УДК 539.3:624.131+539.215

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРОНИЦАЕМОГО ШТАМПА НА ПОРИСТО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

А. М. ГОМИЛКО, А. Н. ТРОФИМЧУК

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 7.08.98

В статье получено и проанализировано асимптотическое решение гармонической контактной задачи о колебаниях непроницаемого жесткого штампа, расположенного на насыщенном жидкостью пористо-упругом полупространстве. Показано, что при стремлении частоты колебаний к нулю эффективное контактное напряжение, аналогично соответствующей задаче теории упругости, имеет корневую особенность при приближении к краю штампа. При этом контактное поровое давление представляет собой гладкую функцию, а порядок убывания ее амплитуды является различным, в зависимости от того, учитывается или нет вязкость заполняющей пористую среду жидкости.

ВВЕДЕНИЕ

Особенности динамических расчетов строительных конструкций связаны с необходимостью учета их взаимодействия с упругим основанием. Это приводит к изменению амплитудно-частотных характеристик, дополнительному демпфированию и существенно сказывается на напряженно-деформированном состоянии сооружений. В качестве модели основания широко используется модель упругого однородного (слоистого) полупространства [1–3]. Однако в реальных условиях основания сооружений, в особенности гидроэнергетических, являются водонасыщенными, в связи с чем возникает необходимость в исследовании контактных задач динамики пористо-упругих сред. При этом основание моделируется как двухфазная среда: пористая твердая фаза и жидкость, заполняющая поры. В этом контексте среди многообразия существующих теорий двухфазных сред одной из наиболее распространенной является модель М. Био [4], в рамках которой учитываются упругое, инерционное и вязкое взаимодействия твердой и жидкой фаз. При этом структура и закономерности формирования волнового поля существенно усложняются, что приводит к качественным изменениям в процессе взаимодействия сооружений с фундаментом.

На основании уравнений М. Био были довольно детально изучены процессы распространения различных типов волн в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах (см., например, [5–7] и библиографию в них), в то время как краевым задачам до сих пор уделено значительно меньше внимания. В данной работе рассмотрена гармоническая контактная задача о колебаниях непроницаемого жесткого штампа, расположенного на насыщенном жидкостью пористо-упругом полупространстве. Осуществлено сведение соответствующей краевой задачи для уравнений М. Био к системе интегральных уравнений относительно контактных напряжений и изучены особенности асимптотического поведения этих напряжений при стремлении частоты колебаний штампа к нулю.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоская задача о гармонических колебаниях непроницаемого жесткого штампа шириной $2a$ на пористо-упругом полупространстве при заданном вертикальном смещении W (здесь и далее временной гармонический множитель $e^{i\overline{\omega}\overline{t}}$ опускается). Требуется определить эффективное напряжение в скелете грунта и поровое давление. В трехмерной постановке такая задача исследовалась численно (с использованием техники функции Грина) в статье [8]. Случай проницаемого штампа был рассмотрен в статье [9].

Далее пользуемся безразмерными координатами

$$x = \overline{x}/a, \quad y = \overline{y}/a,$$

безразмерными временем t и частотой гармонических колебаний ω

$$t = \frac{c_2}{a}\overline{t}, \quad \omega = \frac{a}{c_2}\overline{\omega},$$

где c_2 – скорость поперечной волны в двухфазной среде без учета диссипации:

$$c_2^2 = \frac{G}{[\rho_{11} - \rho_{12}^2/\rho_{22}]}.$$

Здесь G – модуль сдвига; ρ_{12} – коэффициент динамической связи скелета грунта и жидкости, имеющий размерность плотности; ρ_{11}, ρ_{22} можно рассматривать как некоторые эффективные плотности фаз:

$$\rho_{11}=\rho_1-\rho_{12},\quad \rho_{22}=\rho_2-\rho_{12},\quad \rho_{12}<0,$$

$$\rho_1=(1-m)\rho_s,\quad \rho_2=m\rho_f,$$

где ρ_s и ρ_f – истинные плотности твердой и жидкой компонент пористого слоя.

Пусть $\vec{u}$, $\vec{U}$ – векторы перемещений твердой и жидкой фаз соответственно:

$$\vec{u}=\{u_s,\ v_s\},\quad \vec{U}=\{u_f,\ v_f\}.$$

Считаем, что двухфазная среда описывается моделью М. Био, в рамках которой уравнения движения имеют вид

$$\begin{gathered} G\,\Delta\vec{u}+(A+G)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u}+Q\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{v}= \\ =-\omega^2c_2^2(\rho_{11}\vec{u}+\rho_{12}\vec{v})+i\omega ac_2b(\vec{u}-\vec{v}), \\ Q\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u}+R\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{v}= \\ =-\omega^2c_2^2(\rho_{12}\vec{u}+\rho_{22}\vec{v})-i\omega ac_2b(\vec{u}-\vec{v}), \end{gathered} \qquad (1)$$

где используются следующие параметры и обозначения [5, глава 1, § 3]:

$$b=\frac{m^2\nu_0}{K_{pr}},\quad A=\lambda+k_fa_0^2S_0/m,$$

$$Q=a_0k_fS_0,\quad R=mk_fS_0,$$

$$\lambda=\frac{2\nu}{(1-2\nu)}G,\quad S_0=\frac{mk_r}{(mk_r+a_0k_f)},$$

$$a_0=1-m-k_s/k_r,\quad k_s=\lambda+\frac{2}{3}\mu,$$

причем m – пористость; ν – коэффициент Пуассона пористого скелета с пустыми порами; k_f – модуль объемной сжимаемости жидкости; k_r – истинный модуль сжимаемости твердой фазы. В определение параметра b входят ν_0 – динамический коэффициент вязкости жидкости и K_{pr} – проницаемость.

Уравнения (1) рассматриваются в полупространстве $y<0$ и дополняются граничными условиями

$$v_s(x,0)=v_f(x,0)=W,\quad |x|<1, \qquad (2)$$

$$\tau_{xy}^s(x,0)=0,\quad -\infty<x<\infty, \qquad (3)$$

$$\sigma_y^s(x,0)=\sigma^f(x,0)=0,\quad |x|>1. \qquad (4)$$

При этом $p=-m^{-1}\sigma^f$ – поровое давление; $\sigma_y^{sf}=\sigma_y^s+(m-1)m^{-1}\sigma^f$ – эффективное напряжение; $\sigma_y=\sigma_y^s+\sigma^f$ – общее напряжение, $\sigma_y=\sigma_y^{sf}-p$.

Условие (2) является контактным и при построении решения граничной задачи (1), (2) – (4) используем стандартный прием разбиения ее на две части, когда сначала рассматривается задача Лэмба для полуплоскости $y<0$ с заданными напряжениями, а затем рассматривается собственно контактная задача. Такой прием позволяет свести контактную задачу к системе интегральных уравнений на отрезке $|x|<1$ с последующей ее алгебраизацией.

2. ЗАДАЧА ЛЭМБА ДЛЯ ПОРИСТО-УПРУГОЙ СРЕДЫ

Решение задачи Лэмба для системы уравнений М. Био хорошо известно ([5]). Для полноты изложения приведем кратко постановку задачи и соответствующие выкладки. Уравнения М. Био рассматриваются в полуплоскости $x\in\mathrm{R}$, $y<0$ с граничными условиями при $y=0$, $x\in\mathrm{R}$:

$$\tau_{xy}^s(x,0)=0, \qquad (5)$$

$$\sigma_y^{sf}\equiv\sigma_y^s(x,0)+\frac{m-1}{m}\sigma^f(x,0)=-ap_1(x), \qquad (6)$$

$$\sigma^f(x,0)=-map_2(x). \qquad (7)$$

При этом $p_1(x)$, $p_2(x)$ считаются заданными четными функциями переменного $x\in(-1,1)$.

Векторы смещений $\vec{u}=\{u_s,v_s\}$, $\vec{U}=\{u_f,v_f\}$ можно выразить через скалярные потенциалы Φ_1, Φ_2, Ψ [10]:

$$\vec{u}=\nabla\phi_1+\nabla\times\{\psi_1\vec{e}_z\},\vec{U}=\nabla\phi_2+\nabla\times\{\psi_2\vec{e}_z\},$$

$$\phi_1=\Phi_1+\Phi_2,\quad \phi_2=M_1\Phi_1+M_2\Phi_2,$$

$$\psi_1=\Psi,\quad \psi_2=M_3\Psi,$$

с определенными постоянными M_j. При этом потенциалы являются решениями уравнений Гельмгольца

$$(\Delta+k_j^2)\Phi_j=0,\ \ j=1,2,\quad (\Delta+k_3^2)\Psi=0$$

с безразмерными волновыми числами

$$k_j^2=\omega^2\frac{c_2^2}{c^2}z_j,\ \ j=1,2,$$

$$k_3^2=\omega^2\frac{\rho c_2^2}{G}\left[\Gamma_{11}+M_3\Gamma_{12}+(1-M_3)i\Gamma\right].$$

Здесь числа $z=z_j$, $j=1,2$ определяются как корни квадратного уравнения

$$(q_{11}q_{22}-q_{12}^2)z^2-$$
$$-(q_{11}\Gamma_{22}+q_{22}\Gamma_{11}-2q_{12}\Gamma_{12}+i\Gamma)\,z+$$
$$+\left(\Gamma_{11}\Gamma_{22}-\Gamma_{12}^2+i\Gamma\right)=0;$$

коэффициенты

$$\Gamma=-\frac{ba}{\rho\omega c_2};\quad \Gamma_{ij}=\frac{\rho_{ij}}{\rho};\quad c^2=\frac{H}{\rho};$$
$$\rho=\rho_{11}+\rho_{22}+2\rho_{12}=(1-m)\rho_s+m\rho_f;$$
$$q_{11}=\frac{A+2G}{H};\;\; q_{12}=\frac{Q}{H};\;\; q_{22}=\frac{R}{H};$$
$$H=A+2G+R+2Q;$$
$$M_{1,2}=\{\Gamma_{11}q_{22}-\Gamma_{12}q_{12}-(q_{11}q_{22}-q_{12}^2)z_{1,2}+$$
$$+(q_{22}+q_{12})i\Gamma\}\,/\,\{\Gamma_{22}q_{12}-\Gamma_{12}q_{22}+(q_{22}+q_{12})i\Gamma\}\,;$$
$$M_3=(-\Gamma_{12}+i\Gamma)/(\Gamma_{22}+i\Gamma).$$

Далее будем пользоваться обозначениями

$$\gamma_j=\gamma_j(\xi)=\sqrt{\xi^2-k_j^2},\quad j=1,2,3,$$
$$n_j=\frac{Q+RM_j}{2G},\quad m_j=1+\frac{A+QM_j}{2G},\quad j=1,2,$$
$$\beta=\xi^2-k_3^2/2,\quad q=\frac{m-1}{m}.$$

Пусть преобразования Фурье имеет вид

$$\overline{P}_j(\xi)=\frac{a}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_j(x)e^{-i\xi x}dx,\quad j=1,2. \qquad (8)$$

Решение задачи Лэмба (5) – (7) приводит к следующим интегральным выражениям для вертикальных компонент смещений при $y=0$:

$$v_s(x,0)=\frac{k_3^2}{4G}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{P}_1(\xi)F_1(\xi)+\overline{P}_2(\xi)[mF_2(\xi)+(1-m)F_1(\xi)]}{D(\xi)}\times$$
$$\times e^{ix\xi}d\xi, \qquad (9)$$

$$v_f(x,0)=\frac{1}{2G}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{P}_1(\xi)F_3(\xi)+\overline{P}_2(\xi)[mF_4(\xi)+(1-m)F_3(\xi)]}{D(\xi)}\times$$
$$\times e^{ix\xi}d\xi, \qquad (10)$$

где функции

$$D(\xi)=\beta\{n_1k_1^2[\xi^2-m_2k_2^2]-n_2k_2^2[\xi^2-m_1k_1^2]\}+$$
$$+\xi^2\gamma_3[n_2k_2^2\gamma_1-n_1k_1^2\gamma_2];$$
$$F_1(\xi)=n_1k_1^2\gamma_2-n_2k_2^2\gamma_1;$$
$$F_2(\xi)=\gamma_2[\xi^2-m_1k_1^2]-\gamma_1[\xi^2-m_2k_2^2];$$
$$F_3(\xi)=\beta[M_1n_2k_2^2\gamma_1-$$
$$-M_2n_1k_1^2\gamma_2]+M_3\xi^2[n_1k_1^2\gamma_2-n_2k_2^2\gamma_1];$$
$$F_4(\xi)=(M_2-M_1)\xi^2\gamma_1\gamma_2\gamma_3+$$
$$+(M_1-M_3)\xi^2\gamma_1[\xi^2-m_2k_2^2]-$$
$$-(M_2-M_3)\xi^2\gamma_2[\xi^2-m_1k_1^2]+$$
$$+\frac{k_3^2}{2}\left\{M_2\gamma_2[\xi^2-m_1k_1^2]-M_1\gamma_1[\xi^2-m_2k_2^2]\right\}.$$

При этом можно показать, что для четных функций $D(\xi)$ и $F_j(\xi)$ справедливы следующие асимптотические формулы при $\xi\to+\infty$:

$$D(\xi)=d_0\xi^2+\mathrm{O}(1),$$
$$F_j(\xi)=C_j\xi+\mathrm{O}(\xi^{-1}),\;\; j=1,2,3, \qquad (11)$$
$$F_4(\xi)=C_4\xi^3+\mathrm{O}(\xi),$$

где постоянные

$$d_0=k_1^2k_2^2\{(m_1-1/2)n_2-(m_2-1/2)n_1\};$$
$$C_1=n_1k_1^2-n_2k_2^2;$$
$$C_2=(m_2-1/2)k_2^2-(m_1-1/2)k_1^2;$$
$$C_3=k_1^2k_2^2[(M_2n_1-M_1n_2)+(n_2-n_1)M_3]/2+$$
$$+k_3^2[M_2n_1k_1^2-M_1n_2k_2^2]/2;$$

$$C_4 = M_1 k_2^2(1/2 - m_2) - M_2 k_1^2(1/2 - m_1) +$$
$$+ M_3[k_1^2(1/2 - m_1) - k_2^2(1/2 - m_2)] =$$
$$= k_1^2(1/2 - m_1)(M_3 - M_2) -$$
$$- k_2^2(1/2 - m_2)(M_3 - M_1).$$

3. СВЕДЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При рассмотрении контактной задачи воспользуемся решением задачи Лэмба, для чего введем в рассмотрение неизвестные контактные напряжения $p_1(x)$, $p_2(x)$, определенные на отрезке $|x|<1$:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= -\sigma_y^s(x,0) - q\sigma^f(x,0), \\ mp_2(x) &= -\sigma^f(x,0), \end{aligned} \qquad |x| < 1.$$

При этом, исходя из постановки задачи контактной задачи, считаем, что $p_1(x)$, $p_2(x)$ являются четными интегрируемыми на отрезке $[-1,1]$ функциями. Тогда, воспользовавшись (9), (10) и равенствами

$$\overline{P}_j(\xi) = \frac{a}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} p_j(x) e^{i\xi x} dx = \frac{a}{\pi}\int\limits_{0}^{1} p_j(x)\cos(\xi x) dx,$$

получаем для нахождения нормированных напряжений

$$q_j(x) = \frac{p_j(x)}{\pi G}, \quad j = 1,2$$

систему линейных интегральных уравнений на отрезке $x\in[0,1]$:

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^\infty \Big\{ \int\limits_0^1 q_1(s)\cos(\xi s) ds \Big\} K_{11}(\xi)\cos(x\xi) d\xi + \\ &+ \int\limits_0^\infty \Big\{ \int\limits_0^1 q_2(s)\cos(\xi s) ds \Big\} K_{12}(\xi)\cos(x\xi) d\xi = 0, \\ &\int\limits_0^\infty \Big\{ \int\limits_0^1 q_1(s)\cos(\xi s) ds \Big\} K_{21}(\xi)\cos(x\xi) d\xi + \\ &+ \int\limits_0^\infty \Big\{ \int\limits_0^1 q_2(s)\cos(\xi s) ds \Big\} K_{22}(\xi)\cos(x\xi) d\xi = W_0, \end{aligned} \qquad (12)$$

где $W_0 = W/a$, а функции $K_{ij}(\xi)$ имеют вид

$$D(\xi)K_{11}(\xi) = \frac{k_3^2}{2}F_1(\xi) - F_3(\xi);$$
$$D(\xi)K_{12}(\xi) = \frac{k_3^2}{2}[mF_2(\xi) + (1-m)F_1(\xi)] -$$
$$-[mF_4(\xi) + (1-m)F_3(\xi)];$$
$$D(\xi)K_{21}(\xi) = \frac{k_3^2}{4}F_1(\xi);$$
$$D(\xi)K_{22}(\xi) = \frac{k_3^2}{4}[mF_2(\xi) + (1-m)F_1(\xi)].$$

Для анализа структуры системы уравнений (12) и ее решения следует провести исследование асимптотических свойств ядер $K_{ij}(\xi)$. Используя асимптотические формулы (11) для $D(\xi)$ и $F_j(\xi)$, для четных функций $K_{ij}(\xi)$ при $\xi\to+\infty$ получаем асимптотики

$$\begin{aligned} K_{11} &= A_{11}\xi^{-1} + \mathrm{O}(\xi^{-3}), \\ K_{12} &= A_{12}\xi + \mathrm{O}(\xi^{-1}), \\ K_{21} &= A_{21}\xi^{-1} + \mathrm{O}(\xi^{-3}), \\ K_{22} &= A_{22}\xi^{-1} + \mathrm{O}(\xi^{-3}), \\ A_{ij} &= \frac{a_{ij}}{d_0}, \quad i,j = 1,2, \end{aligned} \qquad (13)$$

где постоянные a_{ij} определяются выражениями

$$a_{11} = k_3^2 C_1/2 - C_3 = k_3^2[n_1 k_1^2 - n_2 k_2^2]/2 -$$
$$- k_1^2 k_2^2[(M_2 n_1 - M_1 n_2) + (n_2 - n_1)M_3]/2 -$$
$$- k_3^2[M_2 n_1 k_1^2 - M_1 n_2 k_2^2]/2;$$
$$\frac{1}{m}a_{12} = -C_4 = k_1^2(1/2 - m_1)(M_2 - M_3) -$$
$$- k_2^2(1/2 - m_2)(M_1 - M_3);$$
$$a_{21} = \frac{k_3^2}{4}C_1 = \frac{k_3^2}{4G}[n_1 k_1^2 - n_2 k_2^2];$$
$$a_{22} = \frac{k_3^2}{4}[mC_2 + (1-m)C_1] =$$
$$= \frac{k_3^2}{4}[m(m_2 - 1/2)k_2^2 - m(m_1 - 1/2)k_1^2 +$$
$$+ (1-m)(n_1 k_1^2 - n_2 k_2^2)].$$

Использование формул (13) позволяет свести систему уравнений первого рода (12) к системе сингулярных интегральных уравнений. Предположим, что функция $q_1(x)$ является интегрируемой, а $q_2(x)$ – непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-1,1]$, причем $q_2(\pm 1)=0$ (эти предположения подтверждаются проведенным ниже асимптотическим анализом системы уравнений (12)). Тогда, следуя рассуждениям из [3, § 2 – 3], введем в рассмотрение новые неизвестные функции $r_1(x)$, $r_2(x)$ и постоянные t_1, t_2:

$$\begin{aligned} r_1(x) &= \int\limits_0^x q_1(s)ds - t_1 x, \quad & t_1 &= \int\limits_0^1 q_1(s)ds, \\ r_2(x) &= q_2'(x) - t_2 x, & t_2 &= q_2'(1), \end{aligned} \tag{14}$$

так что

$$r_1(\pm 1) = r_2(\pm 1) = 0. \tag{15}$$

Тогда для новых неизвестных система (12) после некоторых преобразований приобретает вид

$$\begin{aligned} & A_{11}\int\limits_0^1 \frac{s r_1(s)}{s^2-x^2}ds - A_{12}\int\limits_0^1 \frac{s r_2(s)}{s^2-x^2}ds + \\ & + \int\limits_0^1 Q_{11}(x,s) r_1(s)ds - \int\limits_0^1 Q_{12}(x,s) r_2(s)ds + \\ & + t_1\int\limits_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi} K_{11}(\xi)\cos(x\xi)d\xi + \\ & + t_2\int\limits_0^\infty \frac{[\xi\cos\xi - \sin\xi]}{\xi^3} K_{12}(\xi)\cos(x\xi)d\xi = 0, \\ & A_{21}\int\limits_0^1 \frac{s r_1(s)}{s^2-x^2}ds + \int\limits_0^1 Q_{21}(x,s) r_1(s)ds - \\ & - \int\limits_0^1 Q_{22}(x,s) r_2(s)ds + \\ & + t_1\int\limits_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi} K_{21}(\xi)\cos(x\xi)d\xi + \\ & + t_2\int\limits_0^\infty \frac{[\xi\cos\xi - \sin\xi]}{\xi^3} K_{22}(\xi)\cos(x\xi)d\xi = W_0, \end{aligned} \tag{16}$$

где в соответствии с асимптотическими формулами для $K_{ij}(\xi)$ функции

$$K_{11}^{(0)}(\xi) = \xi K_{11}(\xi) - A_{11},$$

$$K_{12}^{(0)}(\xi) = \xi^{-1} K_{12}(\xi) - A_{12},$$

$$K_{21}^{(0)}(\xi) = \xi K_{21}(\xi) - A_{21},$$

$$K_{22}^{(0)}(\xi) = \xi^{-1} K_{22}(\xi)$$

и отвечающие им регулярные ядра

$$Q_{ij}(x,s) = \int\limits_0^\infty K_{ij}^{(0)}(\xi)\sin(s\xi)\cos(x\xi)d\xi,$$
$$i,j = 1,2.$$

Сингулярные интегралы в (16) понимаются в смысле интегралов Коши.

Решение системы уравнений (16), согласно (15), следует искать в классе функций, обращающихся в нуль на концах интервала. Как известно из общей теории сингулярных уравнений [11], такое требование приводит к необходимости выполнения двух, так называемых, условий ортогональности. В рассматриваемой ситуации возможность выполнения этих условий обеспечивается наличием неизвестных постоянных t_1, t_2.

Таким образом, при численном решении системы уравнений (16), с учетом нечетности функций $r_j(x)$ и равенств (15), можно воспользоваться разложениями по полиномам Чебышева второго рода

$$r_j(s) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{1-s^2}\sum_{k=1}^\infty (-1)^k R_{j,2k} U_{2k-1}(s), \quad j = 1,2, \tag{17}$$

с неизвестными постоянными $R_{j,2k}$, $j=1,2$, $k=1,2,\ldots$ При этом для исходных контактных напряжений, согласно (14), имеем равенства

$$q_1(x) = r_1'(x) + t_1,$$

$$q_2(x) = -\int\limits_x^1 r_2(s)ds + \frac{t_1}{2}(x^2-1).$$

Таким образом, замена неизвестных функций (14) позволяет получить систему сингулярных интегральных уравнений и воспользоваться единой системой ортогональных полиномов при нахождении обеих неизвестных функций.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ $\omega \to 0$

Анализ структуры ядер $K_{ij}(\xi)$ показывает, что асимптотические формулы (13) одновременно являются таковыми и при $\omega \to 0$:

$$K_{11}(\xi) \approx N_{11}\xi^{-1},$$

$$K_{12}(\xi) \approx \frac{N_{12}}{k_1^2}\xi,$$

$$K_{21}(\xi) \approx N_{21}\xi^{-1},$$

$$K_{12}(\xi) \approx N_{22}\xi^{-1}.$$

При этом следует различать два случая, в зависимости от наличия или отсутствия диссипации за счет трения поровой жидкости. В случае $b=0$ постоянные N_{ij} имеют вид

$$N_{11}=\Big\{[M_1n_2-M_2n_1+(n_1-n_2)M_3]+ +\Omega^2n_1(1-M_2)-\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}n_2(1-M_1)\Big\}\frac{1}{2\overline{d}_0},$$

$$N_{12}=m\frac{M_{1,3}}{n_1\overline{d}_0}[(1/2-m_1)n_2-(1/2-m_2)n_1\},$$

$$N_{21}=\frac{n_1\Omega^2}{4\overline{d}_0}[n_1\Omega_1^2-n_2],$$

$$N_{22}=\frac{\Omega^2}{4\Omega_1^2\overline{d}_0}[m(m_2-1/2)-m(m_1-1/2)\Omega_1^2+ +(1-m)(n_1\Omega_1^2-n_2)],$$

где

$$\overline{d}_0=(m_1-1/2)n_2-(m_2-1/2)n_1$$

и введены обозначения

$$\frac{k_1^2}{k_2^2}=\Omega_1^2\equiv\frac{z_1}{z_2},$$

$$\frac{k_3^2}{k_2^2}=\Omega^2\equiv\omega^2\frac{\rho c_2^2}{G}\frac{[\Gamma_{11}\Gamma_{22}-\Gamma_{12}^2]}{z_2\Gamma_{22}}$$

(в случае $b=0$ имеем $\Gamma=0$ и значения корней z_1, z_2 не зависят от частоты ω).

При $b\neq 0$ соответствующие постоянные имеют вид

$$N_{11}=\frac{M_{13}n_2}{2\overline{d}_0},$$

$$N_{12}=m\frac{M_{13}}{n_1\overline{d}_0}[(1/2-m_1)n_2-(1/2-m_2)n_1],$$

$$N_{21}=\frac{n_1\Omega_0^2}{4\overline{d}_0},$$

$$N_{22}=\frac{\Omega_0^2}{4}[-m(m_1-1/2)+(1-m)n_1],$$

где

$$\Omega_0^2=\lim_{\omega\to 0}\frac{k_3^2}{k_2^2}\equiv\frac{H}{G}.$$

В этом случае при $\omega\to 0$ справедливы соотношения

$$k_1^2\approx\omega^2\frac{c_2^2}{c^2}\frac{i\Gamma}{A_0}=-i\omega\frac{bac_2}{\rho c^2A_0},$$

$$k_2^2\approx\omega^2\frac{c_2^2}{c^2},\quad k_3^2\approx\omega^2\frac{c_2^2\rho}{G}.$$

Согласно асимптотическим формулам для $K_{ij}(\xi)$ получаем при $\omega\to 0$ (независимо от значения b), с учетом структуры функций K_{ij}:

$$\int\limits_0^\infty\Big\{\int\limits_0^1 q_2(s)\cos(\xi s)ds\Big\}K_{12}(\xi)\cos(x\xi)d\xi\approx \approx-\frac{N_{12}}{k_1^2}\int\limits_0^1 q_2^{'}(s)\frac{s}{s^2-x^2}ds,$$

и для остальных индексов $i,\ j=1,2$:

$$\int\limits_0^\infty\Big\{\int\limits_0^1 q_j(s)\cos(\xi s)ds\Big\}K_{ij}(\xi)\cos(x\xi)d\xi\approx \approx-N_{ij}\int\limits_0^1 q_j(s)\ln(\omega|s-x|)ds.$$

Таким образом, система уравнений (12) при $\omega\to 0$ принимает вид

$$\begin{aligned}&N_{11}\int\limits_0^1 q_1(s)\ln(\omega|s-x|)ds+\\&\quad+\frac{N_{12}}{k_1^2}\int\limits_0^1 q_2^{'}(s)\frac{s}{s^2-x^2}ds=0,\\&N_{21}\int\limits_0^1 q_1(s)\ln(\omega|s-x|)ds+\\&\quad+N_{22}\int\limits_0^1 q_2(s)\ln(\omega|s-x|)ds=-W_0.\end{aligned}\tag{18}$$

Покажем, что эта система уравнений допускает явное решение. Прежде всего, из второго уравнения системы (18) имеем соотношение

$$\int\limits_0^1 q_1(s)\ln(\omega|s-x|)ds= =-\frac{N_{22}}{N_{21}}\int\limits_0^1 q_2(s)\ln(\omega|s-x|)ds-\frac{W_0}{N_{21}}.$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы, получаем для определения функции $q(x)=q_2(x)$ линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}&-N_{11}N_{22}\int\limits_0^1 q(s)\ln(\omega|s-x|)ds+\\&\quad+\frac{N_{12}N_{21}}{k_1^2}\int\limits_0^1\frac{q^{'}(s)}{s^2-x^2}ds=G(s)\equiv N_{11}W_0.\end{aligned}\tag{19}$$

Так как искомая функция $q(s)$ является четной, то используя формулу интегрирования по частям для интеграла Коши [11, с. 586], имеем

$$\int\limits_0^1 q'(s)\frac{s}{s^2-x^2}ds = \int\limits_0^1\left[\int\limits_{-1}^{s} q''(t)dt-\alpha\right]\frac{1}{s-x}ds =$$
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} q''(s)\ln|s-x|ds+\frac{\alpha}{2}\ln(1-x^2),$$
$$\alpha = q'(1).$$

Таким образом, уравнение (19) можно записать в виде

$$\int\limits_{-1}^{1}\ln(\omega|s-x|)r(s)ds = \tag{20}$$
$$= -2G(s)+\frac{N_{12}N_{21}}{k_1^2}\alpha[2\ln w+\ln(1-x^2)],$$

где

$$r(s) = N_{11}N_{22}q(s)+\frac{N_{12}N_{21}}{k_1^2}q''(s),$$
$$\alpha = q'(1).$$

Интегрируемое решение уравнения (20) задается выражением [3, 11]:

$$r(x) = -\frac{2}{\pi\ln(\omega/2)}\cdot\frac{G(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Итак, для нахождения функции $q(x)$ получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$q''(x)+l^2k_1^2q(x) = -\frac{2Fl^2k_1^2}{\pi N_{22}\ln(\omega/2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{21}$$

где постоянная

$$l^2 = \frac{N_{11}N_{22}}{N_{12}N_{21}}.$$

Общее четное по x решение уравнения (21) имеет вид

$$q(x) = C\cos(lk_1x)-\frac{2Flk_1}{\pi N_{22}\ln(\omega/2)}\int\limits_0^x\frac{\sin(lk_1(x-s))}{\sqrt{1-s^2}}$$

с произвольной постоянной C. Для нахождения этой постоянной следует воспользоваться условием $q(1)=0$, что приводит к равенству

$$C\cos(lk_1) = \frac{2Flk_1}{\pi N_{22}\ln(\omega/2)}\int\limits_0^1\frac{\sin(lk_1(1-s))}{\sqrt{1-s^2}}ds.$$

Значит функция $q_2(x)=q(x)$ имеет вид

$$q_2(x) = \frac{2W_0lk_1}{\pi N_{22}\ln(\omega/2)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\cos(lk_1x)}{\cos(lk_1)}\int\limits_0^1\frac{\sin(lk_1(1-s))}{\sqrt{1-s^2}}ds-\right. \tag{22}$$
$$\left.-\int\limits_0^x\frac{\sin(lk_1(x-s))}{\sqrt{1-s^2}}ds\right\}.$$

Для определения неизвестной функции $q_1(x)$ рассмотрим второе уравнение системы (18). Тогда для функции

$$g(s) = N_{21}q_1(s)+N_{22}p_q(s)$$

имеем интегральное уравнение

$$\int\limits_0^1 q(s)\ln(\omega|s-x|)ds = -W_0,$$

откуда получаем выражение

$$g(x) = -\frac{2}{\pi\ln(\omega/2)}\cdot\frac{W_0}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Таким образом, решение системы уравнений (18) задается выражениями (22) и

$$q_1(x) = -\frac{2}{\pi N_{21}\ln(\omega/2)}\cdot\frac{W_0}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{N_{22}}{N_{21}}q_2(x). \tag{23}$$

Из формул (22), (23) получаем асимптотическое решение системы уравнений (12) при $\omega\to 0$:

$$q_1(x)\approx-\frac{2}{\pi N_{21}\ln(\omega/2)}\cdot\frac{W_0}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{24}$$

$$q_2(x)\approx\frac{2W_0l^2k_1^2}{\pi N_{22}\ln(\omega/2)}\times$$
$$\times\left\{\int\limits_0^1\frac{(1-s)}{\sqrt{1-s^2}}ds-\int\limits_0^x\frac{(x-s)}{\sqrt{1-s^2}}ds\right\} = \tag{25}$$
$$= \frac{2W_0l^2k_1^2}{\pi N_{22}\ln(\omega/2)}\left\{\frac{\pi}{2}-x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}\right\},$$

причем

$$q_2'(x)\approx-\frac{2W_0l^2k_1^2}{\pi N_{22}\ln(\omega/2)}\arcsin x. \tag{26}$$

Таким образом, согласно (24), эффективное контактное напряжение $q_1(x)$ имеет корневую особенность $(1-x^2)^{-1/2}$ при $x\to\pm 1$, при этом амплитуда колебаний стремится к нулю при $\omega\to 0$

как $1/\ln\omega$. Распределение эффективного напряжения под штампом имеет седлообразный характер и этот вывод аналогичен соответствующим результатам для контактной задачи динамической теории упругости ([3], глава 2). Для порового контактного давления в пределе $\omega\to 0$ получаем функцию с особенностью $(1-x^2)^{3/2}$ (см. (25), (26)). При этом амплитуда стремится к нулю как $k_1^2/\ln\omega$. Таким образом, порядок стремления к нулю величины порового давления является более высоким по сравнению с эффективным контактным напряжением и зависит от наличия или отсутствия диссипации, так как при $\omega\to 0$ справедливы соотношения $k_1^2=\mathrm{O}(\omega)$ при $b\neq 0$ и $k_1^2=\mathrm{O}(\omega^2)$ при $b=0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье определено асимптотическое решение граничной задачи о гармонических колебаниях жесткого непроницаемого штампа, расположенного на пористо-упругом полупространстве при стремлении частоты колебаний к нулю. Показано, что контактное эффективное напряжение ведет себя аналогично контактному напряжению соответствующей задачи упругости, а именно, имеет корневую особенность вблизи краев штампа и амплитуду, стремящуюся к нулю по закону обратного логарифма. В то же время, контактное поровое давление не имеет такой особенности и убывание его амплитуды при стремлении частоты колебаний к нулю является более быстрым, чем убывание амплитуды эффективного напряжения. Порядок этого убывания зависит от наличия или отсутствия диссипации за счет трения поровой жидкости.

1. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред.– М: Наука, 1989.– 344 с.
2. *Сеймов В. М.* Динамические контактные задачи.– К: Наук. думка, 1976.– 284 с.
3. *Динамика* сплошных сред в расчетах гидротехнических сооружений / Ред. В. М. Лятхера и Ю. С. Яковлева.– М: Энергия, 1976.– 392 с.
4. *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– **28**, N 2.– P. 168–191.
5. *Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А.* Колебания и волны в слоистых средах.– К: Наук. думка, 1990.– 222 с.
6. *Albert D. G.* A comparison between wave propagation in water-saturated and air-saturated porous materials // J. Appl. Phys.– 1993.– **73**, N 1.– P. 28–36.
7. *Sun F., Banks-Lee P., Peng H.* Wave propagation theory in anisotropic periodically layered fluid-saturated porous media // J. Acoust. Soc. Amer.– 1993.– **93**, N 3.– P. 1277–1285.
8. *Halper M. R., Christiano P.* Response of poroelastic halfspace to steady-state harmonic surface tractions // Inter. J. Num. Analit. Methods in Geomech.– 1986.– **10**, N 6.– P. 609–632.
9. *Трофимчук А. Н.* Динамическое взаимодействие жесткой плиты с водонасыщенным пористо-упругим основанием // Прикл. мех.– 1996.– **32**, N 1.– С. 69–74.
10. *Косачевский Л. Я.* О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // Прикл. матем. и мех.– 1959.– **23**, N 6.– С. 1115–1123.
11. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.– М.: Наука, 1977.– 640 с.