

УДК 533.6.013.42

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ НЕСИММЕТРИЧНЫЙ УДАР ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА О ПОВЕРХНОСТЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. ГАВРИЛЕНКО

Украинский транспортный университет, Киев

Получено 5.01.2000 ♦ Пересмотрено 26.01.2000

Рассмотрена плоская задача вертикального удара твердого параболического цилиндра о поверхность сжимаемой жидкости, когда ось симметрии контура цилиндра не совпадает с нормалью в точке его касания невозмущенной поверхности жидкости. На основе методов интегральных преобразований Лапласа по времени, разделения переменных, теоремы о свертке оригиналов двух функций, разложения в ряды Фурье по полной тригонометрической системе функций, решение нестационарной смешанной краевой задачи механики сплошной среды с наперед неизвестной изменяющейся границей сводится к решению бесконечной системы линейных интегральных уравнений Вольтерры второго рода относительно коэффициентов разложения гидродинамического давления в ряд Фурье. В численном примере для погружающихся параболических цилиндров с различными массами и начальными углами асимметрии приведены зависимости от времени гидродинамической силы, момента реакции, угла асимметрии, границ области контакта, а также распределение гидродинамического давления по смоченной поверхности тела.

Розглянуто плоску задачу вертикального удара твердого параболического циліндра об поверхню стислиивої рідини, якщо вісь симетрії контура циліндра не співпадає з нормаллю в точці його дотику незбуреної поверхні рідини. На основі методів інтегральних перетворень Лапласа по часу, розділення змінних, теореми про згортку оригіналів двох функцій, розкладу в ряди Фур'є за повною тригонометричною системою функцій, розв'язок нестационарної змішаної крайової задачі механіки суцільного середовища з наперед невідомою змінною границею зведено до розв'язку нескінченної системи лінійних інтегральних рівнянь Вольєрра другого роду відносно коефіцієнтів розкладу гідродинамічного тиску в ряд Фур'є. У чисельному прикладі для параболических циліндрів, що занурюються, з різними масами і початковими кутами асиметрії наведено залежності від часу гідродинамічної сили, моменту реакції, кута асиметрії, границь області контакту, а також розподіл гідродинамічного тиску на змоченій поверхні тіла.

A plane problem on vertical collision with the surface of a compressible fluid, is considered for case of rigid parabolic cylinder when the axis of its symmetry does not coincide with a normal line in a point of its tangency by unperturbed surface of a fluid. On basis of methods of Laplace integral transforms with respect to time, separation of variables, theorem about convolution of originals of two functions, decomposition in a Fourier series with respect to the complete trigonometric system of functions, the solution of a non-stationary mixed boundary problem of continuum mechanics with beforehand unknown varying boundary is reduced to the solution of infinite system of linear integral Volterra's equations of the second kind with respect to coefficients of decomposition of hydrodynamic pressure in a Fourier series. In the numerical example for submerging parabolic cylinders with different masses and initial angles of asymmetry there are given the time dependences of a hydrodynamic force, moment of response, angle of asymmetry, boundaries of the contact area, and also the distribution of hydrodynamic pressure on a wetted surface of body.

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье решена плоская несимметричная задача вертикального удара о поверхность сжимаемой жидкости бесконечной глубины твердого параболического цилиндра для случая, когда ось симметрии параболы в поперечном сечении цилиндра наклонена к невозмущенной поверхности жидкости. Предполагается, что поверхность тела для жидкости является непроницаемой, а на свободной поверхности жидкости давление постоянно. Движение жидкости описывается волновым уравнением.

В работе получил дальнейшее развитие численно-аналитический метод решения задач удара и проникания затупленных твердых и деформируемых тел в сжимаемую жидкость [1]. Задачи проникания тел в жидкость представляют собой нестационарные смешанные краевые задачи механики сплошной среды с движущейся неизвестной гра-

ницей. Метод позволяет свести решение таких задач, используя методы интегральных преобразований Лапласа по времени, разделения переменных, теорему о свертке оригиналов двух функций, разложения в ряды Фурье по соответствующей системе ортогональных функций, к решению бесконечной системы линейных интегральных уравнений Вольтерры второго рода относительно коэффициентов разложения гидродинамического давления в ряд Фурье.

С помощью данного метода, в частности, решены:

- плоские задачи проникания твердых затупленных тел [2–5], причем для симметричного случая – в [2, 3], для несимметричного случая – в [4, 5] (в [4] рассмотрен проникающий в жидкость тупой несимметричный клин конечной массы, а в [5] – круговой цилиндр со смещенным центром масс);

- плоская симметричная задача проникания тонких упругих круговых цилиндрических оболочек [6–8];
- осесимметричные задачи проникания твердых тел [9, 10] и тонких упругих сферических оболочек [11–13].

Метод позволяет учесть ряд факторов, сопутствующих процессу проникания, а именно:

- встречное движение свободной поверхности жидкости вблизи проникающего тела [8, 10–13];
- возможное нарушение неразрывности контакта жидкости с телом в пределах его смоченной поверхности [2, 3, 6].

Следует отметить, что среди немногочисленных работ, посвященных несимметричному прониканию тел в жидкость, лишь в монографиях [14, 15] рассматривается вертикальный удар о жидкость тела с несимметричным контуром, причем в них приведено решение задачи проникания для тела простой геометрической формы (тупого клина) с постоянной скоростью проникания, т. е. без учета вращательного движения тела около его центра масс.

В данной работе получено решение несимметричной задачи вертикального удара о жидкость для тела более сложной геометрической формы (параболического цилиндра), причем используемый метод позволяет учесть влияние на ход процесса проникания следующих факторов:

- изменяемости скорости проникания для тел конечной массы (предельный случай проникания с постоянной скоростью соответствует прониканию тела бесконечно большой массы);
- вращательного движения контура тела вокруг своего центра масс;
- несимметричности контактирующего с жидкостью контура тела, причем вследствие вращения тела форма контура, вступившего в контакт с жидкостью, в процессе проникания изменяется.

Рассматриваемая краевая задача является в общем случае нелинейной, так как определяемые в каждый момент времени границы области контакта тела с жидкостью зависят от интегральных характеристик (силы реакции со стороны жидкости и момента реакции внешних сил), а они сложным

функциональным образом определяются через искомые величины. В работе при исследовании удара и проникания несимметричных тел в жидкость наиболее информативными и значимыми характеристиками процесса являлись распределение гидродинамического давления по области контакта, временные зависимости гидродинамической силы и момента реакции, а также временные зависимости скорости проникания, угла асимметрии, границ области контакта.

Затронутая в работе проблема ударного взаимодействия твердых и упругих тел с жидкостью в настоящее время остается актуальной в связи с потребностью в исследованиях по прониканию в судостроении (задача слемминга высокоскоростных судов), в современном машиностроении, при изучении приводнения летательных аппаратов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Твердый бесконечно-протяженный параболический цилиндр, двигаясь перпендикулярно поверхности покоящейся жидкости, в некоторый момент $t=0$ достигает этой поверхности и начинает погружаться в жидкость со скоростью $v_0(t)$, причем $v_0(0)=v_0$, где v_0 – начальная скорость проникания. Жидкость предполагается невесомой, баротропной, идеальной сжимаемой. Считаем, что образующая поверхности цилиндра в процессе взаимодействия тела с жидкостью остается параллельной первоначально невозмущенной поверхности жидкости. Контур цилиндра в его поперечном сечении, являющийся квадратичной параболой, считаем несимметричным относительно нормали в точке его касания невозмущенной поверхности жидкости. Вследствие этого обтекание цилиндра жидкостью при погружении носит несимметричный характер, а его движение будет состоять из поступательного перемещения вместе с центром масс и вращательного движения около центра масс.

Введем в полупространстве, занимаемом жидкостью, декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$: оси Ox и Oy направим по невозмущенной поверхности жидкости, причем ось Oy – параллельно образующей поверхности тела, ось Oz – в глубь жидкости. При этом невозмущенная поверхность жидкости совпадет с плоскостью $z=0$. В силу равноправности всех поперечных сечений системы “цилиндр–жидкость” ограничимся рассмотрением движения в одном из сечений – в плоскости xOz .

Задача решается с учетом изменяющейся скорости проникания тела в жидкость, поэтому в дальнейшем будем рассматривать проникающие тела

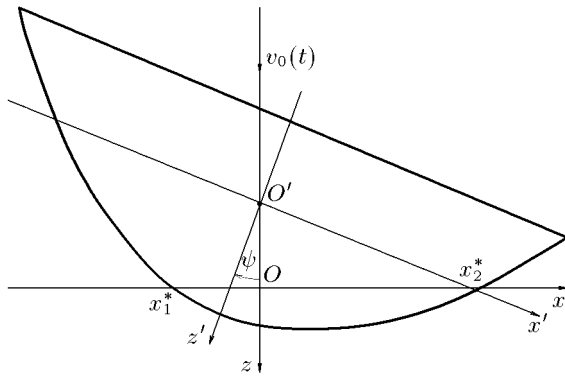


Рис. 1. Схема несимметричного удара параболического цилиндра о поверхность жидкости

конечной погонной массы. В связи с этим ограничим цилиндр сверху плоским основанием, перпендикулярным к оси симметрии контура цилиндра. Тогда сечением погружающегося в жидкость параболического цилиндра в плоскости xOz будет параболический сегмент. Основание цилиндра подбираем исходя из геометрических свойств данной параболы и погонной плотности материала цилиндра.

Предположим, что погонная плотность материала цилиндра есть функция координат поперечного его сечения, симметричная относительно оси симметрии параболы. Тогда центр масс O' поперечного сечения цилиндра будет находиться на этой оси. Свяжем параболический сегмент с подвижной декартовой прямоугольной системой координат $O'x'z'$: расположим O' на оси Oz , на расстоянии r от вершины параболы, ось $O'x'$ направим параллельно основанию сегмента, ось $O'z'$ – по оси симметрии параболы (рис. 1).

В подвижной системе координат $O'x'z'$ параболический сегмент ограничен параболой и прямой линейным основанием, уравнения которых будут иметь вид

$$z' = r - \frac{(x')^2}{2q}, \quad z' = -r_0$$

соответственно. Здесь q – радиус кривизны данной параболы в ее вершине (при $x'=0$, $z'=r$); r_0 – расстояние основания параболического сегмента от центра масс O' .

Обозначим через $\psi(t)$ угол между положительными направлениями осей Oz и $O'z'$ и назовем его углом асимметрии, причем в начальный момент удара этот угол равен ψ_0 , начальная угловая скорость тела равна $\dot{\psi}_0$. Тогда в системе Oxz декар-

товы координаты центра масс $O'(x_0, z_0)$ в произвольный момент времени t определяются формулами

$$x_0 = 0, \quad z_0 = z^* - \frac{2r + q + (2r - q) \cos 2\psi(t)}{4 \cos \psi(t)}. \quad (1)$$

Здесь z^* – путь, пройденный центром масс за время t при поступательном его движении вертикально вниз по оси Oz со скоростью $v_0(t)$:

$$z^* = \int_0^t v_0(\tau) d\tau. \quad (2)$$

В соотношениях (1) предполагается, что в процессе проникания горизонтальное перемещение центра масс параболического сегмента (в направлении оси Ox) будет пренебрежимо мало, и, следовательно, можно рассматривать поступательное перемещение сегмента вместе с центром масс только как вертикальное перемещение в глубь жидкости. Такое предположение можно обосновать следующими соображениями:

- рассматривается ранний этап процесса проникания в жидкость тел, смоченные поверхности которых сильно затуплены, а глубины проникания малы;
- вследствие слабой искривленности поверхности тела в пределах области контакта проекции давления на ось Ox малы;
- поскольку в постановке задачи используется модель идеальной сжимаемой жидкости (трение между телом и жидкостью отсутствует), то вышеуказанные проекции давления не обуславливают поступательного перемещения сегмента вместе с центром масс в направлении оси Ox .

Границы области контакта тела с жидкостью в произвольный момент времени определяются точками x_1^* и x_2^* пересечения его контура, т.е. параболы, с осью Ox по формулам

$$x_1^* = \frac{-B - \sqrt{D}}{2A}, \quad x_2^* = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A}, \quad (3)$$

где

$$D = B^2 - 4AQ;$$

$$A = \cos^2 \psi(t);$$

$$B = -2 \sin \psi(t) (z_0 \cos \psi(t) + q);$$

$$Q = z_0^2 \sin^2 \psi(t) - 2q (z_0 \cos \psi(t) + r).$$

Исследуется ранний этап процесса ударного взаимодействия твердого тела с акустической средой, отвечающий следующим ограничениям: рассматриваемые скорости погружения тела малы по сравнению со скоростью звука в жидкости C , т.е. $v_0 \ll C$, а глубины погружения тела в жидкость малы по сравнению с его линейными размерами, т.е. $z^* \ll R$, где R – характерный линейный размер поперечного сечения цилиндра, в качестве которого взят радиус кривизны параболы в ее вершине, ($R=q$).

Затупленность тела и малые глубины погружения дают возможность отождествить линейные координаты вдоль поверхностей жидкости и тела, линеаризовать граничные условия и снести их на невозмущенную поверхность жидкости $z=0$.

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{Ct}{R}; & \bar{x} &= \frac{x}{R}; & \bar{z} &= \frac{z}{R}; \\ \bar{V} &= \frac{V}{C}; & \bar{\varphi} &= \frac{\varphi}{CR}; & \bar{p} &= \frac{p}{\rho C^2}; \\ \bar{F} &= \frac{F}{\rho C^2 R}; & \bar{M} &= \frac{M}{\rho C^2 R^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ρ – плотность жидкости, p – давление, V – скорость, F – сила реакции жидкости, M – момент реакции внешних сил, φ – волновой потенциал. Так как в дальнейшем будут использоваться только безразмерные переменные, черточка над ними опускается.

Движение жидкости описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Скорость деформирования поверхности жидкости $V(t, x)$ и гидродинамическое давление $p(t, x)$ связаны с волновым потенциалом φ соотношениями

$$V(t, x) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (6)$$

$$p(t, x) = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0}. \quad (7)$$

Сформулируем граничные условия. Поверхность тела в пределах области контакта предполагается непроницаемой для жидкости:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = v_0(t), \quad x_1^* < x < x_2^*. \quad (8)$$

На свободной поверхности жидкости должно выполняться динамическое условие: давление на ней

постоянно и без ограничения общности считаем его равным нулю:

$$-\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0} = 0, \quad (x < x_1^*) \cup (x > x_2^*). \quad (9)$$

На бесконечности жидкость находится в состоянии покоя:

$$\varphi \rightarrow 0, \quad x^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad (10)$$

Так как до начала взаимодействия тела с жидкостью последняя покоилась, то будем иметь нулевые начальные условия:

$$\varphi|_{t=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (11)$$

При взаимодействии с жидкостью тело осуществляет движение, состоящее из поступательного перемещения вместе с центром масс и вращения около центра масс. Обоснования соотношений (1) позволяют в дальнейшем пренебречь тангенциальными перемещениями центра масс и рассматривать поступательное перемещение тела лишь как его вертикальное движение вглубь жидкости. Вертикальное движение тела в жидкости определяется согласно второго закона Ньютона

$$\mu \dot{v}_0(t) = -F(t), \quad v_0(0) = v_0, \quad (12)$$

где μ – погонная масса тела, отнесенная к ρR^2 ; $F(t)$ – гидродинамическая сила сопротивления прониканию тела со стороны жидкости, которая в линеаризованном виде определяется как интеграл от давления, распределенного по смоченной поверхности тела:

$$F(t) = \int_{x_1^*}^{x_2^*} p(t, x) dx. \quad (13)$$

Вращательное движение параболического сегмента вокруг его центра масс определяется уравнением

$$I_0 \ddot{\psi}(t) = -M(t), \quad \psi(0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0, \quad (14)$$

где I_0 – момент инерции параболического сегмента относительно центра масс, отнесенный к ρR^4 ; $M(t)$ – момент реакции внешних сил относительно центра масс, вычисляемый по формуле

$$M(t) = \int_{x_1^*}^{x_2^*} p(t, x) x dx. \quad (15)$$

Границы области контакта x_1^* , x_2^* при определении момента реакции $M(t)$ по формуле (15), как и при определении гидродинамической силы $F(t)$ по формуле (13), заранее неизвестны и определяются в ходе решения задачи из соотношений (3).

Сформулированная краевая задача является в общем случае нелинейной, так как в соотношениях (13), (15) гидродинамическая сила и момент реакции сложным функциональным образом определяются через искомые величины.

Целью рассматриваемой задачи является определение на раннем этапе процесса ударного взаимодействия параболического цилиндра с жидкостью испытываемых им гидродинамических нагрузок. Последние достигают своих максимальных значений за столь малые с начала удара и погружения временные интервалы, что сопутствующее погружению явление формирования струй на поверхности цилиндра не успевает достаточно развиться и его влиянием на ход процесса пренебрегаем. Следует также остановиться на оценке пределов применимости используемой акустической модели жидкости и метода Вагнера снесения линеаризованных граничных условий на невозмущенную поверхность жидкости.

Использование акустической модели жидкости накладывает ограничение на величину скорости погружения $v_0(t)$ – она должна быть значительно меньше скорости звука в жидкости. В статье [16] показано, что при использовании акустического приближения в диапазоне скоростей погружения $v_0(t) \leq 200$ м/с для воды получены результаты, близкие к экспериментальным. Рассматриваемые в данной работе скорости не выходят за границы этого диапазона.

Линеаризация граничных условий и снесение их, согласно теории Вагнера, на невозмущенную поверхность жидкости накладывает ограничение на глубину погружения z^* и, следовательно, на углы между касательной к поверхности цилиндра и невозмущенной поверхностью жидкости. В монографиях [17, 18] отмечается, что использование теории Вагнера при исследовании процесса погружения в жидкость затупленных тел позволяет получать результаты, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментом, если эти углы не превышают 30° .

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Ограничивая рассмотрение процесса малыми временами, будем искать решение сформулированной задачи для полуполосы $-L \leq x \leq L$, $z \geq 0$. Величина L выбирается из условия, согласно кото-

рому в течение рассматриваемого временного интервала отраженные от боковых граней полуполосы волны не достигают области контакта. При выбранном значении L граничные условия на боковых гранях полуполосы выбираются произвольно. Из соображений удобства разделения переменных, осуществляемого на основе разложения искомых характеристик процесса в ряды Фурье на классическом интервале $[-\pi; \pi]$, ниже выбрано значение $L = \pi$.

В дальнейшем при использовании метода разложения функций в ряды Фурье по полной тригонометрической системе функций для удобства записи будем представлять ряд Фурье в виде

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ f_n^{(1)}(t) \cos nx + f_n^{(2)}(t) \sin nx \right\},$$

$$f_n^{(1)}(t) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, x) \cos nx dx,$$

$$f_n^{(2)}(t) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, x) \sin nx dx,$$

$$k_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \infty, \end{cases}$$

полагая, что коэффициент $f_0^{(2)}(t) \equiv 0$. Раскладываем скорость деформирования поверхности жидкости $V(t, x)$ и гидродинамическое давление $p(t, x)$ в ряды Фурье по $\cos nx$ и $\sin nx$:

$$V(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ V_n^{(1)}(t) \cos nx + V_n^{(2)}(t) \sin nx \right\}, \quad (16)$$

$$p(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ p_n^{(1)}(t) \cos nx + p_n^{(2)}(t) \sin nx \right\}. \quad (17)$$

Применяя к уравнению (5) преобразование Лапласа по времени t с параметром s , получаем в пространстве изображений уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial z^2} - s^2 \varphi^L = 0. \quad (18)$$

Решение уравнения (18), удовлетворяющее условию затухания на бесконечности (10), ищем в виде

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-z\sqrt{s^2+n^2}} \left\{ A_n \cos nx + B_n \sin nx \right\}, \quad (19)$$

где A_n ; B_n – постоянные коэффициенты.

Применяя к выражениям (6), (7) и разложениям (16), (17) преобразование Лапласа и учитывая

соотношения (19), получаем формулу, связывающую коэффициенты $V_n^{(i)L}(s)$ и $p_n^{(i)L}(s)$

$$V_n^{(i)L}(s) = \frac{\sqrt{s^2 + n^2}}{s} p_n^{(i)L}(s), \quad (20)$$

$$n = \overline{0, \infty}, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Тогда по теореме о свертке оригиналов двух функций из соотношений (20) получаем зависимости

$$V_n^{(i)}(t) = p_n^{(i)}(t) + \int_0^t p_n^{(i)}(\tau) f_n(t - \tau) d\tau, \quad (21)$$

$$n = \overline{0, \infty}, \quad i = \overline{1, 2},$$

связывающие коэффициенты $V_n^{(i)}(t)$ и $p_n^{(i)}(t)$. Здесь

$$f_n(t) = \int_0^t \frac{n J_1(n\xi)}{\xi} d\xi,$$

где $J_1(t)$ – цилиндрическая функция Бесселя первого рода первого порядка.

С учетом разложений (16), (17) и соотношений (21) устанавливаем связь между скоростью $V(t, x)$ и давлением $p(t, x)$:

$$V(t, x) = p(t, x) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t \left\{ p_n^{(1)}(\tau) \cos nx + p_n^{(2)}(\tau) \sin nx \right\} \times \right. \quad (22)$$

$$\left. \times f_n(t - \tau) d\tau \right).$$

Удовлетворяя с помощью соотношения (22) граничные условия (8), (9), получаем

$$p(t, x) = H((x - x_1^*)(x_2^* - x)) \left\{ v_0(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t \left\{ p_n^{(1)}(\tau) \cos nx + p_n^{(2)}(\tau) \sin nx \right\} \times \right. \quad (23)$$

$$\left. \times f_n(t - \tau) d\tau \right) \right\},$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, имеющая вид

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Представляя в виде рядов Фурье левую и правую часть выражения (23) и приравнявая коэффициенты при соответствующих косинусах и синусах, по-

лучаем бесконечную систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно коэффициентов $p_n^{(1)}(t)$, $p_n^{(2)}(t)$, ($n = \overline{0, \infty}$):

$$p_n^{(1)}(t) = v_{0n}^{(1)}(t) - \sum_{m=0}^{\infty} \left(\beta_{mn}^{(1)}(x_1^*, x_2^*) \int_0^t p_m^{(1)}(\tau) f_m(t - \tau) d\tau + \right. \quad (24)$$

$$\left. + \beta_{mn}^{(2)}(x_1^*, x_2^*) \int_0^t p_m^{(2)}(\tau) f_m(t - \tau) d\tau \right),$$

$$p_n^{(2)}(t) = v_{0n}^{(2)}(t) - \sum_{m=0}^{\infty} \left(\beta_{mn}^{(3)}(x_1^*, x_2^*) \int_0^t p_m^{(1)}(\tau) f_m(t - \tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + \beta_{mn}^{(4)}(x_1^*, x_2^*) \int_0^t p_m^{(2)}(\tau) f_m(t - \tau) d\tau \right),$$

где

$$v_{0n}^{(1)}(t) = \frac{v_0(t)}{\pi k_n} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \cos nx dx;$$

$$v_{0n}^{(2)}(t) = \frac{v_0(t)}{\pi k_n} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \sin nx dx;$$

$$\beta_{mn}^{(1)}(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \cos mx \cos nx dx;$$

$$\beta_{mn}^{(2)}(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \sin mx \cos nx dx;$$

$$\beta_{mn}^{(3)}(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \cos mx \sin nx dx;$$

$$\beta_{mn}^{(4)}(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{x_1^*}^{x_2^*} \sin mx \sin nx dx.$$

После преобразований коэффициенты $v_{0n}^{(i)}(t)$ ($i = \overline{1, 2}$) и $\beta_{mn}^{(j)}(x_1^*, x_2^*)$ ($j = \overline{1, 4}$) принимают вид

$$v_{0n}^{(i)}(t) = \frac{v_0(t)}{\pi k_n} g_n^{(i)}(x_1^*, x_2^*), \quad (25)$$

$$\beta_{mn}^{(j)}(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{2\pi} q_{mn}^{(j)}(x_1^*, x_2^*), \quad (26)$$

где

$$q_{mn}^{(1)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} x_2^* - x_1^*, & m = n, n = 0, \\ z_1(m), & m \neq n, n = 0, \\ x_2^* - x_1^* + z_1(2m), & m = n, n \neq 0, \\ z_1(m-n) + z_1(m+n), & m \neq n, n \neq 0; \end{cases}$$

$$q_{mn}^{(2)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} 0, & m = n, n = 0, \\ z_2(m), & m \neq n, n = 0, \\ z_2(2m), & m = n, n \neq 0, \\ z_2(m-n) + z_2(m+n), & m \neq n, n \neq 0; \end{cases}$$

$$q_{mn}^{(3)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} 0, & m = n, n = 0, \\ 0, & m \neq n, n = 0, \\ z_2(2m), & m = n, n \neq 0, \\ z_2(m+n) - z_2(m-n), & m \neq n, n \neq 0; \end{cases}$$

$$q_{mn}^{(4)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} 0, & m = n, n = 0, \\ 0, & m \neq n, n = 0, \\ x_2^* - x_1^* - z_1(2m), & m = n, n \neq 0, \\ z_1(m-n) - z_1(m+n), & m \neq n, n \neq 0. \end{cases}$$

$$g_n^{(1)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} x_2^* - x_1^*, & n = 0, \\ z_1(n), & n = \overline{1, \infty}; \end{cases}$$

$$g_n^{(2)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ z_2(n), & n = \overline{1, \infty}; \end{cases}$$

$$z_1(n) = \frac{\sin nx_2^* - \sin nx_1^*}{n};$$

$$z_2(n) = \frac{\cos nx_1^* - \cos nx_2^*}{n};$$

После того, как коэффициенты $p_n^{(i)}(t)$ определены из решения системы (24), коэффициенты $V_n^{(i)}(t)$ определяются по формуле (21), а скорость деформирования поверхности жидкости $V(t, x)$ и гидродинамическое давление $p(t, x)$ – соответственно по формулам (16), (17). Используя соотношения (13) и (17), получаем гидродинамическую силу сопротивления погружению тела в жидкость в виде

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ p_n^{(1)}(t) g_n^{(1)}(x_1^*, x_2^*) + p_n^{(2)}(t) g_n^{(2)}(x_1^*, x_2^*) \right\}. \quad (27)$$

Дифференциальное уравнение (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \mu \dot{v}_0(t) = \\ = - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ p_n^{(1)}(t) g_n^{(1)}(x_1^*, x_2^*) + p_n^{(2)}(t) g_n^{(2)}(x_1^*, x_2^*) \right\}, \quad (28) \\ v_0(0) = v_0. \end{aligned}$$

Используя соотношения (15) и (17), получаем момент реакции

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ p_n^{(1)}(t) h_n^{(1)}(x_1^*, x_2^*) + p_n^{(2)}(t) h_n^{(2)}(x_1^*, x_2^*) \right\}, \quad (29)$$

где

$$h_n^{(1)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} \frac{(x_2^* + x_1^*)(x_2^* - x_1^*)}{2}, & n = 0, \\ \frac{x_2^* \sin nx_2^* - x_1^* \sin nx_1^* - z_2(n)}{n}, & n = \overline{1, \infty}; \end{cases}$$

$$h_n^{(2)}(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{x_1^* \cos nx_1^* - x_2^* \cos nx_2^* + z_1(n)}{n}, & n = \overline{1, \infty}. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение (14) принимает вид

$$\begin{aligned} I_0 \ddot{\psi}(t) = \\ = - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ p_n^{(1)}(t) h_n^{(1)}(x_1^*, x_2^*) + p_n^{(2)}(t) h_n^{(2)}(x_1^*, x_2^*) \right\}, \quad (30) \\ \psi(0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0. \end{aligned}$$

Таким образом, разрешающая система уравнений состоит из бесконечной системы интегральных уравнений (24), уравнений поступательного перемещения (28), вращательного движения (30) и соотношения (3), определяющего границы области контакта x_1^*, x_2^* .

3. МОДЕЛЬ “СВЕРХЗВУКОВОГО” ЭТАПА

Если в рассмотренной выше смешанной краевой задаче граничное условие (9) заменить на условие

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (x < x_1^*) \cup (x > x_2^*), \quad (31)$$

означающее наличие “жесткого экрана” на свободной поверхности, запрещающего для ее точек нормальные перемещения, то получаем несмешанную краевую задачу (задачу Неймана), решение которой значительно упрощается и сводится к бесконечной последовательности линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно коэффициентов $p_n^{(i)}(t)$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$\begin{aligned} p_n^{(i)}(t) = v_{0n}^{(i)}(t) - \int_0^t p_n^{(i)}(\tau) f_n(t - \tau) d\tau, \quad (32) \\ n = \overline{0, \infty}. \end{aligned}$$

На интервале времени, в течение которого акустические возмущения, вызванные в жидкости погружающимся телом, не вышли за пределы области контакта, то есть пока свободная поверхность жидкости будет оставаться в первоначальном невозмущенном состоянии, граничные условия на ней не будут сказываться на искомых гидродинамических нагрузках и результаты решения смешанной и несмешанной краевых задач будут идентичными. С выходом акустических возмущений за пределы области контакта свободная поверхность жидкости приходит в движение, поэтому условие (31) ее неподвижности в постановке “жесткий экран” может внести определенную погрешность в искомые результаты. Однако, как показывают расчеты [5, 8, 10], отличие получаемых результатов в обеих постановках незначительно (по крайней мере для интегральных характеристик). Поэтому можно рекомендовать модель “сверхзвукового” этапа для использования в инженерных расчетах на прочность конструкций, ударно контактирующих с жидкостью, что позволит существенно сократить затраты компьютерного времени (на один–два порядка).

4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Решение краевой задачи в общем случае сведено к решению системы интегральных уравнений (24) совместно с дифференциальными уравнениями (28), (30) по определяемым в каждый момент времени t границам области контакта тела с жидкостью из соотношений (3).

Решение задачи осуществлялось на конечном отрезке времени $[0; T]$, который разбивался на равные части длиной Δt , и в полученных узлах разбиения вычислялись все искомые величины. При этом величина временного интервала $[0; T]$ выбиралась так, чтобы за этот отрезок времени акустические волны, вызванные в жидкости проникающим цилиндром, достигнув вертикальных граней рассмотренной выше полуполосы жидкости и отразившись от них, не успевали вернуться к области возмущений, и тем самым не могли оказывать влияние на ход процесса проникания.

Бесконечная система интегральных уравнений (24) и ряды в дифференциальных уравнениях (28), (30) подвергались усечению. Степень усечения определялась из соображений практической сходимости. В системе (24) все интегралы вычислялись по квадратурным формулам трапеций и Симпсона. Решение системы интегральных уравнений (24) и дифференциальных уравнений (28), (30) осуществлялось итерационным ме-

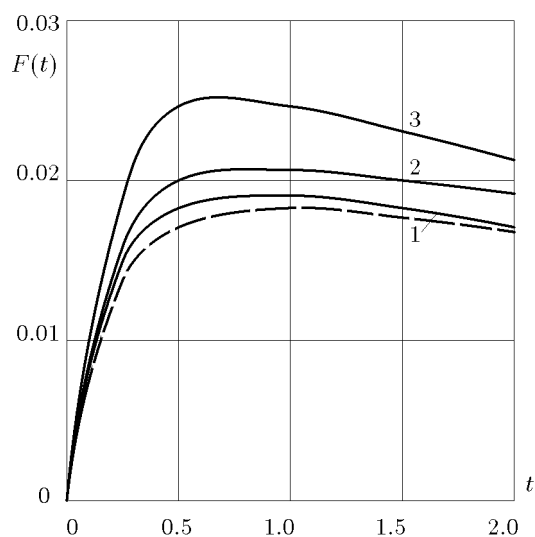


Рис. 2. Временные зависимости гидродинамической силы при различных значениях начальных углов асимметрии

тодом последовательных приближений. Для улучшения сходимости рядов Фурье применялись σ -множители Гиббса.

В вычислениях на временном интервале $[0; 2]$ варьировались следующие параметры: начальная скорость погружения $v_0 = 0.01 \div 0.1$, начальный угол асимметрии $\psi_0 = 0^\circ \div 50^\circ$, начальная скорость вращения $\dot{\psi}_0 = 0 \div 0.1$, масса тела $\mu = 0.1 \div 100$, а также геометрические параметры r , r_0 и q , полностью определяющие погонную массу μ однородного параболического сегмента и его момент инерции I_0 относительно центра масс.

Результаты расчетов на рис. 2–9 получены для положительных начальных углов асимметрии (параболический сегмент наклонен вправо), что соответствует рис. 1, при $v_0 = 0.05$, $\psi_0 = 0$. Везде в расчетах скорость вращения $\dot{\psi}$ отнесена к C/R , а ускорение $\ddot{\psi}$ отнесено к C^2/R^2 , угол асимметрии ψ измерялся в радианной мере, но для наглядности при описании рисунков использовалась градусная мера.

На рис. 2–3 приведены временные зависимости интегральных характеристик (гидродинамической силы $F(t)$ и момента реакции $M(t)$ соответственно) для параболического сегмента при следующих значениях параметров: $\mu = 4.85$, $I_0 = 3.097$; $r = 0.45$, $r_0 = 0.3$, $q = 2$. Цифрами 1–3 на рисунках отмечены кривые, соответствующие следующим значениям начального угла асимметрии $\psi_0 = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$. Штриховая линия на рис. 2 соответствует случаю симметричного погружения

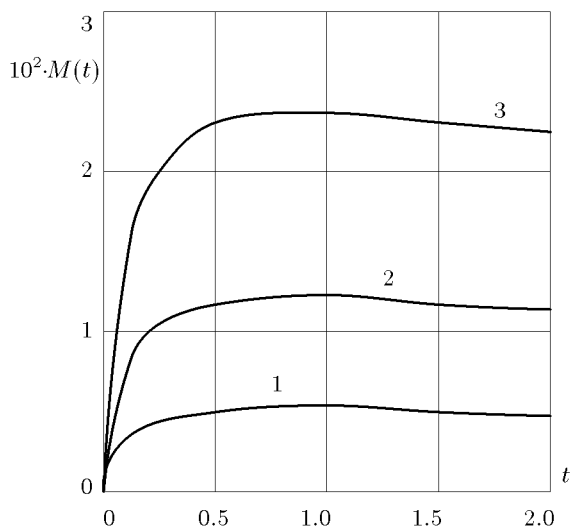


Рис. 3. Временные зависимости момента реакции при различных значениях начальных углов асимметрии

параболического цилиндра в жидкость, т.е. при $\psi_0 = 0^\circ$. Из рис. 2 можно заметить, что:

- гидродинамическая сила $F(t)$, действующая на тело со стороны жидкости, равна нулю в момент касания телом поверхности жидкости и резко возрастает на начальном этапе рассматриваемого временного интервала, причем тем быстрее, чем больше начальный угол асимметрии;
- гидродинамическая сила $F(t)$ для тел конечной массы на рассматриваемом временном интервале успевает достичь своего максимума, причем этот максимум тем больше и достигается он тем раньше, чем больше начальный угол асимметрии;
- влияние начального угла асимметрии в диапазоне $0 \leq \psi_0 \leq 10^\circ$ на величину гидродинамической силы незначительно (значения отличаются в пределах 5%), т.е. при необходимости определения только гидродинамической силы для начальных углов асимметрии из данного диапазона можно использовать симметричную постановку задачи;
- на всем исследуемом временном интервале гидродинамическая сила сопротивления прониканию параболического цилиндра со стороны жидкости является наименьшей при симметричном ударе о жидкость ($\psi_0 = 0^\circ$).

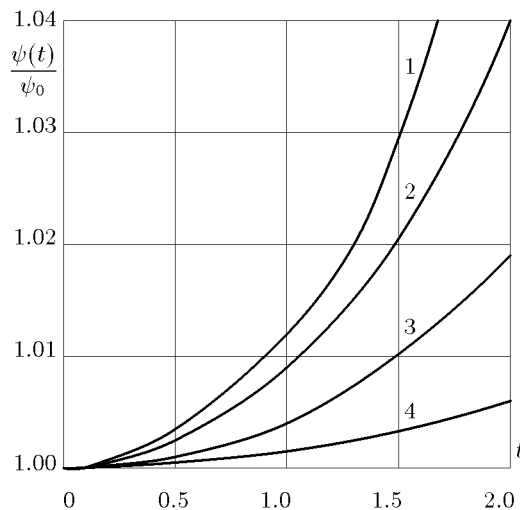


Рис. 4. Временные зависимости угла асимметрии при различных значениях массы тела

Из рис. 3 видно, что:

- момент реакции $M(t)$, равный нулю в начале процесса погружения в жидкость параболического цилиндра, возрастает, причем тем быстрее, чем больше угол асимметрии;
- момент реакции $M(t)$ для тел конечной массы на рассматриваемом временном интервале успевает достичь своего максимального значения, причем это значение тем больше и достигается тем раньше, чем больше начальный угол асимметрии.

На рис. 4 показаны зависимости относительного угла асимметрии $\psi(t)/\psi_0$ от времени t для параболических сегментов одинаковой геометрической формы, но различных погонных масс μ , при следующих значениях параметров: $\psi_0 = 20^\circ$, $r = 0.45$, $r_0 = 0.3$, $q = 2$. Цифрами 1–4 на рисунке отмечены кривые, соответствующие значениям погонных масс $\mu = 1.39, 2.08, 4.85, 13.51$. Соответствующие моменты инерции относительно центра масс рассматриваемых параболических сегментов равны $I_0 = 0.885, 1.327, 3.097, 8.627$, причем следует отметить, что погонные массы и моменты инерции сегментов пропорциональны плотности материала тела, так как форма этих параболических сегментов не меняется. Из рис. 4 можно заметить, что:

- относительный угол асимметрии растет, причем тем быстрее, чем меньше масса сегмента или его момент инерции;

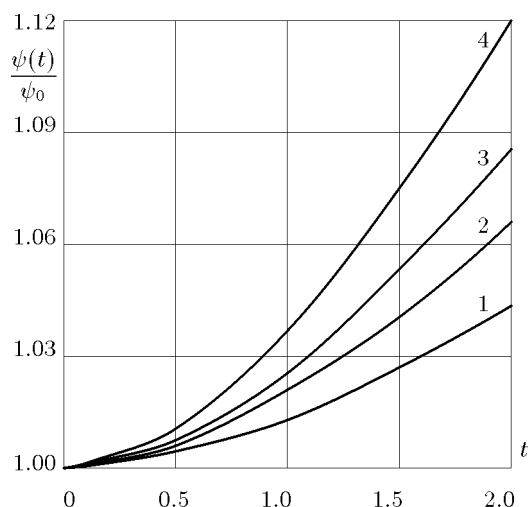


Рис. 5. Временные зависимости угла асимметрии при различных значениях начальных углов асимметрии

- в предельном частном случае для бесконечно большой массы относительный угол асимметрии будет равен единице, т.е. угол асимметрии $\psi(t)$ будет постоянным, что означает отсутствие вращательного движения у параболического сегмента около его центра масс. Этот случай соответствует несимметричной плоской задаче о вертикальном вдавливании в жидкость цилиндрического штампа с постоянной скоростью погружения и постоянным углом асимметрии.

На рис. 5 показана зависимость от времени t относительного угла асимметрии $\psi(t)/\psi_0$ для параболического сегмента при следующих значениях параметров: $\mu=0.377$, $I_0=0.1767$, $r=0.6$, $r_0=0.4$, $q=1$. Цифрами 1–4 на рисунке отмечены кривые, соответствующие следующим значениям начального угла асимметрии $\psi_0=30^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$. Из рис. 5 видно, что:

- относительный угол асимметрии растет, причем тем быстрее, чем больше начальный угол асимметрии;
- так как на исследуемом временном интервале относительный угол асимметрии является возрастающей функцией времени t , то параболический сегмент стремится опрокинуться и лечь на свою более затупленную часть контура; тем самым увеличивается область контакта и, следовательно, гидродинамическая сила сопротивления прониканию и момент ре-

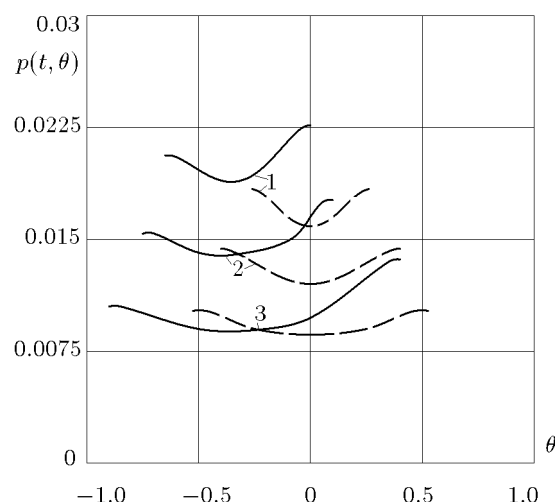


Рис. 6. Распределение гидродинамического давления по области контакта в различные моменты времени при симметричном и несимметричном проникании

акции (см. рис. 2, 3).

На рис. 6 приведено распределение гидродинамического давления $p(t, \theta)$ по области контакта параболического сегмента при следующих значениях параметров: $\psi_0=30^\circ$, $\mu=3.44$, $I_0=1.803$, $r=1$, $r_0=0.6667$, $q=0.5$. Штриховые линии соответствуют случаю симметричного погружения параболического цилиндра в жидкость, т.е. при $\psi_0=0^\circ$. Цифрами 1–3 отмечены кривые, соответствующие следующим моментам времени: $t=0.5, 1.0, 2.0$. Из рис. 6 можно заметить, что:

- распределение гидродинамического давления с течением времени все более отличается от соответствующих результатов симметричного удара, как по величине, так и по расположению и ширине области контакта;
- область контакта, по которой распределено гидродинамическое давление, в ходе процесса проникания расширяется и смещается относительно соответствующей области симметричного удара;
- кривые распределения гидродинамического давления приобретают несимметричный вид по сравнению с соответствующими результатами симметричной задачи;
- гидродинамическое давление в направлении правой границы области контакта по сравнению с симметричным случаем выше, что

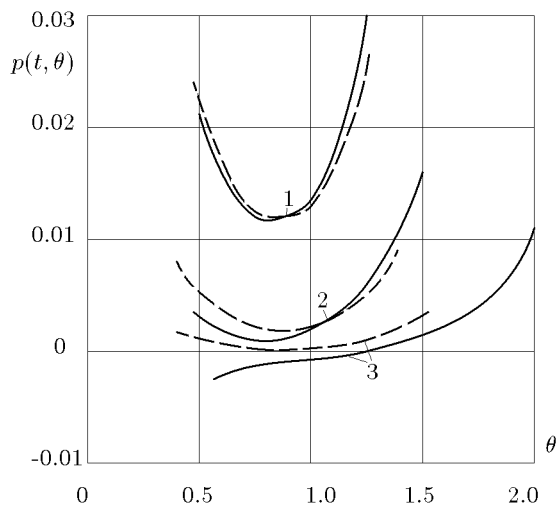


Рис. 7. Распределение гидродинамического давления по области контакта в различные моменты времени с учетом и без учета вращательного движения цилиндра

объясняется большей степенью затупленности контактирующего с жидкостью контура параболического сегмента.

На рис. 7–9 приведены отдельные результаты для параболического сегмента при следующих значениях параметров: $\mu=0.377$, $I_0=0.1767$, $r=0.6$, $r_0=0.4$, $q=1$. Штриховые линии соответствуют случаю погружения параболического сегмента в жидкость, когда вращательное движение сегмента вокруг его центра масс не учитывается, т.е. когда на всем рассматриваемом временном интервале $\psi(t)=\psi_0$.

На рис. 7 приведено распределение гидродинамического давления $p(t, \theta)$ по области контакта параболического сегмента при начальном угле асимметрии $\psi_0=50^\circ$. Цифрами 1–3 отмечены кривые давления, соответствующие моментам времени $t=0.5, 1.0, 2.0$. Из рис. 7 видно, что:

- с течением времени значения гидродинамического давления все более отличны от результатов, полученных без учета вращательного движения сегмента, как по величине, так и по расположению и ширине области контакта;
- гидродинамическое давление в направлении правой границы области контакта по сравнению с соответствующими результатами, полученными без учета вращательного движения параболического сегмента, выше, что объясняется тем, что вращающийся относи-

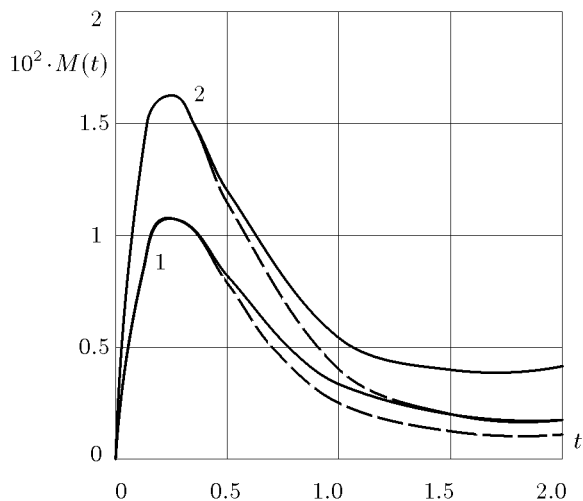


Рис. 8. Временные зависимости момента реакции при различных значениях начальных углов асимметрии с учетом и без учета вращательного движения цилиндра

тельно центра масс сегмент своей правой частью входит в жидкость, увеличивая тем самым давление, а также тем, что степень затупленности правой части контактирующего с жидкостью контура сегмента за счет его вращения возрастает;

- гидродинамическое давление в направлении левой границы области контакта по сравнению с соответствующими результатами, полученными без учета вращения сегмента, ниже, что объясняется тем, что вращающийся параболический сегмент своей левой частью выходит из жидкости, тем самым уменьшая давление, а также тем, что степень затупленности левой части контактирующего с жидкостью контура сегмента за счет его вращения убывает;
- появление зоны отрицательного давления в пределах области контакта (кривая 3) на поздних этапах рассматриваемого временного интервала можно объяснить так: значение гидродинамического давления на этом этапе мало, а вращающийся относительно центра масс параболический сегмент своей левой частью выходит из жидкости, приводя к дальнейшему понижению давления вплоть до появления малых отрицательных его значений.

На рис. 8 приведены временные зависимости момента реакции $M(t)$ проникающего параболиче-

ского сегмента для начальных углов асимметрии $\psi_0 = 45^\circ, 50^\circ$. Соответствующие кривые моментов реакции на рисунке отмечены цифрами 1–2. Из рис. 8 можно заметить, что на раннем этапе рассматриваемого временного интервала неучет вращения сегмента не сказывается на величине момента реакции, в дальнейшем этот неучет приводит к разнице в результатах:

- для $\psi_0 = 50^\circ$ она равна 15 % от максимального значения момента реакции;
- для $\psi_0 = 45^\circ$ она равна 8 % от максимального значения момента реакции, причем с уменьшением начального угла асимметрии влияние неучета вращательного движения на момент реакции ослабевает.

На рис. 9 показаны зависимости от времени t границ области контакта параболического сегмента с жидкостью для начальных углов асимметрии $\psi_0 = 45^\circ, 50^\circ$. Из рис. 9 видно, что:

- на начальном этапе рассматриваемого временного интервала неучет вращательного движения сегмента вокруг центра масс не сказывается на величинах границ x_1, x_2 и ширине области контакта;
- на последующих этапах этот неучет приводит к различиям в результатах:
 - для $\psi_0 = 50^\circ$ они равны 48 % от максимума правой границы x_2 , 31 % от максимума левой границы x_1 , 20 % от максимума ширины области контакта;
 - для $\psi_0 = 45^\circ$ они равны 35 % от максимума правой границы x_2 , 21 % от максимума левой границы x_1 , 12 % от максимума ширины области контакта;
- влияние неучета вращения сегмента вокруг центра масс ослабевает с уменьшением начального угла асимметрии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе решена плоская несимметричная задача вертикального удара и погружения в сжимаемую жидкость параболического цилиндра конечной массы с изменяющимися скоростью и углом асимметрии, а также с учетом не только его поступательного перемещения в глубь жидкости, но и вращательного движения контура цилиндра вокруг своего центра масс.

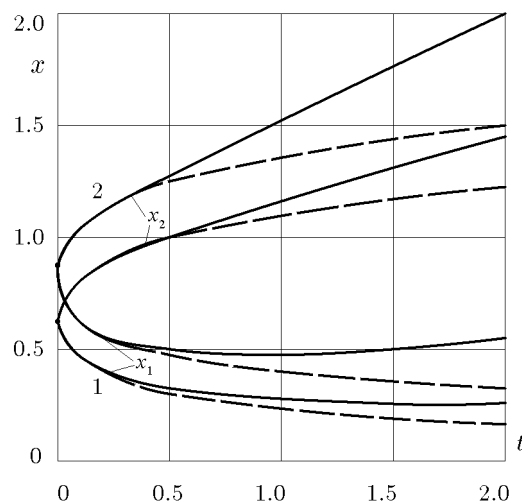


Рис. 9. Временные зависимости границ области контакта при различных значениях начальных углов асимметрии с учетом и без учета вращательного движения цилиндра

Степень влияния на величины искомых характеристик процесса несимметричности контура параболического сегмента и вращательного движения его вокруг своего центра масс может быть значительной при больших начальных углах асимметрии. С уменьшением начального угла асимметрии влияние этих факторов ослабевает.

Для инженерных расчетов на прочность конструкций, ударно контактирующих с жидкостью, рекомендуется использовать результаты решения задачи удара в постановке “сверхзвукового” этапа с “жестким” экраном на свободной поверхности жидкости. Это позволит существенно сэкономить затраты компьютерного времени.

Следует отметить, что использование рассматриваемой канонической формы проникающего цилиндрического тела с поперечным сечением в виде параболического сегмента при аппроксимации смоченных поверхностей различных цилиндрических тел усложненной геометрической формы может значительно упростить определение искомых характеристик процесса проникания для последних.

1. Кубенко В. Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. – К.: Наук. думка, 1981. – 160 с.
2. Гавриленко В. В. Плоская симметричная задача погружения затупленного твердого тела в жидкость с учетом отрыва // Акуст. вісн. – 1998. – 1, N 3. – С. 24–29.

3. Гавриленко В. В. Плоская задача удара затупленного твердого тела о поверхность сжимаемой жидкости с учетом отрыва // Доповіді НАН України.– 1999.– N 4.– С. 54–59.
4. Гавриленко В. В. Плоская несимметричная задача удара твердого тупого клина о поверхность сжимаемой жидкости // Акуст. вісн.– 1999.– 2, N 1.– С. 22–30.
5. Кубенко В. Д., Гавриленко В. В. Плоская несимметричная задача погружения жесткого кругового цилиндра в жидкость // Прикл. мех.– 1999.– 35, N 8.– С. 61–70.
6. Гавриленко В. В. Плоская симметричная задача удара тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки о поверхность жидкости с учетом отрыва // Акуст. вісн.– 1998.– 1, N 2.– С. 34–40.
7. Гавриленко В. В. Удар тонкой упругой цилиндрической оболочки о поверхность жидкости // Гидромеханика.– 1990.– Вып. 62.– С. 34–39.
8. Кубенко В. Д., Гавриленко В. В. Плоская задача проникания тонких упругих цилиндрических оболочек в сжимаемую жидкость // Прикл. мех.– 1990.– 26, N 9.– С. 66–75.
9. Гавриленко В. В. Нестационарные нагрузки при проникании эллипсоида вращения в сжимаемую жидкость // Прикл. мех.– 1986.– 22, N 8.– С. 113–117.
10. Кубенко В. Д., Гавриленко В. В. Осесимметричная задача проникания жестких тел в сжимаемую жидкость // Прикл. мех.– 1987.– 23, N 1.– С. 53–60.
11. Гавриленко В. В. Определение напряженно-деформированного состояния проникающих в сжимаемую жидкость тонких упругих сферических оболочек // Прикл. мех.– 1988.– 24, N 9.– С. 30–37.
12. Гавриленко В. В. Удар тонкой упругой сферической оболочки о поверхность жидкости // Гидромеханика.– 1990.– Вып. 61.– С. 17–24.
13. Кубенко В. Д., Гавриленко В. В. Осесимметричная задача проникания тонких упругих сферических оболочек в сжимаемую жидкость // Прикл. мех.– 1988.– 24, N 4.– С. 63–74.
14. Сагомонян А. Я. Проникание.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974.– 300 с.
15. Сагомонян А. Я. Удар и проникание тел в жидкость.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.– 172 с.
16. Баженов В. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В. Анализ нелинейных эффектов при высокоскоростном проникании тел в сжимаемую жидкость // Прикл. мех.– 1986.– 22, N 2.– С. 125–127.
17. Григорьев Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (Удар и погружение).– Л.: Судостроение, 1976.– 199 с.
18. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами.– К.: Наук. думка, 1969.– 216 с.