругой среде // 2-я международн. конф. "Современные проблемы механики сплошной среды", Т. 1.– Ростов-на-Дону, 1996.– С. 137–141.
7. Улітко А. Ф. Пространственное движение упругих тел // Известия АН СССР. Механика твердого тела.– 1990.– N 6.– С. 55–66.