

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ОБ ОТРАЖЕНИИ ПЕРВОЙ СИММЕТРИЧНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ВОЛНЫ ОТ ЗАЩЕМЛЕННОГО ТОРЦА ПОЛУПОЛОСЫ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 5.05.99 ♦ Пересмотрено 14.06.99

В рамках метода суперпозиций проведен анализ ближней зоны волнового поля в полуполосе со свободными боковыми поверхностями и защемленным торцом. Учет особенности по напряжениям, которая возникает в точке смены типа граничных условий, позволил создать алгоритм для адекватного описания структуры ближней зоны. Проведенные расчеты указывают на то, что неоднородные волны играют значительную роль в ближней зоне. В отличие от полуполосы со свободным торцом, в данном случае резонансных явлений на неоднородных волнах не наблюдалось. Проанализирован эффект разгрузки срединной плоскости в зависимости от частоты и показателя особенности по напряжениям.

У рамках метода суперпозицій проведено аналіз ближньої зони хвильового поля у півсмугі з вільними боковими поверхнями і защемленим торцем. Урахування особливості по напругам, яка виникає у точці зміни типу граничних умов, дозволило створити алгоритм для адекватного опису структури ближньої зони. Проведені обрахунки вказують на те, що неоднорідні хвилі відіграють значну роль у ближній зоні. На відміну від півсмуги з вільним торцем, у даному випадку резонансних явищ на неоднорідних хвилях не спостерігалось. Проаналізовано ефект розвантаження срединної площини в залежності від частоти і показника особливості по напругам.

By method of superpositions there was held the analysis of near zone of wave field in half-strip with free side surfaces and clamped end-wall. The account of tension singularity arising in the point of change of type of boundary condition allowed to develop the algorithm for adequate description of the near field structure. The numerical analysis has shown that evanescent waves plays the essential role in the near zone. On the contrary to half-strip with free end-wall there were not detected any resonant effects for evanescent waves. Also the effect of unload of middle plane in dependence of frequency and order of tension singularity were analyzed.

ВВЕДЕНИЕ

В дефектоскопии, неразрушающем контроле, акустоэлектронике и ряде других областей важное место занимает задача о распространении упругих волн в волноводах. Распространение установившихся колебаний в регулярных упругих волноводах изучено достаточно полно. Однако в большинстве случаев рассматривалась граничная задача о волноводе со свободными боковыми поверхностями при воздействии заданного распределения касательных или нормальных напряжений на торце [1]. При жесткой заделке торца граничная задача изучена недостаточно полно. Это связано с трудностями, которые возникают при определении напряженно-деформированного состояния вблизи угловой точки. Они обусловлены существованием локальной особенности по напряжениям в точке смены типа граничных условий. В связи с этим подробное изучение напряженного состояния в окрестности жесткой заделки должно базироваться на использовании метода, способного адекватно описать наличие локальных особенностей. Таким методом является метод суперпозиций [2].

Впервые граничная задача для полуполосы с

защемленным торцом была рассмотрена Бенсеном [3]. В этой работе особенность по напряжениям учитывалась путем введения отдельного члена в решение. Это приводило к переопределенности при определении напряжений и, следовательно, к плохой обусловленности системы уравнений. В дальнейшем данная граничная задача изучалась в работе [4], в которой напряжение также представлялось в виде бесконечного ряда по ортогональным функциям и отдельного члена, описывающего особенность, что не устраняло отмеченный недостаток. В этой работе рассматривались энергетические особенности процесса отражения, анализ ближнего поля не проводился.

Энергетическим аспектам отражения первой симметричной волны от защемленного торца волновода посвящена работа [5], в которой граничная задача решалась методом однородных решений без учета особенности по напряжениям в угловой точке. В рамках метода однородных решений на основе свойства обобщенной ортогональности в работах [6, 7] предложены методы, позволяющие учитывать особенность по напряжениям в точке смены типа граничных условий, однако и в этих работах ближнее поле не анализировалось.

В работе [2] для решения граничной задачи

при кинематическом возбуждении торца предложен метод суперпозиций, который позволяет учесть особенность по напряжениям в угловой точке. Граничная задача решена для цилиндра конечной длины для случая задания кинематических граничных условий на его торцах. Метод суперпозиций, учитывающий особенность по напряжениям, возникающую в точке смены типа граничных условий, позволяет создать расчетный алгоритм, адекватно описывающий особенности ближнего поля. При этом напряжения и смещения, найденные методом суперпозиций, могут быть представлены как разложение по нормальным модам. Это позволяет провести достаточно полный анализ волнового поля в ближней зоне.

Данная работа посвящена дальнейшему развитию метода суперпозиций для анализа волновых процессов в полуполосе с заземленным торцом. При этом особое внимание уделено изучению особенностей поведения волнового поля в ближней зоне в зависимости от частоты и показателя особенности по напряжениям в угловой точке. Волновое поле в дальней зоне (с точки зрения энергетики процесса отражения от заземленного торца) рассматривалось только для сравнения с известными результатами и являлось дополнительным критерием проверки достоверности полученных количественных данных.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается стационарное волновое поле в упругой полуполосе $Z \geq 0$, $|Y| \geq h$ со свободными от напряжений боковыми поверхностями $Y = \pm h$ и жестко заземленным торцом $Z = 0$ (рис. 1). Волновое поле возбуждается первой нормальной волной, приходящей из бесконечности. После введения безразмерных координат $y = Y/h$, $z = Z/h$ и отделения гармонического множителя $e^{-i\omega t}$ граничная задача для вектора смещений

$$\vec{u} = \{u_y(y, z), 0, u_z(y, z)\}$$

принимает вид

$$\Delta \vec{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } \vec{u} + \Omega_2^2 \vec{u} = 0, \quad (1)$$

$$u_y(y, 0) + u_y^{(0)}(y, 0) = 0, \quad (2)$$

$$u_z(y, 0) + u_z^{(0)}(y, 0) = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_y(\pm 1, z) = 0,$$

$$\tau_{yz}(\pm 1, z) = 0,$$

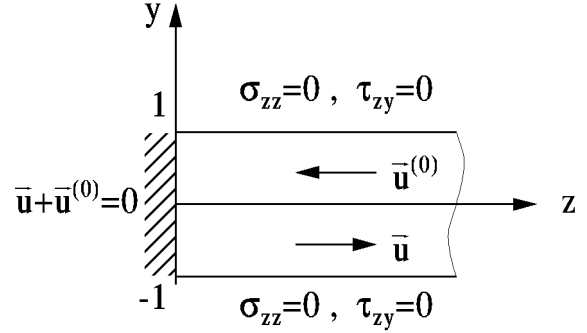


Рис. 1. Полуполоса со свободными боковыми поверхностями и заземленным торцом

где $\Omega_2 = \omega h/c_2$ – безразмерная частота; ω – круговая частота; c_2 – скорость поперечных волн; ν – коэффициент Пуассона. Индекс $^{(0)}$ соответствует падающей волне. Выражения для смещения в падающей волне зададим в следующем виде [5]:

$$u_z^{(0)} = \xi \left(p_1^2(\xi) p_2(\xi) \frac{\text{ch } p_2(\xi) y}{\text{sh } p_2(\xi)} - \frac{p_2^2(\xi) + \xi^2}{2} p_1(\xi) \frac{\text{ch } p_1(\xi) y}{\text{sh } p_1(\xi)} \right) e^{-i\xi z}, \quad (4)$$

$$u_y^{(0)} = i p_1^2(\xi) \left(\xi \frac{\text{sh } p_2(\xi) y}{\text{sh } p_2(\xi)} - \frac{p_2^2(\xi) + \xi^2}{2} \frac{\text{sh } p_1(\xi) y}{\text{sh } p_1(\xi)} \right) e^{-i\xi z},$$

где

$$p_j(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\xi^2 - \Omega_j^2}, & |\xi| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \xi^2}, & |\xi| < \Omega_j, \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \quad \Omega_1 = \Omega_2 \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}.$$

Здесь ξ – первый действительный корень дисперсионного уравнения Рэлея – Лэмба:

$$\Delta(\xi) = \xi^2 p_1^2(\xi) p_2(\xi) \frac{\text{ch } p_2(\xi)}{\text{sh } p_2(\xi)} - \frac{(p_2^2(\xi) + \xi^2)^2}{4} p_1(\xi) \frac{\text{ch } p_1(\xi)}{\text{sh } p_1(\xi)} = 0.$$

Необходимо определить напряжения на торцевой поверхности и амплитуды возбуждения нормальных волн, которые могут существовать в рассматриваемом волноводе на заданной частоте.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения граничной задачи использовался метод суперпозиций, который позволяет учесть существование особенности по напряжениям в точке смены типа граничных условий и адекватно описать ближнее поле. Согласно общей идее этого метода вектор смещения представим в виде

$$\begin{aligned} u_y &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z} \right) \times \\ &\quad \times \sin \beta_k y + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_y(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \\ u_z &= i A_0 \Omega_1 e^{i\Omega_1 z} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z} \right) \times \\ &\quad \times \cos \beta_k y - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_z(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Последовательности A_n , B_n и функция $x(\tau)$ являются неизвестными и определяются с помощью граничных условий. Здесь положено

$$\begin{aligned} U_y(\tau, y) &= p_1^2(\tau) \left(\tau^2 \frac{\operatorname{sh} p_2(\tau) y}{\operatorname{sh} p_2(\tau)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\tau^2 + p_2^2(\tau))}{2} \frac{\operatorname{sh} p_1(\tau) y}{\operatorname{sh} p_1(\tau)} \right), \\ U_z(\tau, y) &= \tau p_1(\tau) \left(p_1(\tau) p_2(\tau) \frac{\operatorname{ch} p_2(\tau) y}{\operatorname{ch} p_2(\tau)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\tau^2 + p_2^2(\tau))}{2} \frac{\operatorname{ch} p_1(\tau) y}{\operatorname{ch} p_1(\tau)} \right), \\ q_j &= \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & |\beta_k| \geq \Omega_j \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & |\beta_k| < \Omega_j, \end{cases} \quad \beta_k = k\pi. \end{aligned}$$

Представление (5) выбрано таким образом, что граничные условия для касательных напряжений (3) выполняются автоматически. Выполнение оставшихся граничных условий приводит к системе интегро-алгебраических уравнений относительно неизвестных A_0 , A_k , B_k , ($k=1, 2, \dots$) и

$x(\tau)$, имеющей следующий вид:

$$\begin{aligned} x(\tau) \Delta(\tau) + A_0 \frac{2i\Omega_0^2 \Omega_1}{\tau^2 - \Omega_1^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k (\beta_k^2 + \Omega_0^2) \times \right. \\ \left. \times \frac{2q_1}{\tau^2 + q_1^2} + \beta_k \frac{2q_2^2}{\tau^2 + q_2^2} \right) (-1)^k = 0, \\ i A_0 \Omega_1 = -\xi \Omega_0, \\ A_k (-1)^k q_1 + B_k (-1)^k \beta_k = \\ = \xi p_1^2(\xi) \left(\frac{2p_2^2(\xi)}{p_2^2(\xi) + \beta_k^2} - \frac{\xi^2 + p_2^2(\xi)}{p_1^2(\xi) + \beta_k^2} \right), \\ (A_k \beta_k + B_k q_1) (-1)^k + \\ + \frac{\beta_k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) a_k(\tau) d\tau = -(-1)^k i a_k(\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_k(\tau) &= p_1^2(\tau) \left(\frac{2\tau^2}{\beta_k^2 + p_2^2(\tau)} - \frac{\tau^2 + p_2^2(\tau)}{\beta_k^2 + p_1^2(\tau)} \right); \\ 2\Omega_0^2 &= \Omega_2^2 - 2\Omega_1^2; \end{aligned}$$

$\Delta(\tau) = 0$ – дисперсионное уравнение Рэлея – Лэмба, которое на действительной оси имеет конечное число корней $\pm \xi_j$ ($j=1, \dots, J$). Количество корней J и их значения зависят от частоты ω .

Вследствие существования в угловой точке интегрируемой особенности по напряжениям ряды для напряжений на граничных поверхностях при подходе к углу будут сходиться очень медленно и получить по ним достоверные результаты возможно только, если известно асимптотическое поведение неизвестных и функции $x(\tau)$. Анализ асимптотического поведения неизвестных в системе (6) основан на известных свойствах напряжений вблизи угловых точек ($y=\pm 1$, $z=0$). В окрестности угла нормальное напряжение σ_z может быть представлено в виде

$$\sigma_z(\pm 1, z) = \frac{\sigma_{(1)}}{(1-y^2)^{1-\epsilon}} + \psi(y). \quad (7)$$

По аналогии для касательного напряжения имеем

$$\tau_{zy}(\pm 1, z) = \frac{\tau_{(1)}}{y(1-y^2)^{1-\epsilon}} + \psi_1(y). \quad (8)$$

Здесь $\psi(y)$, $\psi_1(y)$ – некоторые гладкие функции.

Используя значения интегралов [9]

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-y^2)^{1-\epsilon} \cos \beta_k y dy &= \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{\beta_k} \right)^{1.5-\epsilon} \Gamma(2+\epsilon) J_{1.5-\epsilon}(\beta_k), \\ \int_0^1 y (1-y^2)^{1-\epsilon} \sin \beta_k y dy &= \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{\beta_k} \right)^{1.5-\epsilon} \Gamma(2+\epsilon) J_{2.5-\epsilon}(\beta_k), \end{aligned}$$

слагаемые с особенностью, входящие в выражения (7), (8), представим бесконечными рядами по системам функций $\cos(\beta_k y)$, $\sin(\beta_k y)$ соответственно. Требуемому характеру особенностей по напряжениям в угловых точках соответствуют асимптотические значения неизвестных A_k , B_k и функции $x(\tau)$ в системе (6) в виде

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \frac{a_0 J_{\epsilon-0.5}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon-0.5}}, \\ B_k &= -\frac{2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \frac{b_0 J_{\epsilon-0.5}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon-0.5}}, \\ a_0 &= d_0 \left(1 - \frac{\Omega_1^4 + \Omega_2^4}{2\beta_k^2 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \right), \\ b_0 &= d_0 \left(1 - \frac{\Omega_1^4 + \Omega_2^4}{2\beta_k^2 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \right) - \frac{\sigma_{(1)} (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)}{2\beta_k}, \\ d_0 &= \sigma_{(1)} + \text{tg} \left(\frac{\pi\epsilon}{2} \right) \tau_{(1)}, \\ x(\tau) &= \frac{2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \frac{c_0}{\tau^{3+\epsilon}}, \\ c_0 &= \frac{2 \text{ctg} \left(\frac{\pi\epsilon}{2} \right) \left(\sigma_{(1)} \epsilon + (1+\epsilon) \text{tg} \left(\frac{\pi\epsilon}{2} \right) \tau_{(1)} \right)}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя соотношения (9) и сохраняя в системе (6) только главные члены, получаем систему однородных уравнений. Условие существования ненулевого решения для постоянных $\sigma_{(1)}$, $\tau_{(1)}$ дает трансцендентное уравнение для ϵ :

$$(3 - 4\nu) + \left(\epsilon - 2(1 - \nu) \right) \left(\epsilon + 2(1 - \nu) \right) = 0,$$

которое совпадает с уравнением для определения особенности по напряжениям для четвертьплоскости [10].

Знание асимптотических свойств неизвестных A_k и B_k позволяет использовать методы улучшенной редукции при решении системы интегро-алгебраических уравнений (6). Это в свою очередь позволяет определить с наперед заданной точностью значения неизвестных, а, следовательно, поля напряжений и перемещений.

Переход от интегро-алгебраических уравнений (6) к системе линейных алгебраических аналогичен процедуре, изложенной в [8], и здесь нет необходимости подробно останавливаться на нем. Отметим только, что для замыкания системы из $2K+1$ уравнений с $2K+3$ неизвестными A_0 , A_k , B_k ($k=1, 2, \dots, K$), $\sigma_{(1)}$, $\tau_{(1)}$ существует ряд подходов. В качестве еще двух уравнений можно использовать асимптотические значения неизвестных в виде (9) или граничные условия (2) в виде соотношений $u_z(\pm 1, 0) + u_z^{(0)}(\pm 1, 0) = 0$, $u_y(\pm 1, 0) + u_y^{(0)}(\pm 1, 0) = 0$.

Используя значения неизвестных, полученных в рамках метода суперпозиций с учетом особенности по напряжениям в угловой точке, можно определить аналогично [8] коэффициент возбуждения j -ой нормальной волны:

$$\begin{aligned} C_j &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k (\beta_k^2 + \Omega_0^2) \frac{2q_1}{\xi_j^2 + q_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + B_k \beta_k \frac{2q_2^2}{\xi_j^2 + q_2^2} \right) \frac{(-1)^k}{\Delta'(\xi_j)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Энергия отраженного поля равняется сумме энергий, переносимых каждой из распространяющихся волн, и определяется соотношением

$$W = \sum_{j=1}^J W_j, \quad (11)$$

$$W_j = |C_j|^2 G \omega p_1^2(\xi_j) \Omega_2^2 \Delta'(\xi_j).$$

Здесь G – модуль сдвига упругого материала. Выполнение закона сохранения энергии служит одним из критериев проверки правильности полученных результатов.

3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Перейдем к анализу численных результатов, описывающих процесс отражения первой нормальной симметричной волны от защемленного торца полуплоскости. Анализ проводился для частот, меньших частоты первого толщинно-сдвигового резонанса $\Omega \leq \pi$. В этом диапазоне существует ряд характерных интервалов. Для частот $\Omega \leq \Omega^*$

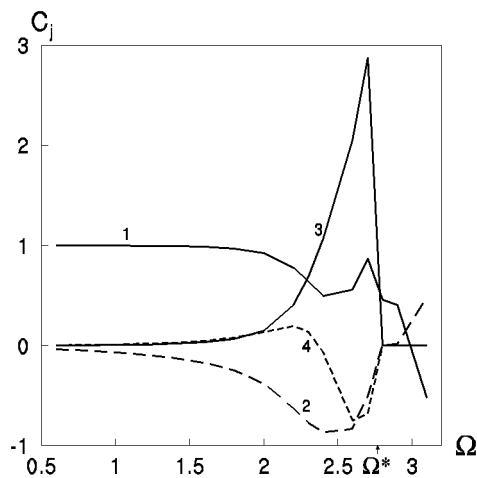


Рис. 2. Частотные зависимости амплитуды возбуждения j -ой нормальной волны

существует только одна распространяющаяся волна. В диапазоне частот $\Omega^* \leq \Omega \leq \Omega_1$ распространяется “обратная” волна и еще две нормальных волны. Здесь $\Omega_1 = \pi k/2$ – частота первого толщинного резонанса, $k^2 = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$. На интервале $\Omega_1 \leq \Omega \leq \pi$ существует две распространяющиеся волны. Таким образом, выбранный частотный диапазон позволяет проанализировать особенности ближнего поля в наиболее интересных частотных интервалах.

Известно [10], что с уменьшением коэффициента Пуассона величина ϵ увеличивается, т.е. уменьшается показатель особенности по напряжениям в угловой точке. Для анализа влияния показателя особенности по напряжениям в угловой точке, задаваемой соотношениями (7), (8), на волновые характеристики процесса рассматривались упругие материалы с коэффициентами Пуассона $\nu = 0.3$ и $\nu = 0.1$.

Достоверность полученных результатов обеспечивалась высокой точностью выполнения граничных условий и хорошим согласованием с известными результатами. Независимо от способа замыкания системы погрешность удовлетворения граничных условий не превышала 1.5% от смещения в падающей волне. Такая точность достигалась при учете до десяти членов в рядах. Дальнейшее увеличение числа членов ряда практически не приводило к изменению значения коэффициентов и давало поправку, не превышающую долей процента. Учет асимптотических свойств неизвестных в системе позволил увеличить точность удовлетворения граничных условий на торце на 20%.

Следующим критерием проверки являлся контроль за выполнением закона сохранения энергии. В рассмотренном частотном диапазоне закон сохранения энергии выполнялся с точностью до 0.1% энергии падающей волны. В области частот, где существует несколько распространяющихся волн, распределение энергии падающей волны между этими волнами полностью совпало с результатами, приведенными в [4, 5]. В упомянутых исследованиях проведен достаточно полный анализ энергетических аспектов процесса отражения первой симметричной волны от заземленного торца полуполосы, поэтому в данной работе на этих вопросах останавливаться не будем.

Прежде всего рассмотрим частотную зависимость коэффициентов возбуждения различных нормальных волн, найденную по соотношению (10) для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ ($\epsilon = 0.711$). На рис. 2 представлены коэффициент возбуждения первой распространяющейся волны A_1 (кривая 1 – действительная часть, кривая 2 – мнимая часть) и первой неоднородной волны, т.е. волны с волновым числом, равным первому комплексному корню дисперсионного уравнения Рэля – Лэмба A_2 (кривая 3 – действительная часть, кривая 4 – мнимая часть). Из рисунка видно, что в области низких частот $\Omega \leq 1.0$ действительная часть коэффициента возбуждения первой распространяющейся волны близка к единице, а мнимая – к нулю. Коэффициенты возбуждения неоднородных волн близки к нулю (A_2 имеет порядок 10^{-2}). При этом A_2 превышает коэффициенты возбуждения неоднородных волн высших порядков в 100 и более раз. Нормальное напряжение σ_{zz} по толщине полуполосы практически постоянно. В этом частотном диапазоне коэффициент отражения единственной распространяющейся волны может быть найден по стержневой модели.

С ростом частоты ситуация меняется, хотя по-прежнему существует только одна распространяющаяся волна. Проявляется частотная зависимость коэффициента возбуждения единственной распространяющейся волны (действительная часть A_2 падает, а мнимая увеличивается по модулю, при этом $|A_2| = 1$, т.е. закон сохранения энергии выполняется с высокой точностью). Распределение напряжений и смещений по толщине волновода становится неоднородным. Для частот выше $\Omega = 1.0$ отношение фазовых скоростей первой распространяющейся волны к волне Рэля составляет порядка 0.8, и первая распространяющаяся волна приближается к поверхностной рэлеевской волне. При этом отраженное поле в ближней зоне уже не может быть описано единственной распростра-

няющейся волной, а стержневая модель становится неприменимой. Другим проявлением изменения волнового поля является усиление влияния неоднородных волн с увеличением частоты. Только при учете неоднородных волн удастся удовлетворить граничные условия и адекватно описать волновой процесс в ближнем поле.

Следует отметить, что в диапазоне частот, где еще существует только одна распространяющаяся волна, а распределение напряжений и смещений по толщине волновода уже неоднородно, роль неоднородных волн очень велика независимо от типа граничных условий на торце. Как для свободного, так и для заземленного торца сильное возбуждение неоднородных волн в ближнем поле способствует передаче энергии падающей волны в дальнее поле в диапазоне существования одной распространяющейся волны. Коэффициент возбуждения неоднородных волн до определенной частоты растут. Однако характер роста и особенности этих коэффициентов оказываются значительно зависимыми от типа граничных условий на торце. Для заземленного торца модуль первой неоднородной волны увеличивается вплоть до частоты $\Omega = \Omega^* = 2.74$, на которой первый комплексный корень уравнения Рэлея–Лэмба вырождается в действительный и появляется “обратная” волна. На частоте $\Omega = 2.32$ коэффициент A_2 по модулю достигает величины коэффициента возбуждения распространяющейся волны. При этом мнимая часть A_2 меняет знак. На этой же частоте $\text{Re } A_1 \approx -\text{Im } A_1$.

Частота $\Omega = 2.32$ является особой при отражении первой симметричной волны от свободного торца полуполосы. Это частота краевого резонанса. В случае заземленного торца на данной частоте резонансных явлений не наблюдалось. Коэффициент возбуждения первой неоднородной волны продолжал увеличиваться при дальнейшем росте частоты (см. рис. 2). Коэффициенты возбуждения неоднородных волн высших порядков также увеличиваются с ростом частоты. При этом резкой смены фазовых характеристик для этих волн не наблюдается. Как и для полуполосы со свободным торцом, в рассматриваемом случае амплитуды возбуждения неоднородных волн резко уменьшаются с ростом номера. Выше частоты Ω^* появляются распространяющиеся волны высших порядков, что приводит к значительному изменению характеристик ближнего поля. Роль неоднородных волн падает, поскольку определяющими в структуре волнового поля являются распространяющиеся волны высших порядков.

Основной целью данной работы является анализ

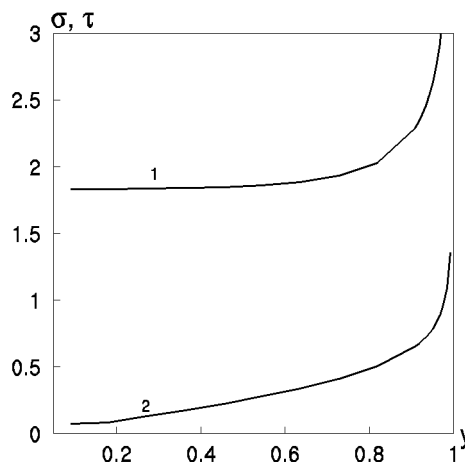


Рис. 3. Распределение нормального σ_{zz} (кривая 1) и касательного τ_{zy} (кривая 2) напряжений по торцу полуполосы для частоты $\Omega = 0.1$ при $\epsilon = 0.71$

напряжений на торцевой поверхности. На рис. 3 для частоты $\Omega = 0.1$ представлено распределение по торцевой поверхности модулей нормального и касательного напряжений, отнесенных к нормальному напряжению падающей волны на срединной поверхности $\sigma^{(0)}(0, 0)$. Из рисунка видно, что даже в области очень низких частот напряжения, найденные по трехмерной теории упругости, отличаются от напряжений, полученных по стержневой теории. На срединной поверхности нормальное напряжение, найденное по трехмерной теории, более, чем на 8 % отличается в меньшую сторону от напряжения, найденного по стержневой теории. При движении по торцу в направлении угловой точки нормальные напряжения изменяются незначительно вплоть до $y = 0.9$, а при дальнейшем увеличении y резко возрастают, стремясь к бесконечности в окрестности угловой точки. Таким образом, наблюдается эффект разгрузки срединной плоскости за счет увеличения напряжения в угловой точке. Касательные напряжения увеличиваются с ростом y и также стремятся к бесконечности в окрестности угловой точки.

На рис. 4 представлено распределение нормального напряжения $|\sigma_{zz}(0, y)/\sigma^{(0)}|$ (сплошные кривые) и касательного напряжения $|\tau_{xz}(0, y)/\sigma^{(0)}|$ (пунктирные кривые) по торцевой поверхности для различных частот. Видно, что с ростом частоты распределение нормального и касательного напряжений по торцевой поверхности изменяется. Однако до частоты $\Omega = 2.3$ для нормальных напряжений с ростом частоты усиливается эффект раз-

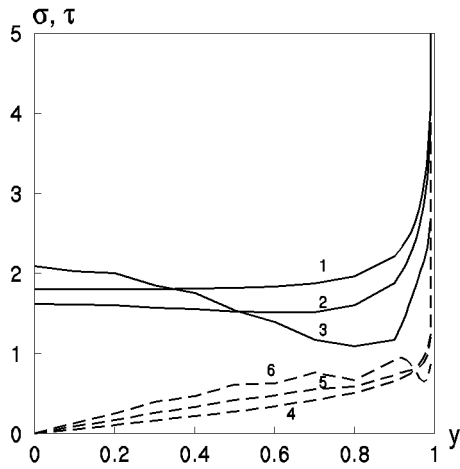


Рис. 4. Распределение нормального σ_{zz} (кривые 1–3) и касательного τ_{zy} (кривые 4–6) напряжений по торцу полуполосы на частотах $\Omega=1.0$ (кривые 1, 4), $\Omega=2.0$ (кривые 2, 5), $\Omega=2.5$ (кривые 3, 6) при $\epsilon=0.71$

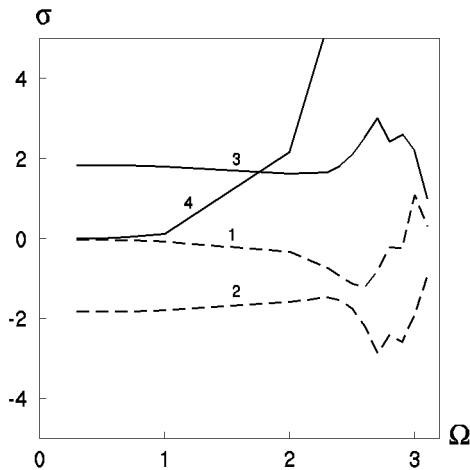


Рис. 5. Распределение нормального напряжения σ_{zz} на срединной поверхности в зависимости от частоты:
1 – $\text{Re } \sigma_{zz}$, 2 – $\text{Im } \sigma_{zz}$, 3 – $|\sigma_{zz}|$, 4 – $\sigma^{(0)}$

грузки на срединной поверхности, область относительной стабильности напряжения уменьшается, а область значительного возрастания напряжений расширяется (кривые 1 и 2). При дальнейшем увеличении частоты, несмотря на то, что все еще существует только одна распространяющаяся волна, характер распределения нормального напряжения по торцу изменяется. Это обусловлено двумя причинами. Во-первых, падающая волна близка и рэлеевской, а во-вторых, значительно усиливает-

ся влияние неоднородных волн на волновое поле в полуполосе. При анализе частотной зависимости коэффициентов возбуждения различных нормальных мод отмечалось, что начиная с $\Omega=2.3$ амплитуда первой неоднородной волны близка к амплитуде распространяющейся волны. Касательные напряжения до частоты $\Omega=2.3$ увеличиваются с ростом y по всему торцу (кривые 4 и 5), а для более высоких частот имеют осциллирующий характер (кривая 6).

На рис. 5 показана зависимость нормального напряжения σ_{zz} на торцевой поверхности в точке $y=0$ от частоты. Из рисунка видно, что напряжение на торцевой поверхности повторяет по форме напряжение в падающей волне только в области очень низких частот $\Omega \leq 1$. С ростом частоты увеличивается фазовый сдвиг, отраженное поле в значительной мере зависит от возбуждения неоднородных волн и распределение напряжений на торце отличается от напряжений в падающей волне даже на срединной поверхности. При приближении к угловой точке это отличие увеличивается. Таким образом, неоднородные волны значительно изменяют структуру ближней зоны волнового поля.

В угловой точке предел для напряжений не существует, однако о частотной зависимости напряжений в окрестности угла можно судить по изменению $\sigma_{(1)}$ (7). На рис. 6, а представлена такая зависимость для низкочастотного интервала, а на рис. 6, б – для высокочастотного. Графики даны в разных масштабах. В области низких частот модуль $\sigma_{(1)}$, который можно рассматривать как коэффициент концентрации напряжений, увеличивается с частотой, достигая первого максимума на частоте Ω^* , незначительно падает в диапазоне частот $2.74 \leq \Omega \leq 2.76$ и достигает второго максимума на частоте толщинного резонанса $\Omega=2.94$, после чего резко уменьшается вплоть до частоты толщинно-сдвигового резонанса $\Omega=\pi$.

При анализе напряжений на торцевой поверхности в полуполосе с защемленным торцом интересно оценить влияние показателя особенности в угловой точке на распределение напряжений на торце. На рис. 7 представлены распределения модулей нормированных нормального и касательного напряжений на частоте $\Omega=0.1$ для $\nu=0.1$ (при этом $\epsilon=0.876$). Уменьшение показателя особенности приводит уменьшению влияния особенности по напряжениям на распределения напряжений на срединной поверхности. Эффект разгрузки срединной плоскости, по сравнению со стержневой теорией уменьшается. В данном случае отличие от стержневой теории пластин составляет чуть

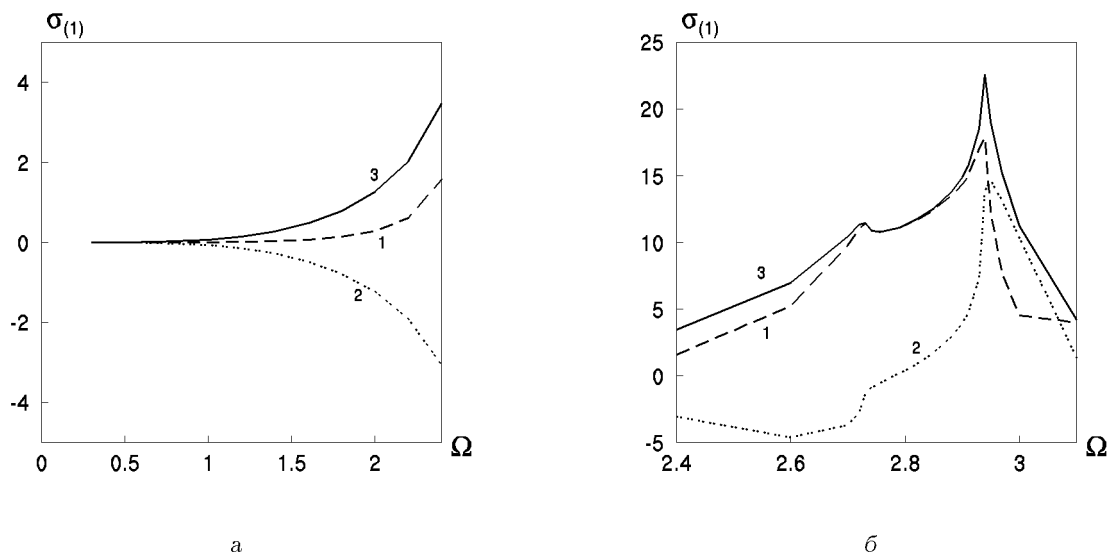


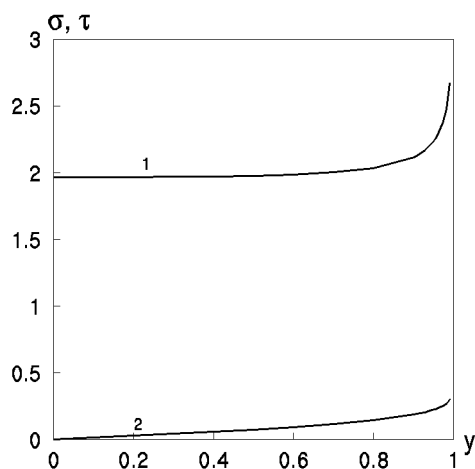
Рис. 6. Частотные зависимости коэффициента концентрации напряжения:

1 – $\text{Re}\sigma_{(1)}$, 2 – $\text{Im}\sigma_{(1)}$, 3 – $|\sigma_{(1)}|$

меньше 2 %. Область концентрации напряжений вблизи угла уменьшается по сравнению с $\nu=0$. Касательные напряжения при росте y увеличиваются значительно медленнее.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учет особенности по напряжениям в точке смены типа граничных условий при решении граничной задачи для полуполосы со свободными боковыми поверхностями и заземленным торцом позволил установить ряд специфических черт волнового поля в ближней зоне. Прежде всего следует отметить значительное влияние неоднородных волн на структуру ближней зоны в диапазоне частот, где существует только одна распространяющаяся волна, а распределение напряжений и смещений по толщине волновода в падающей волне неоднородно. Коэффициент возбуждения первой неоднородной волны увеличивается вплоть до частоты Ω^* , на которой появляется “обратная” волна. В отличие от полуполосы со свободным торцом, в данном случае резонансных явлений на неоднородных волнах не наблюдалось. Как и для полуполосы со свободным торцом, коэффициенты возбуждения неоднородных волн падают с увеличением номера. Для частот, на которых существует несколько распространяющихся волн, роль неоднородных волн падает, и структуру поля в основном определяют распространяющиеся волны высших порядков. Как и для полуполосы со свободным торцом,

Рис. 7. Распределение нормального σ_{zz} (кривая 1) и касательного τ_{zy} (кривая 2) напряжений по торцу полуполосы для частоты $\Omega=0.1$ при $\epsilon=0.876$

в случае жесткой заделки торца при появлении в отраженном поле бегущих волн высших порядков происходит эффективная трансформация энергии падающей волны в эти моды. В области существования “обратной” волны эта волна является наиболее энергетически выраженной. Для более высокочастотного диапазона наблюдается сильная частотная зависимость энергоемкости различных бегущих волн [5].

Другим проявлением особенностей ближней зоны, которые не могут быть обнаружены в рамках стержневой теории, является эффект разгрузки срединной поверхности. Данный эффект усиливается при увеличении коэффициента Пуассона. При движении по торцевой поверхности в направлении угловой точки различие между напряжениями, найденными по трехмерной и стержневой теориям, увеличивается. Различие между результатами, полученными по указанным теориям, возрастает с ростом частоты в диапазоне существования одной распространяющейся волны.

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. Гринченко В. Т., Карнаухов В. Г., Сенченков И. К. Напряженно-деформированное состояние и разогрев вязко-упругого цилиндра с ограничениями по торцам // Прикл. мех. – 1975. – 11, N 4. – С. 27–36.
3. Benth J. P. A Laplace transform method for the solution of semi-infinite and finite strip problem in stress analysis // Quarter. J. Mech. Appl. Math. – 1963. – 16. – P. 413–429.
4. Benth J. P., Gregory R. D., Gladwell I. The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate // J. Elast. – 1983. – 13. – P. 185–206.
5. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Трансформация энергии падающей волны при отражении от заземленного торца полуполосы // Прикл. мех. – 1991. – 27, N 5. – С. 77–82.
6. Гетман И. П., Лисицкий О. Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // ПММ. – 1998. – 52, N 6. – С. 1044–1048.
7. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Лапина О. Н. Дифракция нормальных мод в составных и ступенчатых упругих волноводах // ПММ. – 1998. – 62, N 2. – С. 297–303.
8. Гомилко А. М., Городецкая Н. С., Мелешко В. В. Продольные волны Лэмба в полубесконечном упругом слое // Прикл. мех. – 1991. – 27, N 6. – С. 53–59.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
10. Боджи Д. Б. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора // Труды амер. общества инж.-механиков. Сер. Е. – 1971. – 38, N 2. – С. 87–96.