

УДК 534.24+534.26

АКУСТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С ЧАСТИЧНО ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

И. Ю. ГОНЧАРОВА

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 28.09.99

С помощью метода частичных областей дано математическое описание модели распространения звука в многоступенчатом резонаторе с частично проницаемыми стенками, акустическое поле в котором возбуждается плоским излучателем, колеблющимся по гармоническому закону. Исследовано поведение частоты первого резонанса такого резонатора в зависимости от геометрических и физических параметров на примере простейших резонаторов плоской и цилиндрической формы. Описана зависимость резонансных свойств от количества ступеней. Рассмотрен пример аппроксимации сложной многоступенчатой структуры простым резонатором.

За допомогою метода часткових областей дано математичний опис моделі розповсюдження звуку в багатоступінчастому резонаторі з частково проникними стінками, акустичне поле в якому збуджується плоским випромінювачем, що коливається по гармонічному закону. Досліджено поведінку частоти першого резонанса такого резонатора в залежності від геометричних та фізичних параметрів на прикладі найпростішого резонатора плоскої та циліндричної форми. Описано залежність резонансних властивостей від кількості сходинок. Розглянуто приклад апроксимації складної багатоступінчастої структури за допомогою простого резонатора.

By method of partial domains a mathematical description of the wave propagation model has been presented for a multistep resonator with partially permeable walls, acoustical field in which is excited by a plane radiator oscillating according to the harmonic dependence. Behavior of the first resonance frequency depending on geometrical and physical parameters for considered resonator has been investigated on an example of the simplest plane and circular resonators. A dependence of resonance properties from the number of steps has been described. An example of an approximation of complex multistep structure with a simple resonator has been considered.

ВВЕДЕНИЕ

Акустические резонаторы уже на протяжении длительного времени используются в различных областях физики и техники. Обычно резонатор представляет собой резонансную полость, соединенную с внешней средой с помощью горла. Одним из основных акустических параметров резонатора является частота его резонанса, зависящая от геометрических размеров резонансной полости и горла.

Резонансные свойства подобных структур замечены давно и использовались как для усиления, так и для поглощения звука. Начиная с античных времен, резонаторы применялись в архитектуре для улучшения акустики строений. Например, в храмах древней Руси для усиления звука в стены и своды встраивались пустотелые конструктивные элементы (так называемые голосники [1]), являющиеся, по сути, акустическими резонаторами. В современной архитектуре для создания условий эффективного поглощения звука при облицовке стен применяют специальные резонансные звукопоглощающие материалы, а в системах вентиляции и кондиционирования – специальные резонансные глушители шума [2]. Кроме того, в качестве глушителей шума резонансные конструк-

ции применяются в автомобилях и, даже, в стрелковом оружии [3]. Гельмгольц использовал частотные особенности резонатора для экспериментального доказательства наличия гармоник в сложных сигналах [4]. Используя резонаторы с различными геометрическими параметрами, он получил прототип современных анализаторов частотного спектра. На сегодняшний день резонаторы находят применение не только в акустике, но и в радиотехнике [5].

Рэлей одним из первых предложил простую формулу для расчета резонансной частоты, согласно которой частота зависит от площади и длины горла, объема резонансной полости, а также от скорости звука в среде, заполняющей резонатор [6]. Дальнейшие исследования резонаторов (см. работу [7] и библиографию в ней) были направлены на выяснение влияния различных факторов, в первую очередь размеров и формы резонансной полости и горла, на частоту резонанса. Рассматривалось также влияние резонатора, расположенного в стенках волновода, на поток акустической энергии в нем.

В данной статье представлена общая теория расчета распространения звука в резонансных структурах сложной ступенчатой формы с произвольным количеством ступеней и с произвольны-

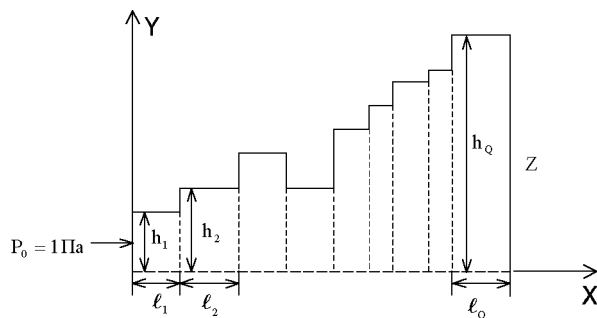


Рис. 1. Пример многоступенчатой резонансной структуры (общая постановка задачи)

ми их размерами. Кроме того, в отличие от обычного резонатора с идеальными стенками, в нашей задаче “дно” резонатора (т. е. стенка, противоположная его горлу) обладает неким конечным импедансом, отличным от импеданса среды, заполняющей резонатор. Таким образом, рассматриваемая структура представляет собой резонатор с частично проницаемыми стенками.

Для математического описания поля в резонаторе такой конфигурации использовался метод частичных областей. Суть этого метода состоит в том, что вся область существования звукового поля в резонаторе сложной геометрии разбивается на отдельные подобласти простой формы, для каждой из которых затем строится решение уравнения Гельмгольца. После этого производится сшивание полей на границах выделенных областей. Нам предстоит выяснить основные закономерности распространения звука в таких структурах на примере простейших конфигураций.

Простейшие резонаторы такого типа можно обнаружить в различных устройствах. Например, ступенчатые резонансные структуры используются при создании на базе электретных микрофонов датчиков для регистрации шумов дыхания с поверхности грудной клетки человека [8]. С помощью аппроксимации ступенчатыми областями можно моделировать различные резонансные конструкции более сложной геометрии, что имеет большое значение, например, для архитектуры [9]. Подобная ступенчатая конструкция может быть использована, например, для моделирования прохождения звука по бронхиальному дереву. Такое моделирование допустимо для области низких частот, на которых можно пренебречь разветвлением бронхов, и учитывать только длину и совокупный радиус каждого бронхиального поколения, используя модель Вейбеля [10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о распространении звука в структуре, изображенной на рис. 1. Полагаем, что внутри она заполнена некоторой средой с акустическими параметрами ρ и c . Стенки резонатора являются абсолютно жесткими, за исключением его “дна”, которое обладает неким конечным импедансом Z . Звуковое поле создается расположенным слева плоским излучателем, который излучает плоскую гармоническую волну. В дальнейшем параллельно будем рассматривать случаи, когда боковые стенки резонансной структуры представляют собой плоскости (плоская задача) и когда они являются цилиндрами (цилиндрическая задача). По сути дела, такой резонатор можно трактовать как волновод конечных размеров и, следовательно, рассматривать его характеристики с точки зрения волноводного распространения звука.

Характеристики гармонического звукового поля внутри такой структуры определяются через функцию потенциала скоростей Ψ , удовлетворяющую уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа; $k = \omega/c$ – волновое число; ω – частота гармонического возбуждения (здесь и далее временной множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем). Как уже говорилось, стенки резонатора являются абсолютно жесткими, т. е. производная по нормали от потенциала скорости на них равна нулю:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_s = 0. \quad (2)$$

Расположим координатные оси как показано на рис. 1. Применяя метод частичных областей, всю область существования звукового поля разобьем на Q областей. При этом h_q – половина высоты (радиус) области, ℓ_q – ее длина, а $q = 1 \dots Q$ – номер области. Кроме того, обозначим

$$L_q = \sum_{r=1}^q \ell_r.$$

Тогда потенциал колебательной скорости для каждой из областей можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_q = & \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,q} D(\alpha_{n,q} y) e^{ik_{n,q}(x-L_q-\ell_1)} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q} D(\alpha_{n,q} y) e^{ik_{n,q}(x-L_q)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $k_{n,q} = \sqrt{k^2 - \alpha_{n,q}^2}$,

$$D(\alpha_{n,q}y) = \begin{cases} \cos(\alpha_{n,q}y) & \text{— для плоской задачи,} \\ J_0(\alpha_{n,q}y) & \text{— для цилиндрич. задачи.} \end{cases}$$

Для плоской задачи $\alpha_{n,q} = (n\pi)/h_q$, а для цилиндрической их значения находятся из уравнения

$$\frac{\partial J_0(\alpha_{n,q})}{\partial y} \Big|_{y=h_q} = -\alpha_{n,q} J_1(\alpha_{n,q}h_q) = 0,$$

первые пять корней которого записаны ниже:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,q}h_q &= 0, \\ \alpha_{2,q}h_q &= 3.832, \\ \alpha_{3,q}h_q &= 7.016, \\ \alpha_{4,q}h_q &= 10.173, \\ \alpha_{5,q}h_q &= 13.324. \end{aligned}$$

Здесь q – номер области; n – номер моды. Формула (3) – совокупность выражений, каждое из которых является общим представлением для потенциала скорости в области с номером q , позволяющим выполнить граничные условия на границах и условия сопряжения между областями. В данной задаче условия сопряжения выглядят следующим образом:

$$\left. \Psi_q \right|_{x=L_q} = \left. \Psi_{q+1} \right|_{x=L_q}, \quad \begin{cases} 0 < y < h_q & \text{при } h_q < h_{q+1}, \\ 0 < y < h_{q+1} & \text{при } h_q > h_{q+1}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_q}{\partial x} \right|_{x=L_q} = \left. \frac{\partial \Psi_{q+1}}{\partial x} \right|_{x=L_q}, \quad \begin{cases} 0 < y < h_q & \text{при } h_q < h_{q+1}, \\ 0 < y < h_{q+1} & \text{при } h_q > h_{q+1}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_q}{\partial x} &= 0, \quad h_{q+1} < y < h_q \quad \text{при } h_q > h_{q+1}, \\ \frac{\partial \Psi_{q+1}}{\partial x} &= 0, \quad h_q < y < h_{q+1} \quad \text{при } h_q < h_{q+1}, \end{aligned}$$

$$q = 1 \dots Q - 1.$$

Кроме того, необходимо потребовать выполнения граничных условий в плоскости расположения излучателя и на “дне” резонатора. Например, пусть амплитуда давления на поверхности плоского излучателя, расположенного в сечении $x=0$, равна

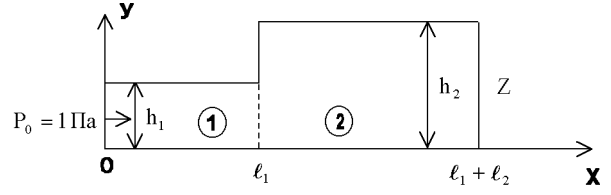


Рис. 2. Схема простейшего резонатора, состоящего из двух областей

P_0 . Если учесть, что согласно введенным обозначениям полная длина резонатора равна L_Q , то граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} -i\omega\rho\Psi_0 \Big|_{x=0} &= P_0, \\ (-i\omega\rho\Psi_Q) / \left(-\frac{\partial \Psi_Q}{\partial x} \right) \Big|_{x=L_Q} &= Z. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая условия сшивания (4), (5) и граничные условия (6), получаем систему, состоящую из функциональных уравнений, количество которых равно $2Q$. Воспользовавшись свойством ортогональности функций $\cos(\alpha_{n,q}y)$ или $J_0(\alpha_{n,q}y)$, $n=0, 1, 2, \dots$, преобразуем эту систему в систему, состоящую из бесконечного числа линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов $A_{n,q}$ и $B_{n,q}$. На практике подобные системы решаются методом редукции, то есть ограничиваются неким числом учитываемых мод N . Тогда количество уравнений в редуцированной системе будет составлять $2NQ$. Реализовать решение такой системы можно с помощью компьютера.

Исследуем некоторые свойства резонаторов на примере их простейших конфигураций. Пусть $Q=2$, т.е. имеем обыкновенный резонатор, у которого горло – это первая область, а резонансная полость – это вторая область. Такой резонатор изображен на рис. 2. Полагаем, что давление, прикладываемое на поверхности плоского излучателя в сечении $x=0$ равно $P_0=1$ Па. Кроме того, будем полагать, что высоты (радиусы) этих областей малы по сравнению с длиной волны, так что можно учитывать только одну распространяющуюся моду – нулевую.

Ниже даны формулы для плоской и цилиндрической задачи, описывающие давление в сечении $x=l_1+l_2$, т.е. на “дне” резонатора, импеданс излучения структуры в сечении $x=0$ (действительная и мнимая части) и акустическая мощность в

сечении $x = \ell_1 + \ell_2$:

$$P_{\text{пл}} \Big|_{x=\ell_1+\ell_2} = \frac{1-\mu}{\sqrt{\Delta_1}}, \quad (7)$$

$$P_{\text{цил}} \Big|_{x=\ell_1+\ell_2} = \frac{1-\mu}{2\pi\sqrt{\Delta_2}}, \quad (8)$$

$$\text{Re } Z_{\text{пл}} \Big|_{x=0} = \frac{2\alpha(1-\mu^2)}{2\Delta_3}, \quad (9)$$

$$\text{Re } Z_{\text{цил}} \Big|_{x=0} = \frac{2\alpha(1-\mu^2)}{2\Delta_4}, \quad (10)$$

$$\text{Im } Z_{\text{пл}} \Big|_{x=0} = \frac{\Delta_5}{2\Delta_3}, \quad (11)$$

$$\text{Im } Z_{\text{цил}} \Big|_{x=0} = \frac{\Delta_6}{2\Delta_4}, \quad (12)$$

$$W_{\text{пл}} \Big|_{x=\ell_1+\ell_2} = \frac{(1-\mu)^2}{2\rho c \Delta_1}, \quad (13)$$

$$W_{\text{цил}} \Big|_{x=\ell_1+\ell_2} = \frac{(1-\mu)^2}{2\rho c \Delta_2}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & (1+\mu^2)(1-\sin^2 k\ell_1(1-\alpha^2)) + \\ & + 2\mu(\alpha \sin 2k\ell_1 \sin 2k\ell_2 - \\ & - \cos 2k\ell_2(1-\sin^2 k\ell_1(1+\alpha^2))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & (1+\mu^2)(1-\sin^2 k\ell_1(1-\alpha^4)) + \\ & + 2\mu(\alpha^2 \sin 2k\ell_1 \sin 2k\ell_2 - \\ & - \cos 2k\ell_2(1-\sin^2 k\ell_1(1+\alpha^4))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 = & (1+\mu^2)(1-\cos^2 k\ell_1(1-\alpha^2)) - \\ & - 2\mu(\alpha \sin 2k\ell_1 \sin 2k\ell_2 + \\ & + \cos 2k\ell_2(1-\cos^2 k\ell_1(1+\alpha^2))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 = & (1+\mu^2)(1-\cos^2 k\ell_1(1-\alpha^4)) - \\ & - 2\mu(\alpha^2 \sin 2k\ell_1 \sin 2k\ell_2 + \\ & + \cos 2k\ell_2(1-\cos^2 k\ell_1(1+\alpha^4))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_5 = & (1+\mu^2)(1-\alpha^2) \sin 2k\ell_1 - \\ & - 2\mu((1+\alpha^2) \sin 2k\ell_1 \cos 2k\ell_2 + \\ & + 2\alpha \cos 2k\ell_1 \sin 2k\ell_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_6 = & (1+\mu^2)(1-\alpha^4) \sin 2k\ell_1 - \\ & - 2\mu((1+\alpha^4) \sin 2k\ell_1 \cos 2k\ell_2 + \\ & + 2\alpha^2 \cos 2k\ell_1 \sin 2k\ell_2). \end{aligned}$$

При этом в соотношениях (7)–(14) введены следующие параметры:

$$\alpha = \frac{h_2}{h_1}, \quad (15)$$

$$\mu = \frac{\rho c - Z}{\rho c + Z}. \quad (16)$$

Отметим, что в случае учета только одной моды, все характеристики (формулы (7)–(14)) не зависят от конкретных значений h_1 и h_2 , а зависят только от их отношения α (15). В рамках данной статьи ограничимся рассмотрением влияния геометрических размеров областей и параметра μ на значение частоты первого максимума по давлению в сечении $x = \ell_1 + \ell_2$ или, иными словами, будем рассматривать частоту первого резонанса для данного резонатора. Кроме того, будем полагать, что Z – действительная величина ($Z = \rho_1 c_1$). В нашем случае, первый максимум по давлению зависит от α , μ , ℓ_2/ℓ_1 и от типа рассматриваемой задачи (плоская или цилиндрическая). Если принять $\ell_1 = \ell_2$, то значение частоты первого резонанса можно рассчитать по формулам (для плоской задачи и для цилиндрической соответственно):

$$\begin{aligned} f_{p_{\text{пл}}} &= \frac{c \arccos(\text{Re } \sqrt{F_1})}{\pi L_Q}, \\ f_{p_{\text{цил}}} &= \frac{c \arccos(\text{Re } \sqrt{F_2})}{\pi L_Q}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{(1+\mu^2)(1-\alpha^2) + 2\mu(4\alpha + 1 + 3\alpha^2)}{8\mu(1+\alpha)^2}; \\ F_2 &= \frac{(1+\mu^2)(1-\alpha^4) + 2\mu(4\alpha^2 + 1 + 3\alpha^4)}{8\mu(1+\alpha^2)^2}; \end{aligned}$$

$L_Q = \ell_1 + \ell_2$, а α и μ находят из формул (15) и (16). При $\mu = -1$, что соответствует абсолютно жесткому “дну” резонатора, F_1 и F_2 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\alpha}{1+\alpha}, \\ F_2 &= \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \end{aligned}$$

соответственно.

2. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим случай, когда $\ell_1 = \ell_2$ (см. формулы (17)). Полагаем, что внутри резонатор заполнен воздухом ($\rho = 1.205 \text{ кг/м}^3$, $c = 343.1 \text{ м/с}$), а

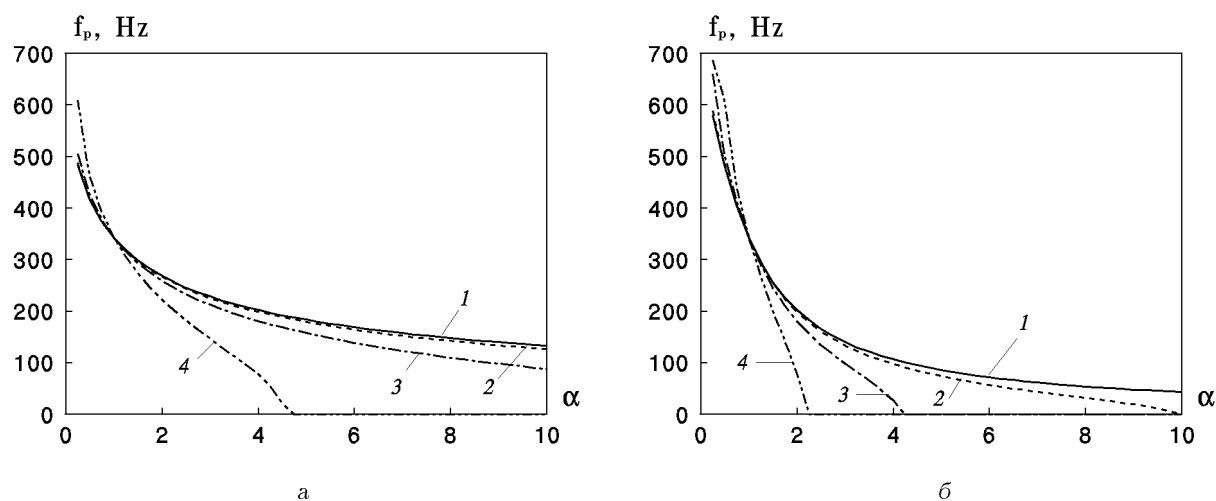


Рис. 3. Зависимости частоты первого максимума по давлению в сечении $x = \ell_1 + \ell_2$ от параметра α при $\ell_1/\ell_2 = 1$, $\ell_1 + \ell_2 = 0.25$ м:

а – для плоской задачи; б – для цилиндрической задачи;
1 – $\mu = -1$; 2 – $\mu = -0.75$; 3 – $\mu = -0.5$; 4 – $\mu = -0.25$

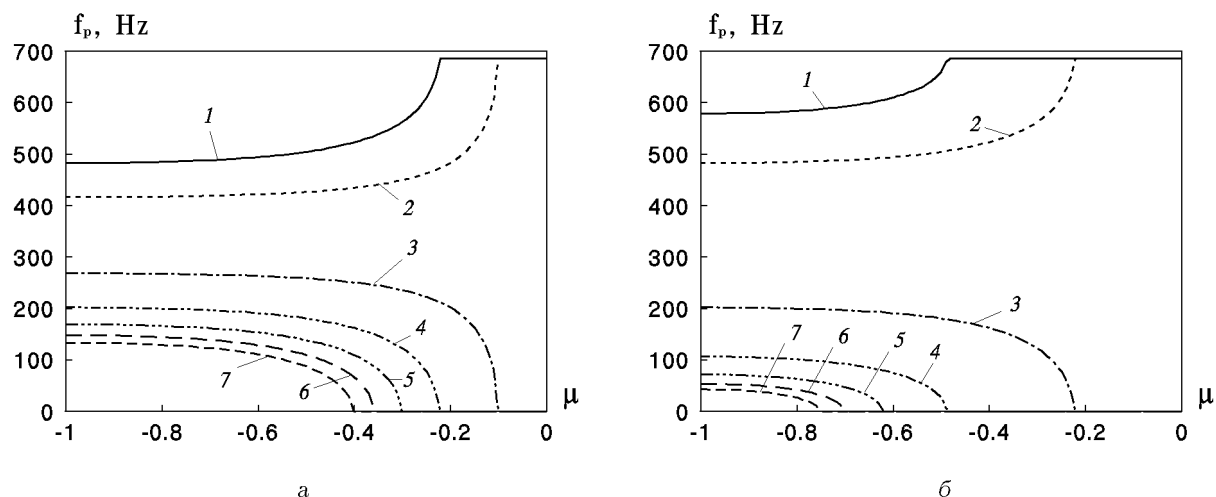


Рис. 4. Зависимости частоты первого максимума по давлению в сечении $x = \ell_1 + \ell_2$ от параметра μ при $\ell_1/\ell_2 = 1$, $\ell_1 + \ell_2 = 0.25$ м:

а – для плоской задачи; б – для цилиндрической задачи;
1 – $\alpha = 0.25$; 2 – $\alpha = 0.5$; 3 – $\alpha = 2$; 4 – $\alpha = 4$; 5 – $\alpha = 6$; 6 – $\alpha = 8$; 7 – $\alpha = 10$

$L_Q = 0.25$ м. Графики, отражающие зависимость частоты первого резонанса от α для плоской и для цилиндрической задачи представлены на рис. 3. На них четко прослеживается основная особенность резонансных структур – понижение частоты резонанса с ростом α . Действительно, с увеличением α увеличивается объем резонансной полости, а, согласно формуле, приведенной в [6], частота резонанса у резонатора обратно пропорциональна квадратному корню из объема резонансной полости. Следовательно, с увеличением объема частота резонанса падает. С увеличением μ ,

т.е. при смягчении “дна” резонатора, это падение становится все более резким. Кроме того, для цилиндрического резонатора частота первого резонанса падает быстрее, чем для плоского. При $\alpha = 1$ частота резонанса рассматриваемой структуры равна частоте резонанса обычного классического волновода длины L_Q , ограниченного с обеих сторон. При $\alpha < 1$ частота резонанса рассматриваемой структуры больше частоты резонанса простого волновода, а при $\alpha > 1$ – меньше ее.

На рис. 4 даны зависимости частоты первого резонанса по давлению от параметра μ так-

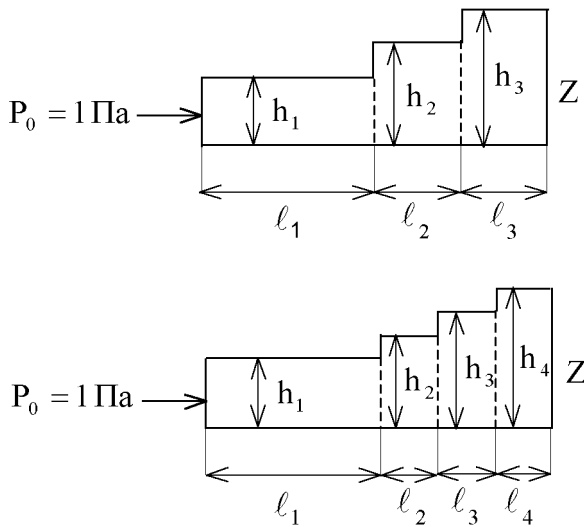


Рис. 5. Схемы резонаторов более сложной формы, состоящих из трех и четырех областей

же для плоской и для цилиндрической задачи. Как уже отмечалось, значение $\mu = -1$ эквивалентно расположению в сечении $x = \ell_1 + \ell_2$ абсолютно жесткой стенки, а $\mu = 0$ означает, что “дно” отсутствует. Как видно из графиков, в рассматриваемом диапазоне $\alpha \leq 10$ при значениях $-1 < \mu < -0.6$ (или $4\rho c < Z < \infty$) для плоской задачи и при $-1 < \mu < -0.8$ (или $9\rho c < Z < \infty$) для цилиндрической задачи частота резонанса остается практически неизменной. Далее, начиная с некоторого значения μ , которое тем выше, чем ближе значение параметра α к 1, наблюдается достаточно резкий спад частоты резонанса до нуля при $\alpha > 1$ или резкое возрастание частоты резонанса до значения, равного $c_b/2LQ$, при $\alpha < 1$. То есть, при “смягчении дна” резонатора, влияние его импеданса становится довольно существенным.

Проверим, как будет вести себя система при добавлении ступенек (рис. 5). Расчетные формулы, аналогичные выражениям (7) – (14), не приводятся вследствие их громоздкости.

Для упрощения полагалось, что длина ℓ_1 , высота h_1 и LQ остаются неизменными для резонаторов обоих типов, изображенных на рис. 5, и равны размерам резонатора, изображенного на рис. 2. Кроме того, в случае наличия трех областей мы принимали, что $\ell_2 = \ell_3$, $h_2 = (h_1 + h_3)/2$, а в случае наличия четырех – $\ell_2 = \ell_3 = \ell_4$, $h_2 = (h_1 + h_3)/2$, $h_3 = (h_2 + h_4)/2$. Высота последней области оставалась фиксированной для обоих типов рассматриваемых резонаторов и равнялась высоте второй области простейшего резонатора (см. рис. 2). Как

показали исследования, добавление ступенек повышает частоту резонанса при $\alpha > 1$ и $\mu \simeq -1$ или понижает при $\alpha < 1$ и $\mu \simeq -1$ (параметр α в данном случае является отношением высоты последней области к высоте первой).

Добавление ступенек можно интерпретировать как изменение объема второй области на рис. 2. Если сравнить два резонатора, которые будут отличаться только объемом полости, то очевидно что отношение частот резонанса для них будет обратно пропорционально квадратному корню из отношения объемов полостей:

$$\frac{f_{p2}}{f_{p1}} = \sqrt{\frac{V_1}{V_2}}. \quad (18)$$

Тогда, согласно уравнению (18), частоту первого резонанса для таких структур с числом областей более двух можно приближенно оценить по формуле

$$f_{p_n} \simeq f_{p_{исх}} \sqrt{\frac{V_{исх}}{\sum_{r=2}^n V_r}}, \quad (19)$$

где $V_{исх}$ и $f_{p_{исх}}$ – объем второй области и частота резонанса соответственно для простейшего исходного резонатора (см. рис. 2); f_{p_n} – частота резонанса структуры с числом областей $n > 2$; V_r – объем области с номером $r \geq 2$. Ясно, что добавление ступеней уменьшает объем при $\alpha > 1$ и увеличивает при $\alpha < 1$. Ниже записаны формулы, по которым можно приближенно рассчитать частоту первого резонанса по давлению для структур с тремя – четырьмя областями рассматриваемой нами конфигурации. Итак, для плоской задачи

$$f_{p3} = f_{p_{исх}} \sqrt{\frac{4\alpha}{1+3\alpha}}, \quad (20)$$

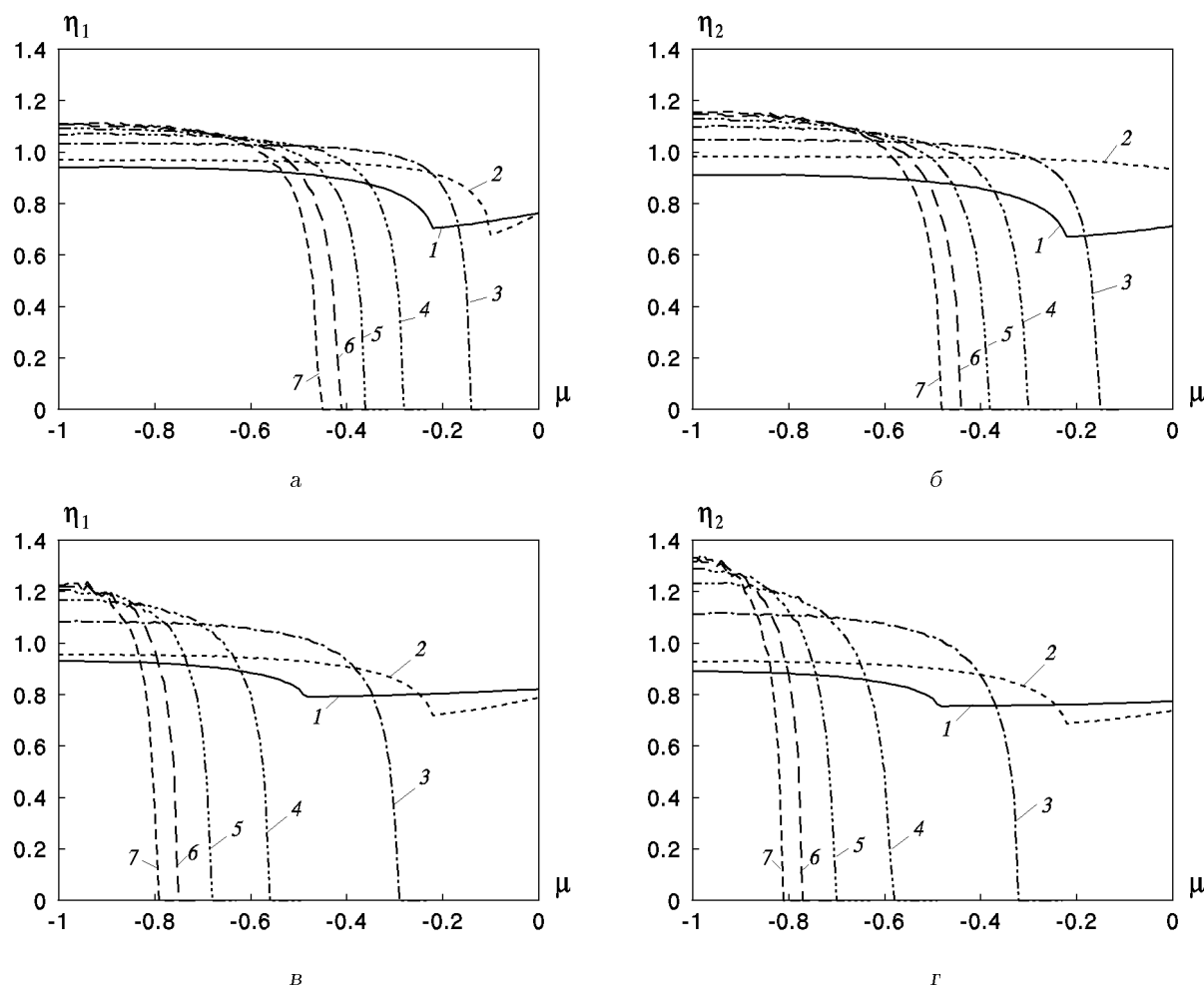
$$f_{p4} = f_{p_{исх}} \sqrt{\frac{3\alpha}{1+2\alpha}},$$

а для цилиндрической –

$$f_{p3} = f_{p_{исх}} \sqrt{\frac{8\alpha^2}{1+2\alpha+5\alpha^2}}, \quad (21)$$

$$f_{p4} = f_{p_{исх}} \sqrt{\frac{27\alpha^2}{5+8\alpha+14\alpha^2}},$$

где α – отношение высоты (радиуса) последней области к высоте (радиусу) первой. Применять эти формулы следует при $\mu \simeq -1$ и $\alpha > 1$, поскольку это наиболее соответствует резонатору с идеальными стенками, для которого была выведена формула Рэлея [6]. Только в этом случае погрешность вычисления частоты не превысит 5–7 %.

Рис. 6. Зависимости отношений частот η_1 и η_2 от параметра μ :

а, б – для плоской задачи; в, г – для цилиндрической задачи;
 1 – $\alpha = 0.25$; 2 – $\alpha = 0.5$; 3 – $\alpha = 2$; 4 – $\alpha = 4$; 5 – $\alpha = 6$; 6 – $\alpha = 8$; 7 – $\alpha = 10$

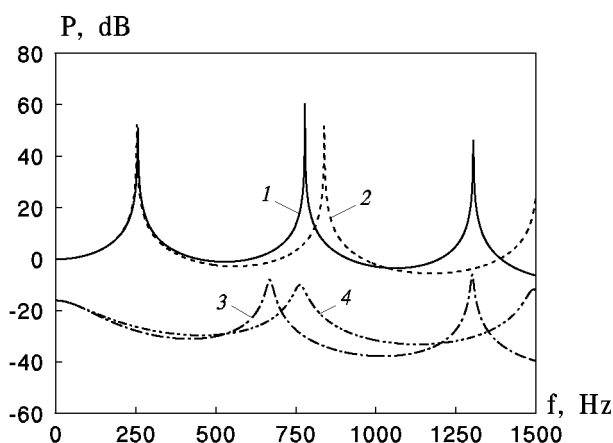
При этом частота, рассчитанная по приведенным формулам, несколько превышает частоту, рассчитанную с использованием точных формул (4) – (6).

На рис. 6 даны графики коэффициентов $\eta_1 = f_{p3}/f_{p_{\text{нск}}}$ и $\eta_2 = f_{p4}/f_{p_{\text{нск}}}$ в зависимости от μ для плоской и для цилиндрической задачи, которые показывают во сколько раз отличаются резонансные частоты для рассматриваемых структур при различных значениях параметра α . Как видим, начиная с некоторого значения μ , которое зависит от конкретного значения $\alpha > 1$, отношение частот перестает быть больше единицы. Это означает, что частота резонанса у рассматриваемых структур с количеством областей более двух оказывается ниже частоты резонанса структуры, состоящей из двух областей, т.е. пропорциональность отношению объемов согласно формуле (19) больше не выполняется.

В самом начале обсуждения для упрощения расчетов мы учитывали только одну моду. Однако, как показали исследования, даже если размеры областей таковы, что распространяющейся является только нулевая мода, при более строгой оценке, то есть при учете большего числа мод, наблюдается понижение частоты первого резонанса по давлению. Это снижение частоты тем сильнее, чем больше α и μ . Кроме того, оно зависит от типа рассматриваемой задачи (плоская или цилиндрическая). Так, в диапазоне $0.1 \leq L_Q \leq 0.5$ м и $0.01 \leq h_1 \leq 0.05$ м для того, чтобы погрешность вычислений не превышала 10 %, рекомендуется учитывать в диапазоне $0.25 \leq \alpha \leq 2$ для плоской задачи одну–две моды и до трех мод для трубы, а в диапазоне $\alpha \geq 2$ – до пяти мод для плоской задачи и максимум до восьми мод в случае цилиндрической задачи.

Таблица. Геометрические размеры областей ступенчатой резонансной структуры, соответствующие модели Вейбеля [10]

$N_{\text{областей}}$	ℓ_q , см	h_q , см
1	12	0.9
2	4.76	0.8625
3	1.9	0.8275
4	0.76	0.795
5	1.27	0.89
6	1.07	0.99
7	0.9	1.12
8	0.76	1.28
9	0.64	1.485
10	0.54	1.745
11	0.46	2.07
12	0.39	2.4925
13	0.33	3.035
14	0.27	3.745
15	0.23	4.68
16	0.2	5.92
17	0.165	7.58

Рис. 7. Давление в сечении $x = L_Q$:

1 – плоская задача, 2 области;
 2 – плоская задача, 17 областей;
 3 – цилиндрическая задача, 2 области;
 4 – цилиндрическая задача, 17 областей

Рассмотрим ступенчатый резонатор с размерами областей, приведенными в таблице. Они соответствуют модели воздухоносных путей (кондуктивная зона), предложенной Вейбелем [10]. Здесь $Z = \rho_1 c_1$, где $\rho_1 = 300 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 30 \text{ м/с}$ – параметры, характерные для паренхимы легких. Параллельно произведем расчет для структуры, состоящей из двух областей, размеры которых $h_1 = 0.009 \text{ м}$, $\ell_1 = 0.2578 \text{ м}$, $h_2 = 0.0758 \text{ м}$, $\ell_2 = 0.009 \text{ м}$. Размеры подобраны таким обра-

зом, чтобы наиболее точно в объемном отношении отразить сложную многоступенчатую структуру, соответствующую размерам, приведенным в таблице. Как видно из рис. 7, как для плоской, так и для цилиндрической задачи при учете двух и семнадцати областей отличие характеристик давления, рассчитанных в сечении $x = L_Q$, незначительно, особенно на низких частотах. Это позволяет сделать вывод о том что, частоту резонанса сложной многоступенчатой структуры можно с удовлетворительной точностью оценить, воспользовавшись приведенными выше формулами для структуры, состоящей из двух областей, если ее геометрические размеры подобраны соответствующим образом.

ВЫВОДЫ

Сформулирована математическая модель для ступенчатых резонансных структур с произвольными размерами. На базе метода частичных областей предложена расчетная схема для расчета распространения звука в таких резонаторах.

Получено асимптотическое решение задачи и на этой основе даны приближенные формулы для оценки частоты резонанса, которые можно использовать в конкретных технических расчетах.

Выяснено, что в ступенчатом резонаторе на частоту первого резонанса наибольшее влияние оказывают геометрические размеры областей (ступенек), из которых он состоит. При этом самым важным параметром является отношение высоты (радиуса) последней области к высоте (радиусу) первой. С увеличением этого параметра наблюдается снижение частоты резонанса.

Показано, что в рассматриваемом диапазоне отношения высот (радиусов) областей $\alpha \geq 10$ частота резонанса слабо зависит от импеданса “дна” резонатора при $4\rho c < Z < \infty$ для плоской задачи и при $9\rho c < Z < \infty$ для цилиндрической задачи (ρc – сопротивление среды, заполняющей резонатор). При других значениях Z влияние импеданса “дна” становится довольно существенным, и описанные закономерности нарушаются.

Установлено, что некоторые многоступенчатые структуры, состоящие из большого числа областей, можно аппроксимировать структурами, состоящими из меньшего количества областей (например, из двух областей), подобрав их размеры таким образом, чтобы наиболее точно отразить исходную конфигурацию и объемное соотношение. Это позволяет избежать сложных громоздких вычислений и пользоваться упрощенными формулами, приведенными в данной статье. При этом от-

личие полученных результатов невелико, и позволяет достаточно точно проследить характерные особенности резонаторов такого типа.

1. Большая советская энциклопедия. Том 11.– М.: БСЭ, 1952.– 632 с.
2. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука.– М.: Изд-во МГУ, 1960.– 335 с.
3. Förster T., Goepfert P. Silencer for firearms // J. Acoust. Soc. Amer.– 1993.– **93**, N 6.– P. 3537.
4. Белявский А. Г. Теория звука в приложении к музыке.– М.-Л.: Госиздат, 1925.– 240 с.
5. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации.– М.: Сов. радио, 1966.– 432 с.
6. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука. Том 2.– М.: ГИТТЛ, 1955.– 503 с.
7. Selamet A., Radavich M., Dickey N. S., Novak J. M. Circular concentric Helmholtz resonators. // J. Acoust. Soc. Amer.– 1997.– **101**, N 1.– P. 41–51.
8. Wodicka G. R., Kraman S. S., Zenk G. M., Pasterkamp H. Measurement of respiratory acoustic signals. // Chest.– 1994.– **106**, N 4.– P. 1140–1144.
9. Вовк І. В., Грінченко В. Т., Макаренков А. П., Осипчук А. М., Трохименко М. П. Акустика храмів Київської Русі. // Акуст. вісн.– 1998.– 1, N 1.– С. 4–9.
10. Вейбель Э. Р. Морфометрия легких человека.– М.: Медицина, 1970.– 175 с.