

УДК 517.94

РАВНОМЕРНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Г. М. ГУБРЕЕВ

Южно-Украинский педагогический государственный университет, Одесса

Получено 19.03.2001

Сформулирован критерий равномерной корректности и получены оценки для норм решений задачи Коши для волнового уравнения с интегральными граничными условиями. Критерий дан в терминах условия Макенхаупта для специального веса на контурах, охватывающих спектр задачи. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании различных граничных задач линейной акустики в неклассической постановке.

Сформульовано критерій рівномірної коректності та отримано оцінки норм розв'язків задачі Коші для хвильового рівняння з інтегральними граничними умовами. Критерій дано в термінах умови Макенхаупта для спеціальної ваги на контурах, що охоплюють спектр задачі. Одержані результати можуть бути використані при дослідженні різних граничних задач лінійної акустики в некласичній постановці.

A criteria of the uniform correctness is formulated and the norms of the Cauchy problem solutions for the wave equation with integral boundary conditions are estimated. The criteria is given with the terms of the Muckenhoupt condition for special weight on contours, including the spectrum of the problem. The obtained results can be used for solving the different boundary problems of linear acoustics in the non-classical statement.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи механики и физики сводятся к дифференциальным уравнениям с неклассическими граничными условиями (см., например, обзорную статью [1]). Уравнения такого рода естественным образом трактуются как абстрактные дифференциальные уравнения в подходящем банаховом пространстве. Данная статья посвящена изучению задачи Коши для гиперболического уравнения с заданными начальными условиями:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = 0,$$

$$u(0) = v, \quad u'_t(0) = v_1,$$

где $u(t)$ – вектор-функция со значениями в гильбертовом пространстве $L_2(0, a)$; A – дифференциальный оператор второго порядка, который каноническим образом строится по заданному весу Макенхаупта на положительном луче R_+ . Идейную основу статьи составляет использование техники весовых оценок сингулярных интегралов типа Коши [2]. Это позволило сформулировать критерий равномерной корректности и получить оценки решений задачи Коши с неклассическими граничными условиями.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ВЕСАМИ МАКЕНХАУПТА

Пусть w^2 – произвольный A_2 -вес Макенхаупта на полуоси $R_+ := \{x \in R : x \geq 0\}$, то есть [2]

$$\sup_{\Delta} \left\{ \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} w^2(x) dx, \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} w^{-2}(x) dx \right\} < \infty,$$

где Δ – произвольный интервал на R_+ ; $|\Delta|$ – его длина. Тогда существует аналитическая в области $C \setminus R_+$ функция w_- , обладающая следующими свойствами [3]:

- 1) существуют почти всюду некасательные предельные значения функции w_- на верхнем и нижнем берегах разреза вдоль R_+ (обозначаемые через $w_-(x + i0)$, $w_-(x - i0)$), причем почти всюду

$$|w_-(x - i0)| = |w_-(x + i0)| = w(x), \quad x \in R_+;$$

- 2) функция $w_-(z^2)$ является внешней [4] в нижней полуплоскости C_- ;
- 3) имеет место интегральное представление

$$w_-(z^2) = z^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-itz} y_w(t) dt, \quad z \in C_-$$

с некоторой функцией $y_w \in L_2^{\text{loc}}(R_+)$, то есть $y_w \in L_2(0, a)$ при каждом $a > 0$.

Заметим, что во втором свойстве функция z^2 отображает $\mathbb{C}_-$ на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, а в третьем – ветвь $z^{\frac{3}{2}}$ фиксируется условием изменения аргумента $-\pi < \arg z < 0$.

В пространстве $L_2(0, a)$ рассмотрим произвольный оператор K вида

$$Kh = Bh + (h, x)y_w^a,$$

$$(Bh)(t) := - \int_0^t (t-s)h(s)ds,$$

где $x \in L_2(0, a)$, через y_w^a обозначено сужение функции y_w на сегмент $[0, a]$, а скобки обозначают скалярное произведение в $L_2(0, a)$. Проверяется условие $\text{Ker } K = \{0\}$, и если функция x не принадлежит образу оператора B^* (что в дальнейшем и предполагается), то $\text{Ker } K^* = \{0\}$. Тогда корректно определен неограниченный плотно-заданный оператор $A := K^{-1}$. Область его определения D_A состоит из функций

$$D_A = \{f = g - (g'', x)y_w^a : g \in W_2^2(0, a), \quad g(0) = g'(0) = 0\}, \quad (1)$$

а оператор A действует по формуле

$$(Af)(t) = -g''(t). \quad (2)$$

Поскольку $\text{Ker } K = \{0\}$, слагаемое g в представлении (1) однозначно определяется по функции f .

Проиллюстрируем сказанное на примере степенного веса Макенхаупта

$$w^2(x) = x^\omega, \quad -1 < \omega < 1. \quad (3)$$

Функция

$$w_-(x) := e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} z^{\frac{\omega}{2}},$$

$$\mu = \frac{3}{2} - \omega, \quad -2\pi < \arg z < 0$$

обладает вышеперечисленными тремя свойствами, и для нахождения $y_w \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ получаем уравнение

$$e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} z^\omega = z^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-itz} y_w(t) dt, \quad z \in \mathbb{C}_-.$$

Если перейти к граничным значениям, получаем равенство

$$e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} (x - i0)^{-\mu} = \int_0^\infty e^{-itx} y_w(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

откуда $y_w(t) = \Gamma^{-1}(\mu)t^{\mu-1}$ [5]. Таким образом, в случае степенного веса (3) для функции y_w^a в (1) получаем явное выражение:

$$y_w^a(t) = \Gamma^{-1}(\mu)t^{\mu-1}, \quad 0 \leq t \leq a, \quad \mu = \frac{3}{2} - \omega.$$

В частных случаях $w^2(x) = x^{\pm\frac{1}{2}}$ описание области определения D_A упрощается. Если вес $w_1^2(x) = x^{\frac{1}{2}}$, то соответствующий оператор A_1 задается формулами

$$(A_1 f)(x) = -f''(t), \quad D_{A_1} = \text{Ker } \delta' \cap \text{Ker } \varphi, \quad (4)$$

где функционал δ' определяется равенством

$$\delta'(g) = -g'(0), \quad g \in W_2^2(0, a);$$

φ – произвольный ограниченный в $W_2^2(0, a)$ функционал, нормированный условием $\varphi(1) = 1$; $\varphi(1)$ – значение φ на функции, тождественно равной единице. При этом, ввиду плотности D_A в $L_2(0, a)$, любая линейная комбинация функционалов δ' и φ неограничена в пространстве $L_2(0, a)$. Аналогично, весу $w_2^2(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ соответствует оператор

$$(A_2 f)(t) = -f''(t), \quad D_{A_2} = \text{Ker } \delta \cap \text{Ker } \varphi, \quad (5)$$

где δ -функция Дирака определяется равенством $\delta(g) = g(0)$, а произвольный ограниченный в соболевском пространстве $W_2^2(0, a)$ функционал нормирован условием $\varphi(t) = 1$. Как и прежде, произвольная линейная комбинация δ и φ неограничена в $L_2(0, a)$.

2. РАВНОМЕРНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть A – произвольный оператор вида (1), (2). Рассмотрим в пространстве $L_2(0, a)$ задачу Коши

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = 0, \quad (6)$$

$$u(0) = v, \quad u'(0) = v_1,$$

понимая под ее решением дважды сильно дифференцируемую в метрике $L_2(0, a)$ функцию $u(t)$ такую, что $u(t) \in D_A$ при каждом $t \geq 0$ и удовлетворяющую начальным данным. Задачу Коши (6) будем называть равномерно корректной, если для произвольных $v, v_1 \in D_A$ она имеет единственное решение $u(t)$ с оценкой нормы:

$$\|u(t)\| \leq M(\|u(0)\| + \|u'(0)\|)e^{\beta_0 t}, \quad (7)$$

$$\beta_0 \geq 0, \quad t \geq 0,$$

где константа M не зависит от решения u ; $\|\cdot\|$ – норма в пространстве $L_2(0, a)$.

Спектр оператора A совпадает с множеством корней целой функции порядка роста $1/2$ и нормального типа

$$\Phi(z) := 1 - z \int_0^a y_w(z, t) \overline{x(t)} dt,$$

где введено обозначение

$$y_w(z, t) := y_w^a(t) - \sqrt{z} \int_0^t \sin \sqrt{z}(t-s) y_w^a(s) ds. \quad (8)$$

Обозначим через γ_β параболу, которая задается уравнением

$$z(t) = (t - i\beta)^2, \quad -\infty < t < \infty, \quad \beta > 0.$$

Условие Макенхаупта ($A_{\gamma_\beta}^2$) для веса $W(z) > 0$, заданного на параболе γ_β , выглядит следующим образом [2]:

$$\sup_{z \in \gamma_\beta} \sup_{r > 0} \left\{ r^{-1} \int_{\gamma_\beta \cap B(z, r)} W(z) |dz|, \right. \\ \left. r^{-1} \int_{\gamma_\beta \cap B(z, r)} W^{-1}(z) |dz| \right\} < \infty, \quad (9)$$

где $B(z, r)$ – круг с центром z , имеющий радиус r ; $|dz|$ – элемент длины дуги кривой γ_β . В нижеследующей формулировке ядра $v(z, t)$, $v_1(z, t)$ вычисляются по формуле (8), при подстановке вместо функции y_w^a начальных данных $v(t)$ и $v_1(t)$ соответственно.

Теорема 1. Пусть A – произвольный оператор вида (1), (2), порожденный весом Макенхаупта w^2 на полуоси $\mathbb{R}_+$ и пусть соответствующая ему целая функция $\Phi(z)$ такова, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{1}{2}} \log |\Phi(-x)| = a. \quad (10)$$

Тогда, если задача Коши (6) равномерно корректна с оценкой норм решений (7), то спектр A лежит внутри параболы γ_β ($\beta > \beta_0$) и на каждой такой параболе вес

$$W(z) := |w_-(z)|^{-2} |\Phi(z)|^2, \quad z \in \gamma_\beta \quad (11)$$

удовлетворяет условию ($A_{\gamma_\beta}^2$). Обратно, если спектр A лежит внутри некоторой параболы γ_β , а вес $W(z)$ удовлетворяет условию ($A_{\gamma_\beta}^2$), то задача Коши (6) равномерно корректна, ее решение

представимо в виде

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\beta} \cos \sqrt{z} t y_w(z, s) \Phi^{-1}(z) \times \\ \times \int_0^a v(z, t) \overline{x(t)} dt dz + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\beta} \frac{\sin \sqrt{z} t}{\sqrt{z}} y_w(z, s) \Phi^{-1}(z) \times \\ \times \int_0^a v_1(z, t) \overline{x(t)} dt dz, \quad (12)$$

и имеет место оценка (7) с $\beta_0 = \beta$.

Отметим, что в формуле (12) интегрирование ведется в направлении возрастания t в параметрическом уравнении $z(t) = (t - i\beta)^2$, $t \in \mathbb{R}$ параболы γ_β . Доказательство теоремы основано на следующем результате, представляющем, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Теорема 2. Пусть A – произвольный оператор вида (1), (2) в пространстве $L_2(0, a)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) для всех $h \in L_2(0, a)$ имеет место интегральная оценка резольвенты:

$$\int_{\gamma_\beta} |z|^{\frac{1}{2}} \|(A - zI)^{-1} h\|^2 |dz| \leq C \|h\|^2;$$

- 2) вес $W(z)$, определенный равенством (11), удовлетворяет условию ($A_{\gamma_\beta}^2$).

3. ПРИМЕРЫ

Приведем примеры, иллюстрирующие теорему 1. Рассмотрим неклассическую задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2},$$

$$u(0, s) = v(s), \quad u'_t(0, s) = v_1(s),$$

$$0 \leq s \leq a,$$

$$u'_s(t, 0) = 0, \quad t \geq 0, \quad (13)$$

$$\int_0^a \{u(t, s)p(s) + u'_s(t, s)p'(s) + \\ + u''_{ss}(t, s)p''(s)\} ds = 0,$$

где функция $p \in W_2^2(0, a)$ задает общий вид ограниченного в $W_2^2(0, a)$ функционала

$$\varphi(f) = \int_0^a (f(s)p(s) + f'(s)p'(s) + f''(s)p''(s))ds, \\ f \in W_2^2(0, a).$$

Предположим, что φ удовлетворяет условиям, сформулированным при описании области определения оператора вида (4). Тогда задаче Коши (13) соответствует задача (6) с оператором $A = A_1$, который порождается весом $w^2(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Можно проверить, что в этом случае

$$\Phi(z) = \varphi(\cos \sqrt{z}t). \quad (14)$$

Предположим, что $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (10). Тогда из теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 3. Задача Коши (13) равномерно корректна тогда и только тогда, когда существует парабола γ_β , охватывающая все корни функции Φ и на которой вес $W(z) = |z|^{-\frac{1}{2}}|\Phi(z)|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\beta}^2)$.

Пусть, например, функционал φ задается формулой

$$\varphi(f) = \sum_{k=0}^n c_k f(s_k) + \int_0^a f(s)g(s)ds, \\ f \in W_2^2(0, a), \quad c_k \in \mathbb{C},$$

где $0 = s_0 < \dots < s_n = a$ – произвольное разбиение сегмента; g – фиксированная функция из $L_2(0, a)$. В силу условия (14)

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^n c_k \cos \sqrt{z} s_k + \int_0^a \cos(\sqrt{z}s)g(s)ds$$

и из теоремы 3 вытекает, что если $c_n \neq 0$, то задача Коши (12) с таким функционалом φ равномерно корректна.

Оператору A_2 , задаваемому формулами (5), соответствует задача Коши, которая получается из задачи (13) заменой первого граничного условия $u'_s(t, 0) = 0$ на $u(t, 0) = 0$. Этому случаю соответствует функция

$$\Phi(z) = (\sqrt{z})^{-1} \varphi(\sin \sqrt{z}t)$$

и, если выполнено условие (10), то имеет место аналог теоремы 3, в формулировке которого $W(z)$ следует заменить на вес $W(z) = |z|^{\frac{1}{2}}|\Phi(z)|^2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье техника весов Макенхаупта впервые применена к теории дифференциальных уравнений гиперболического типа. Установлен критерий равномерной корректности задачи Коши для волнового уравнения с неклассическими граничными условиями. Критерий формулируется в терминах условия Макенхаупта, которому должна удовлетворять специальная весовая функция на контурах, охватывающих спектр задачи. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании различных граничных задач линейной акустики в неклассической постановке.

1. Krall A. M. The development of general differential and general differential-boundary systems // Rocky Mountain J. Math.– 1975.– 5, N 4.– P. 34–80.
2. Дынькин Е. М., Осиленкер Е. П. Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техники. Матем. анализ.– 1983.– 21.– С. 42–129.
3. Губреев Г. М. Спектральный анализ биортогональных разложений, порожденных весами Макенхаупта // Записки научных семинаров Ленинградского отделения МИ АН СССР.– 1991.– 190.– С. 34–80.
4. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции.– М.: Мир, 1984.– 470 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина.– М.: Наука, 1969.– 344 с.