

УДК 539.3:534.1:534.232:517.958

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ СРАВНЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО УПРУГИМ СВОЙСТВАМ

В. А. МОИСЕЕНКО

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Получено 03.11.2008

В трехмерной постановке предложен эффективный аналитический подход к разработке методики сравнения анизотропных акустических кристаллов гексагональной, кубической и орторомбической структуры по упругим свойствам. Этот подход основан на сведении полной системы уравнений движения пространственных волноводных объектов из таких материалов к решению независимых обобщенных волновых уравнений путем замены зависимых компонент вектора перемещений через независимые компоненты обобщенного векторного волнового потенциала. Основу разработанной методики составляет процедура выделения общего члена и характерных слагаемых в основном разрешающем уравнении и получение обобщенных упругих характеристик. Для широкого набора реальных анизотропных акустических кристаллов исследовано поведение обобщенных упругих характеристик и разработаны соответствующие критерии сравнения таких материалов.

У тривимірній постановці запропоновано ефективний аналітичний підхід до розробки методики порівняння анізотропних акустичних кристалів гексагональної, кубічної й орторомбічної структури за пружними властивостями. Цей підхід базується на зведенні повної системи рівнянь руху просторових хвильоводних об'єктів з таких матеріалів до розв'язання незалежних узагальнених хвильових рівнянь шляхом заміни залежних компонентів вектора зміщень через незалежні компоненти узагальненого векторного хвильового потенціалу. Основу розробленої методики становить процедура виділення загального члена й характерних доданків в основному розв'язувальному рівнянні й одержання узагальнених пружних характеристик. Для широкого набору реальних анізотропних акустичних кристалів досліджено поведінку узагальнених пружних характеристик і розроблені відповідні критерії порівняння таких матеріалів.

An efficient analytical approach for developing the technique for comparison of anisotropic acoustical crystals of a hexagonal, cubic and orthorhombic structure by their elastic properties was offered in the three-dimensional statement. The mentioned approach is based on the reducing of a complete system of motion equations for spatial waveguide objects of such materials to solution of independent generalized wave equations by substituting the dependent components of displacement vector with the independent components of vector wave potential. The developed technique is based on distinguishing the common part and representative terms in the fundamental solving equation and on obtaining the generalized elastic characteristics. For a wide range of real anisotropic acoustical crystals, the behavior of the generalized elastic characteristics has been studied and the corresponding criteria of comparison of such materials have been developed.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение закономерностей и особенностей поведения волновых, кинематических, силовых и энергетических характеристик при формировании физико-механических полей в деформируемых твердых телах из анизотропных материалов требует подбора специфических исследуемых образцов, что всегда остается сложной проблемой. Это обусловлено тем, что объема выборки должно быть достаточно для формирования общих выводов, но она не должна быть избыточной. При этом сравнение упругих констант не может быть использовано в качестве критерия отбора, так как каждая из них в отдельности не характеризует материал в целом.

Анизотропия упругих свойств материалов исследуется на протяжении уже почти ста лет и этим вопросам посвящено большое количество работ. Их подробный обзор, содержащий около трехсот наименований, опубликован недавно в одном

из центральных изданий Сибирского отделения Российской академии наук [1]. В упомянутой статье объектом исследований была полная система основных уравнений трехмерной линейной теории упругости. Следует отметить, что при этом, как правило, анализируются только уравнения обобщенного закона Гука, в которые упругие постоянные входят непосредственно. Важным признаком, объединяющим все обзорные работы независимо от используемых методов и методик, является стремление авторов получить обобщенные критерии для исследования анизотропии упругих свойств материалов и последующего их сравнения. Очевидно, что таким критериями могут быть только определенные комбинации упругих констант, полученные без ограничения строгости в явном или неявном виде путем исследования как уравнений обобщенного закона Гука, так и всей основной системы трехмерных уравнений линейной теории упругости.

В этой работе предлагается единая методи-

ка определения критериев сравнения различных анизотропных материалов по упругим свойствам для последующего ее использования при проведении количественных и качественных исследований волновых, кинематических, силовых и энергетических характеристик при формировании физико-механических полей в анизотропных кристаллах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ

Предметом исследований является трехмерная математическая модель, представляющая собой полную систему основных уравнений трехмерной линейной теории упругости, которая связывает компоненты вектора перемещений $U_i(\vec{x}, t)$, тензора напряжений $\sigma_{ij}(\vec{x}, t)$ и тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t)$ и состоит из уравнений движения, уравнений обобщенного закона Гука и соотношений Коши [2]. Эта модель известным образом сводится к основной системе уравнений движения в перемещениях

$$L_{ij}U_j(\vec{x}, t) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь L_{ij} – дифференциальные операторы, которые имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11}\partial_1^2 + G_{12}\partial_2^2 + G_{13}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2, \\ L_{22} &= G_{12}\partial_1^2 + C_{22}\partial_2^2 + G_{23}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2, \\ L_{33} &= G_{13}\partial_1^2 + G_{23}\partial_2^2 + C_{33}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2, \\ L_{12} &= L_{21} = (C_{12} + G_{12})\partial_1\partial_2, \\ L_{13} &= L_{31} = (C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3, \\ L_{23} &= L_{32} = (C_{23} + G_{23})\partial_2\partial_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ и ∂_t – частные производные по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 и по времени t ; $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – радиус-вектор; $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{12}, C_{13}, C_{23}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$ – упругие безразмерные константы, отнесенные к C_0 ; C_0 – нормирующая постоянная, имеющая размерность упругих констант; ρ – плотность материала.

Основная идея разрабатываемого подхода состоит в том, чтобы перейти от зависимых неизвестных функций – компонент вектора перемещений $U_1(\vec{x}, t), U_2(\vec{x}, t), U_3(\vec{x}, t)$ к независимым неизвестным функциям – компонентам обобщенного векторного волнового потенциала

$\Psi_1(\vec{x}, t), \Psi_2(\vec{x}, t), \Psi_3(\vec{x}, t)$ с помощью полученных ранее представлений для вектора перемещений и разрешающего векторного волнового уравнения [3]:

$$\begin{aligned} U_1(\vec{x}, t) &= L_1^{(4)}\Psi_1(\vec{x}, t) - \\ &\quad -(C_{12} + G_{12})\partial_1\partial_2L_{12}^{(2)}\Psi_2(\vec{x}, t) - \\ &\quad -(C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3L_{13}^{(2)}\Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_2(\vec{x}, t) &= -(C_{12} + G_{12})\partial_1\partial_2L_{12}^{(2)}\Psi_1(\vec{x}, t) + \\ &\quad + L_2^{(4)}\Psi_2(\vec{x}, t) - (C_{23} + G_{23})\partial_2\partial_3L_{23}^{(2)}\Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_3(\vec{x}, t) &= -(C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3L_{13}^{(2)}\Psi_1(\vec{x}, t) - \\ &\quad -(C_{23} + G_{23})\partial_2\partial_3L_{23}^{(2)}\Psi_2(\vec{x}, t) + L_3^{(4)}\Psi_3(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\vec{\Psi}(\vec{x}, t) = (\Psi_1(\vec{x}, t), \Psi_2(\vec{x}, t), \Psi_3(\vec{x}, t))$ – неизвестный обобщенный векторный волновой потенциал, который определяется из основного векторного разрешающего уравнения [3]

$$L\vec{\Psi}(\vec{x}, t) = 0. \quad (4)$$

Дифференциальный оператор в основном разрешающем уравнении (4) имеет структуру

$$\begin{aligned} L &= D_{600}\partial_1^6 + D_{060}\partial_2^6 + D_{006}\partial_3^6 + D_{420}\partial_1^4\partial_2^2 + \\ &\quad + D_{240}\partial_1^2\partial_2^4 + D_{402}\partial_1^4\partial_3^2 + D_{042}\partial_2^4\partial_3^2 + \\ &\quad + D_{222}\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2 + D_{204}\partial_1^2\partial_3^4 + D_{024}\partial_2^2\partial_3^4 - \\ &\quad - \rho^3 C_0^{-3}\partial_t^6 - D_{400}\rho C_0^{-1}\partial_1^4\partial_t^2 - \\ &\quad - D_{040}\rho C_0^{-1}\partial_2^4\partial_t^2 - D_{004}\rho C_0^{-1}\partial_3^4\partial_t^2 - \\ &\quad - D_{220}\rho C_0^{-1}\partial_1^2\partial_2^2\partial_t^2 - D_{202}\rho C_0^{-1}\partial_1^2\partial_3^2\partial_t^2 - \\ &\quad - D_{022}\rho C_0^{-1}\partial_2^2\partial_3^2\partial_t^2 + D_{200}\rho^2 C_0^{-2}\partial_1^2\partial_t^4 + \\ &\quad + D_{020}\rho^2 C_0^{-2}\partial_2^2\partial_t^4 + D_{002}\rho^2 C_0^{-2}\partial_3^2\partial_t^4, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
D_{600} &= C_{11}G_{12}G_{13}; \\
D_{060} &= G_{12}C_{22}G_{23}; \\
D_{006} &= G_{13}G_{23}C_{33}; \\
D_{420} &= G_{12}^2G_{13} + C_{11}C_{22}G_{13} + \\
&\quad + C_{11}G_{12}G_{23} - G_{13}(C_{12} + G_{12})^2; \\
D_{240} &= G_{12}^2G_{23} + C_{11}C_{22}G_{23} + \\
&\quad + C_{22}G_{12}G_{13} - G_{23}(C_{12} + G_{12})^2; \\
D_{402} &= G_{12}G_{13}^2 + C_{11}G_{13}G_{23} + \\
&\quad + C_{11}C_{33}G_{12} - G_{12}(C_{13} + G_{13})^2; \\
D_{042} &= G_{12}G_{23}^2 + C_{22}G_{13}G_{23} + \\
&\quad + C_{22}C_{33}G_{12} - G_{12}(C_{23} + G_{23})^2; \\
D_{204} &= G_{13}^2G_{23} + G_{12}G_{13}C_{33} + \\
&\quad + C_{11}G_{23}C_{33} - G_{23}(C_{13} + G_{13})^2; \\
D_{024} &= G_{13}G_{23}^2 + G_{12}G_{23}C_{33} + \\
&\quad + C_{22}G_{13}C_{33} - G_{13}(C_{23} + G_{23})^2; \\
D_{222} &= C_{11}C_{22}C_{33} + 2G_{12}G_{13}G_{23} + \\
&\quad + 2(C_{12} + G_{12})(C_{13} + G_{13})(C_{23} + G_{23}) - \\
&\quad - C_{11}(C_{23}^2 + 2C_{23}G_{23}) - C_{22}(C_{13}^2 + 2C_{13}G_{13}) - \\
&\quad - C_{33}(C_{12}^2 + 2C_{12}G_{12}); \\
D_{400} &= (G_{12}G_{13} + C_{11}G_{13} + C_{11}G_{12}); \\
D_{040} &= (G_{12}G_{23} + C_{22}G_{23} + C_{22}G_{12}); \\
D_{004} &= (G_{13}G_{23} + G_{13}C_{33} + G_{23}C_{33}); \\
D_{220} &= G_{12}G_{13} + C_{22}G_{13} + G_{12}G_{23} + \\
&\quad + C_{11}G_{23} + G_{12}^2 + C_{11}C_{22} - (C_{12} + G_{12})^2; \\
D_{202} &= G_{13}G_{23} + G_{13}^2 + G_{12}C_{33} + C_{11}C_{33} + \\
&\quad + G_{13}G_{12} + C_{11}G_{23} - (C_{13} + G_{13})^2; \\
D_{022} &= G_{13}G_{23} + G_{23}^2 + G_{12}C_{33} + C_{22}C_{33} + \\
&\quad + G_{23}G_{12} + C_{22}G_{13} - (C_{23} + G_{23})^2; \\
D_{200} &= (G_{13} + G_{12} + C_{11}); \\
D_{020} &= (G_{23} + G_{12} + C_{22}); \\
D_{002} &= (G_{13} + G_{23} + C_{33}).
\end{aligned}$$

Введенные в дифференциальном операторе (5) постоянные коэффициенты, определяющие структуру основного разрешающего уравнения (4), явным образом выражены через девять упругих констант. При дальнейшем исследовании уравнения (4) такое представление, в сочетании с предложенной процедурой выделения характерных слагаемых путем ее развития для материалов каждого вида упругой симметрии, позволяет выделить общий (главный) член, а также определить количество и вид дополнительных характерных слагаемых. Общий член единой структуры присутствует всегда и при переходе к изотропии дает классическое представление решения исходной основной системы уравнений движения в перемещениях [4]. Дополнительные же характерные слагаемые при переходе к изотропии тождественно обращаются в нуль и для каждого вида анизотропии имеют свою структуру.

Именно коэффициенты при дифференциальных операторах в характерных слагаемых и являются основой для определения обобщающих критериев сравнения анизотропных материалов по упругим свойствам. По разработанной методике для материалов гексагональной, кубической и орторомбической структуры получены явные выражения для характерных обобщенных коэффициентов через упругие постоянные и проведены численные исследования для широкого набора различных анизотропных материалов.

Таким образом, задача определения обобщенных критериев для сравнения анизотропных материалов по упругим свойствам свелась к задаче исследования влияния характера анизотропии на вид основного разрешающего уравнения. По сути, достаточно исследовать структуру дифференциального оператора (5) и получить специальные структурные формы его представления с выделением общего структурного слагаемого и дополнительных характерных слагаемых. Это значит, что для каждого случая упругой симметрии в операторе (5) необходимо выделить слагаемое, которое при переходе к изотропному материалу даст полное разрешающее уравнение для изотропного материала. Все остальные слагаемые при этом должны тождественно обратиться в нуль.

Ниже приведены реализация обсуждаемой методики и результаты исследований для наиболее распространенных материалов орторомбической, гексагональной и кубической структуры.

2. ПОСТРОЕНИЕ БАЗОВЫХ СТРУКТУРНЫХ ФОРМ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ КРИТЕРИЕВ СРАВНЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Исследование структуры основного дифференциального оператора, ее анализ приводят к построению трех основных форм для дифференциального оператора (5), обладающих нужными свойствами. Они соответствуют трем базовым направлениям, которые определяются плоскостями упругой симметрии материала и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 L^{(1)} = & (C_{11}\partial_1^2 + C_{22}\partial_2^2 + C_{33}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2) \times \\
 & \times (G_{12}\partial_1^2 + G_{12}\partial_2^2 + G_{23}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2) \times \\
 & \times (G_{13}\partial_1^2 + G_{23}\partial_2^2 + G_{13}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2) + \\
 & + (K_{12}^{(1)}\partial_1^2\partial_2^2 + K_{13}^{(1)}\partial_1^2\partial_3^2 + K_{23}^{(1)}\partial_2^2\partial_3^2) \times \\
 & \times (G_{23}\partial_1^2 + G_{13}\partial_2^2 + G_{12}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2) + \\
 & + (G_{13} - G_{23})K_{12}^{(1)}(\partial_1^4\partial_2^2 - \partial_1^2\partial_2^4) + \\
 & + (G_{12} - G_{23})K_{13}^{(1)}(\partial_1^4\partial_3^2 - \partial_1^2\partial_3^4) + \\
 & + (G_{12} - G_{13})K_{23}^{(1)}(\partial_2^4\partial_3^2 - \partial_2^2\partial_3^4) + \\
 & + (G_{13} - G_{23})(G_{23} - G_{12}) \times \\
 & \times [(C_{22} - G_{12})\partial_2^2 + (C_{33} - G_{13})\partial_3^2] + \\
 & + K_{123}^{(1)}\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2,
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 L^{(2)} = & (C_{11}\partial_1^2 + C_{22}\partial_2^2 + C_{33}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2) \times \\
 & \times (G_{12}\partial_1^2 + G_{12}\partial_2^2 + G_{13}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2) \times \\
 & \times (G_{13}\partial_1^2 + G_{23}\partial_2^2 + G_{23}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2) + \\
 & + (K_{12}^{(2)}\partial_1^2\partial_2^2 + K_{13}^{(2)}\partial_1^2\partial_3^2 + K_{23}^{(2)}\partial_2^2\partial_3^2) \times \\
 & \times (G_{23}\partial_1^2 + G_{13}\partial_2^2 + G_{12}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2) + \\
 & + (G_{13} - G_{23})K_{12}^{(2)}(\partial_1^4\partial_2^2 - \partial_1^2\partial_2^4) + \\
 & + (G_{12} - G_{23})K_{13}^{(2)}(\partial_1^4\partial_3^2 - \partial_1^2\partial_3^4) + \\
 & + (G_{12} - G_{13})K_{23}^{(2)}(\partial_2^4\partial_3^2 - \partial_2^2\partial_3^4) + \\
 & + (G_{23} - G_{13})(G_{13} - G_{12}) \times \\
 & \times [(C_{11} - G_{12})\partial_1^2 + (C_{33} - G_{23})\partial_3^2] + \\
 & + K_{123}^{(2)}\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2,
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 L^{(3)} = & (C_{11}\partial_1^2 + C_{22}\partial_2^2 + C_{33}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2) \times \\
 & \times (G_{13}\partial_1^2 + G_{12}\partial_2^2 + G_{13}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2) \times \\
 & \times (G_{12}\partial_1^2 + G_{23}\partial_2^2 + G_{23}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2) + \\
 & + (K_{12}^{(3)}\partial_1^2\partial_2^2 + K_{13}^{(3)}\partial_1^2\partial_3^2 + K_{23}^{(3)}\partial_2^2\partial_3^2) \times \\
 & \times (G_{23}\partial_1^2 + G_{13}\partial_2^2 + G_{12}\partial_3^2 - \rho C_0^{-1}\partial_t^2) + \\
 & + (G_{13} - G_{23})K_{12}^{(3)}(\partial_1^4\partial_2^2 - \partial_1^2\partial_2^4) + \\
 & + (G_{12} - G_{23})K_{13}^{(3)}(\partial_1^4\partial_3^2 - \partial_1^2\partial_3^4) + \\
 & + (G_{12} - G_{13})K_{23}^{(3)}(\partial_2^4\partial_3^2 - \partial_2^2\partial_3^4) + \\
 & + (G_{23} - G_{12})(G_{12} - G_{13}) \times \\
 & \times [(C_{11} - G_{13})\partial_1^2 + (C_{22} - G_{23})\partial_2^2] + \\
 & + K_{123}^{(3)}\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Полученные базовые структурные формы (6) – (8) содержат три группы характерных обобщенных коэффициентов, которые обладают нужным свойством обращаться в нуль при переходе к изотропному материалу. Их аналитические представления приведены ниже:

$$\begin{aligned}
 K_{12}^{(1)} = & C_{11}C_{22} - \\
 & - G_{12}(C_{11} + C_{22} + 2C_{12}) - C_{12}^2, \\
 K_{13}^{(1)} = & C_{11}C_{33} - \\
 & - G_{13}(C_{11} + C_{33} + 2C_{13}) - C_{13}^2, \\
 K_{23}^{(1)} = & C_{22}C_{33} - \\
 & - G_{23}(C_{22} + C_{33} + 2C_{23}) - \\
 & - C_{23}^2 - (G_{12} - G_{23})(G_{13} - G_{23}), \\
 K_{123}^{(1)} = & C_{11}C_{22}C_{33} + 2G_{12}G_{13}G_{23} + \\
 & + 2(C_{12} + G_{12})(C_{13} + G_{13})(C_{23} + G_{23}) - \\
 & - G_{12}K_{12}^{(1)} - G_{13}K_{13}^{(1)} - G_{23}K_{23}^{(1)} - \\
 & - C_{11}[(C_{23} + G_{23})^2 + G_{12}G_{13}] - \\
 & - C_{22}[(C_{13} + G_{13})^2 + \\
 & + G_{13}(G_{12} + G_{23} - G_{13})] - \\
 & - C_{33}[(C_{12} + G_{12})^2 + \\
 & + G_{12}(G_{13} + G_{23} - G_{12})],
 \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{aligned}
K_{12}^{(2)} &= C_{11}C_{22} - \\
&\quad - G_{12}(C_{11} + C_{22} + 2C_{12}) - C_{12}^2, \\
K_{13}^{(2)} &= C_{11}C_{33} - \\
&\quad - G_{13}(C_{11} + C_{33} + 2C_{13}) - \\
&\quad - C_{13}^2 - (G_{12} - G_{13})(G_{23} - G_{13}), \\
K_{23}^{(2)} &= C_{22}C_{33} - \\
&\quad - G_{23}(C_{22} + C_{33} + 2C_{23}) - C_{23}^2, \\
K_{123}^{(2)} &= C_{11}C_{22}C_{33} + 2G_{12}G_{13}G_{23} + \\
&\quad + 2(C_{12} + G_{12})(C_{13} + G_{13})(C_{23} + G_{23}) - \\
&\quad - G_{12}K_{12}^{(2)} - G_{13}K_{13}^{(2)} - G_{23}K_{23}^{(2)} - \\
&\quad - C_{11}[(C_{23} + G_{23})^2 + \\
&\quad + G_{23}(G_{12} + G_{13} - G_{23})] - \\
&\quad - C_{22}[(C_{13} + G_{13})^2 + G_{12}G_{23}] - \\
&\quad - C_{33}[(C_{12} + G_{12})^2 + \\
&\quad + G_{12}(G_{23} + G_{13} - G_{12})], \\
K_{12}^{(3)} &= C_{11}C_{22} - \\
&\quad - G_{12}(C_{11} + C_{22} + 2C_{12}) - \\
&\quad - C_{12}^2 - (G_{13} - G_{12})(G_{23} - G_{12}), \\
K_{13}^{(3)} &= C_{11}C_{33} - \\
&\quad - G_{13}(C_{11} + C_{33} + 2C_{13}) - C_{13}^2, \\
K_{23}^{(3)} &= C_{22}C_{33} - \\
&\quad - G_{23}(C_{22} + C_{33} + 2C_{23}) - C_{23}^2, \\
K_{123}^{(3)} &= C_{11}C_{22}C_{33} + 2G_{12}G_{13}G_{23} + \\
&\quad + 2(C_{12} + G_{12})(C_{13} + G_{13})(C_{23} + G_{23}) - \\
&\quad - G_{12}K_{12}^{(3)} - G_{13}K_{13}^{(3)} - G_{23}K_{23}^{(3)} - \\
&\quad - C_{11}[(C_{23} + G_{23})^2 + \\
&\quad + G_{23}(G_{13} + G_{12} - G_{23})] - \\
&\quad - C_{22}[(C_{13} + G_{13})^2 + \\
&\quad + G_{13}(G_{23} + G_{12} - G_{13})] - \\
&\quad - C_{33}[(C_{12} + G_{12})^2 + G_{13}G_{23}].
\end{aligned}
\tag{9b}$$

Очевидно, эти представления справедливы для любого анизотропного материала, у которого не более девяти независимых упругих констант. Каждое базовое направление характеризуется четырьмя обобщенными характеристиками, что имеет вполне понятный физический смысл. При этом определенные характеристики, соответствующие разным базовым направлениям, совпадают, а именно: $K_{12}^{(1)} = K_{12}^{(2)}$, $K_{13}^{(1)} = K_{13}^{(3)}$, $K_{23}^{(2)} = K_{23}^{(3)}$. При уменьшении количества независимых упругих констант представления (9а)–(9с) естественным образом упрощаются. Так, для материалов гексагональной структуры, когда $C_{22} = C_{11}$, $C_{23} = C_{13}$, $G_{23} = G_{13}$, $C_{12} = C_{11} - 2G_{12}$ и независимыми остаются пять упругих констант C_{11} , C_{33} , C_{13} , G_{12} , G_{13} , имеем

$$\begin{aligned}
K_{12}^{(1)} &= K_{12}^{(2)} \equiv 0, \\
K_{12}^{(3)} &= (G_{12} - G_{13})(G_{13} - G_{12}), \\
K_{13}^{(1)} &= K_{13}^{(2)} = K_{13}^{(3)} = \\
&= K_{23}^{(1)} = K_{23}^{(2)} = K_{23}^{(3)} = \\
&= C_{11}C_{33} - G_{13}(C_{11} + C_{33} + 2C_{13}) - \\
&\quad - C_{13}^2 = K_{13},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{123}^{(1)} &= K_{123}^{(2)} = 2(G_{12} - G_{13})K_{13}, \\
K_{123}^{(3)} &= 2(G_{12} - G_{13})K_{13} + (C_{33} - G_{12})K_{12}^{(3)}.
\end{aligned}$$

Для материалов кубической структуры остаются всего три независимые упругие константы ($C = C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $\lambda = C_{12} = C_{13} = C_{23}$, $G = G_{12} = G_{13} = G_{23}$) и в этом случае

$$\begin{aligned}
K_{12}^{(1)} &= K_{13}^{(1)} = K_{23}^{(1)} = \\
&= K_{12}^{(2)} = K_{13}^{(2)} = K_{23}^{(2)} = \\
&= K_{12}^{(3)} = K_{13}^{(3)} = K_{23}^{(3)} = \\
&= (C + \lambda)(C - \lambda - 2G), \\
K_{123}^{(1)} &= K_{123}^{(2)} = K_{123}^{(3)} = \\
&= (C - \lambda - 2G) \times \\
&\quad \times [(C + \lambda)(C - G) - 2(\lambda + G)^2].
\end{aligned}$$

Для проведения расчетов и определения обобщенных критериев для сравнения анизотропных

материалов введем в рассмотрение относительные осредненные обобщенные характеристики следующего вида:

$$\begin{aligned}
 K_{12}^{(S)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{K_{12}^{(1)}}{C_{11}G_{12}} + \frac{K_{12}^{(2)}}{C_{22}G_{12}} + \frac{K_{12}^{(3)}}{C_{33}G_{13}} \right), \\
 K_{13}^{(S)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{K_{13}^{(1)}}{C_{11}G_{12}} + \frac{K_{13}^{(2)}}{C_{22}G_{12}} + \frac{K_{13}^{(3)}}{C_{33}G_{13}} \right), \\
 K_{23}^{(S)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{K_{23}^{(1)}}{C_{11}G_{12}} + \frac{K_{23}^{(2)}}{C_{22}G_{12}} + \frac{K_{23}^{(3)}}{C_{33}G_{13}} \right), \\
 K_{123}^{(S)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{K_{123}^{(1)}}{C_{11}G_{12}G_{13}} + \frac{K_{123}^{(2)}}{C_{22}G_{12}G_{23}} + \frac{K_{123}^{(3)}}{C_{33}G_{13}G_{23}} \right).
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Правильность именно такого осреднения подтверждается важным свойством, заключающимся в сохранении усредняемыми характеристиками одинакового знака для всех базовых направлений.

Ниже в табл. 1–3 для ряда различных материалов орторомбической, тетрагональной, гексагональной и кубической структуры приведены упругие константы [5] (они внесены в таблицы с точностью до множителя 10^{10} Н/м²), а также вычисленные значения предложенных обобщенных характеристик.

ВЫВОДЫ

Анализ поведения обобщенных характеристик позволяет определить методику и критерии сравнения различных анизотропных материалов. Согласно ней, критерием разделения всех материалов на группы является свойство одинакового сочетания знаков у трех обобщенных характеристик $K_{12}^{(S)}$, $K_{13}^{(S)}$, $K_{23}^{(S)}$. Модуль четвертой характеристики $K_{123}^{(S)}$ служит обобщенной мерой степени анизотропии упругих свойств. Он используется как для

сравнения и упорядочивания материалов в пределах каждой группы, так и для сравнения анизотропных материалов из разных групп. При этом знак $K_{123}^{(S)}$ является критерием разделения каждой группы еще на две подгруппы.

Достоверно известно, что характерных групп всего восемь. Поэтому в каждой из таблиц все материалы сгруппированы и упорядочены по ним, а внутри каждой группы разделены на подгруппы. В табл. 1, где приведены материалы орторомбической и тетрагональной структуры, представлены практически все группы. Это вполне объяснимо, так как обобщенные характеристики $K_{12}^{(S)}$, $K_{13}^{(S)}$ и $K_{23}^{(S)}$ в этом случае могут принимать любые значения. В табл. 2 для материалов гексагональной структуры характерных групп всего две. Это закономерно, так как в этом случае обобщенная характеристика $K_{12}^{(S)}$ имеет постоянный знак и может не учитываться. Две другие обобщенные характеристики $K_{13}^{(S)}$ и $K_{23}^{(S)}$ равны между собой, что определяет всего две возможных комбинации знаков (и соответственно двух характерных групп с делением на подгруппы). У представленных в табл. 3 материалов кубической структуры совпадают уже три обобщенные характеристики $K_{12}^{(S)}$, $K_{13}^{(S)}$, $K_{23}^{(S)}$ а четвертая – $K_{123}^{(S)}$ – всегда положительна. Поэтому здесь групп всего две и нет деления на подгруппы.

Разработанная методика учитывает только упругие свойства материала, но не его плотность. Поэтому при решении задач акустики (например, при исследовании волноводных свойств анизотропных материалов) этот независимый параметр, входящий в выражения для фазовых скоростей упругих волн, тоже необходимо принимать во внимание. Для изотропных материалов в этом нет необходимости, так как фазовые скорости явным образом зависят от плотности материала [4] и их отношение содержит только упругие константы.

1. Анин Б. Д., Остросаблин Н. И. Анизотропия упругих свойств материалов // Прикл. мех. техн. физ.– 2008.– 49, N 6.– С. 131–151.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела.– М.: Наука, 1977.– 416 с.
3. Моїсеєнко В. О. Хвильові потенціали для просторових хвильоводних об'єктів із анізотропних матеріалів // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки.– 2007.– N 3.– С. 94–98.
4. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
5. Блистанов А. А., Бондаренко В. С., Чкалова В. В. и др. Акустические кристаллы. Справочник.– М.: Наука, 1982.– 632 с.

Табл. 1. Матеріали орторомбической и тетрагональной структуры

Материал	C_{11}	C_{22}	C_{33}	G_{12}	G_{13}	G_{23}	C_{12}	C_{13}	C_{23}	$K_{12}^{(s)}$	$K_{13}^{(s)}$	$K_{23}^{(s)}$	$K_{123}^{(s)}$
BaTiO ₃	15.0000	15.0000	14.6000	4.3000	4.2000	4.2000	6.6000	6.6000	6.6000	-0.0682	-0.0681	-0.0681	0.0047
TiO ₃	27.3000	27.3000	48.4000	19.4000	12.5000	12.5000	17.6000	14.9000	14.9000	-2.3908	-0.3971	-0.3971	0.3409
TeO ₂	5.6000	5.6000	10.5100	6.6800	2.7000	2.7000	5.1600	2.7200	2.7200	-4.2966	-0.1989	-0.1989	1.6316
KN ₈ H ₄ O ₄	1.8720	1.3690	1.8330	0.6520	0.7470	0.5150	0.8290	1.1850	0.6770	-1.1704	-2.2429	-0.2568	1.7021
Gd ₂ (MoO ₄) ₃	5.8500	7.3000	10.3000	3.3000	2.6000	2.4500	1.0500	2.8500	3.2000	-0.3873	-0.2023	0.2660	0.1257
Na ₂ CoGeO ₄	10.5040	9.4730	10.0690	3.5720	3.6800	1.7070	7.1470	5.7090	5.9240	-2.0500	-1.2376	0.1879	2.2667
LiGaO ₂	14.0000	12.0000	15.0000	6.8000	4.9000	5.9000	1.4000	2.6000	2.7000	-0.3690	0.4245	-0.2170	0.0744
LiGaO ₂	14.0000	12.0000	14.0000	6.9000	4.7400	5.7100	1.4000	2.8000	3.1000	-0.4214	0.3528	-0.3112	0.1249
α-HfO ₂	2.9950	5.3860	4.3530	1.7360	1.1060	1.8350	1.1540	0.5140	2.1930	-0.6306	0.5767	-1.2014	0.2034
Сетчатая соль	2.5500	3.8100	3.7100	0.9790	0.3210	1.3400	1.4100	1.1600	1.4600	-0.5669	2.6354	-0.9091	2.3739
BaTiO ₃	16.6000	16.6000	16.2000	4.4800	4.2900	4.2900	7.6600	7.7500	7.7500	-0.0068	0.0227	0.0227	0.0019
Ba ₂ Si ₂ TiO ₃	14.0000	14.0000	8.3000	5.9000	3.3000	3.3000	3.6000	2.4000	2.4000	-0.5810	0.4253	0.4253	0.8055
Ba ₂ Si ₂ TiO ₃	16.9500	16.9500	9.9900	6.9400	3.1700	3.1700	5.7700	4.3600	4.3600	-1.1430	0.6037	0.6037	1.9002
CdSe	7.4200	7.4200	8.4770	4.4289	1.3400	1.3400	4.5300	3.8600	3.8600	-3.8195	0.8116	0.8116	4.1570
Hg ₂ Cl ₂	1.8925	1.8925	8.0370	1.2250	0.8456	0.8456	1.7192	1.5630	1.5630	-2.7749	0.5814	0.5814	-11.3172
PZT-5	12.1000	12.1000	11.1000	2.2600	2.1100	2.1100	7.5400	7.5200	7.5200	0.0300	-0.1130	-0.1130	-0.0261
Ba ₂ NaNb ₅ O ₁₅	23.9000	24.7000	13.5000	7.6000	6.6000	6.5000	1.0400	5.0000	5.2000	1.4963	-0.1115	-0.0700	-1.1402
MgBaF ₂	10.4000	8.1000	12.9700	2.4700	5.5100	3.2100	2.8700	6.3700	3.5800	0.5428	-3.7063	0.1464	1.7817
SbSI	3.0900	3.2700	4.9500	0.6000	0.9200	2.2100	0.9600	0.9300	1.5800	1.7446	2.3210	-4.9203	3.8483
Li ₂ GeO ₃	13.4000	14.2000	15.7000	3.6000	5.6000	4.4000	3.3000	3.1000	4.6000	0.9630	0.0376	0.5288	0.4970
NH ₄ N ₂ PO ₄ , ADR	6.1700	6.1700	3.2800	0.5920	0.8500	0.8500	0.7200	1.9400	1.9400	8.8709	1.5537	1.5537	3.5072
NH ₄ N ₂ PO ₄ , ADR	6.8770	6.8770	3.4020	0.6020	0.8620	0.8620	0.4060	2.0380	2.0380	10.5297	1.8867	1.8867	4.8331
KN ₂ PO ₄ , KDP	8.0000	8.0000	8.0000	0.6100	1.2800	1.2800	3.4000	4.1000	4.1000	6.5036	2.7428	2.7428	8.8180
KN ₂ PO ₄ , KDP	7.4000	7.4000	6.8000	0.6300	1.3500	1.3500	1.8000	2.7000	2.7000	7.1407	2.9712	2.9712	10.5559
PZT-4	13.9000	13.9000	11.5000	2.5600	2.5600	2.5600	7.8000	7.4300	7.4300	0.6392	0.0475	0.0475	-0.0645

Табл. 2. Матеріали гексагональної структури

Матеріал	C_{11}	C_{22}	C_{33}	G_{12}	G_{13}	G_{23}	C_{12}	C_{13}	C_{23}	$K_{12}^{(s)}$	$K_{12}^{(s)}$	$K_{13}^{(s)}$	$K_{123}^{(s)}$
ЦТС-19	11.2000	11.2000	10.6000	2.3900	2.4900	2.4900	6.4200	6.2200	6.2200	-0.0001	-0.1962	-0.1962	0.0153
Ba Ti O ₃	15.0000	15.0000	14.6000	4.2000	4.4000	4.4000	6.6000	6.6000	6.6000	-0.0002	-0.2031	-0.2031	0.0180
Be	29.2300	29.2300	33.6400	13.2800	16.2500	16.2500	2.6700	1.4000	1.4000	-0.0054	-0.1997	-0.1997	0.0663
Cd	12.1200	12.1200	4.4500	3.6550	1.8000	1.8000	4.8100	4.4200	4.4200	-0.1432	-0.6426	-0.6426	-1.3877
Zn	16.3500	16.3500	5.3100	6.8550	3.7800	3.7800	2.6400	5.1700	5.1700	-0.1570	-1.3729	-1.3729	-2.1696
PZT-5	12.1000	12.1000	1.1000	2.2800	2.1100	2.1100	7.5400	7.5200	7.5200	-0.0042	17.2524	-17.2524	-2.7777
β -кварц(Si O ₂)	9.0000	9.0000	9.1500	5.0000	3.6500	3.6500	-1.0000	12.8000	12.8000	-0.0182	-5.9801	-5.9801	-4.4443
PZT-4	13.9000	13.9000	11.5000	3.0500	2.5600	2.5600	7.8000	7.4300	7.4300	-0.0027	0.0427	0.0427	0.0116
PZT-4	13.9000	13.9000	11.5000	3.0600	2.5600	2.5600	7.7800	7.4300	7.4300	-0.0028	0.0426	0.0426	0.0120
Zn O	20.9718	20.9718	21.0941	4.4289	4.2449	4.2449	12.1140	10.5130	10.5130	-0.0001	0.6980	0.6980	0.0600
Cd S	9.1300	9.1300	9.6230	1.6250	1.5600	1.5600	5.8800	4.9700	4.9700	-0.0001	1.2351	1.2351	0.1024
Cd S	8.1600	8.1600	8.0800	1.6050	1.4300	1.4300	4.9500	4.7900	4.7900	-0.0009	0.4838	0.4838	0.1144
β -кварц(Si O ₂)	11.1200	11.1200	10.6300	5.0000	3.5900	3.5900	1.1200	2.9000	2.9000	-0.0174	0.2257	0.2257	0.1501
β -кварц(Si O ₂)	11.6400	11.6400	11.0700	5.0100	3.6000	3.6000	1.6200	3.2900	3.2900	-0.0166	0.2492	0.2492	0.1672
Cd S	9.0700	9.0700	9.3800	1.6300	1.5040	1.5040	5.8100	5.1000	5.1000	-0.0004	1.0980	1.0980	0.1820
Cd Se	7.4200	7.4200	8.4770	1.4450	1.3400	1.3400	4.5300	3.8600	3.8600	-0.0003	1.4967	1.4967	0.2329
Cd Se	7.4100	7.4100	8.3600	1.4450	1.3170	1.3170	4.5200	3.9300	3.9300	-0.0005	1.4234	1.4234	0.2741
α -Zn S	12.2200	12.2200	13.8500	3.1600	2.8230	2.8230	5.9000	4.6000	4.6000	-0.0010	1.2513	1.2513	0.2951
α -Zn S	12.4200	12.4200	14.0000	3.2030	2.8640	2.8640	6.0140	4.5540	4.5540	-0.0010	1.2884	1.2884	0.3014
α -Zn S	12.3400	12.3400	13.9600	3.2450	2.8850	2.8850	5.8500	4.5500	4.5500	-0.0011	1.2322	1.2322	0.3035
Pb ₅ (Ge ₄)(VO ₄) ₂	7.1000	7.1000	8.4000	2.5000	1.7000	1.7000	2.1000	3.3000	3.3000	-0.0149	0.6809	0.6809	0.5890
Mg	5.8800	5.8800	5.9600	1.9250	1.1400	1.1400	2.0300	2.0200	2.0200	-0.0302	1.3885	1.3885	1.8052
Pb TiO ₃	14.2700	14.2700	13.1000	5.5500	5.5800	5.5800	3.1700	2.4000	2.4000	0.0000	0.0217	0.0217	-0.0002
Эклогит	17.1500	17.1500	20.8100	5.5500	5.8500	5.8500	6.0500	5.9000	5.9000	-0.0002	0.3019	0.3019	-0.0316
Co	30.7000	30.7000	35.8000	7.1000	7.5500	7.5500	16.5000	10.2700	10.2700	-0.0002	1.4439	1.4439	-0.1731

Табл. 3. Матеріали кубічної структури

Матеріал	C_{11}	C_{22}	C_{33}	G_{12}	G_{13}	G_{23}	C_{12}	C_{13}	C_{23}	$K_{12}^{(s)}$	$K_{12}^{(s)}$	$K_{13}^{(s)}$	$K_{123}^{(s)}$
BaF ₂	9.0400	9.0400	9.0400	2.5300	2.5300	2.5300	4.0600	4.0600	4.0600	-0.0458	-0.0458	-0.0458	0.0022
Y ₃ Ga ₅ O ₁₂	29.0300	29.0300	29.0300	9.5470	9.5470	9.5470	11.7300	11.7300	11.7300	-0.2638	-0.2638	-0.2638	0.0755
Y ₃ Al ₅ O ₁₂	33.3200	33.3200	33.3200	11.5000	11.5000	11.5000	11.0700	11.0700	11.0700	-0.0869	-0.0869	-0.0869	0.0085
MgO	29.5900	29.5900	29.5900	15.3900	15.3900	15.3900	9.5400	9.5400	9.5400	-0.9220	-0.9220	-0.9220	1.0524
SrTiO ₃	31.7600	31.7600	31.7600	12.3500	12.3500	12.3500	10.2500	10.2500	10.2500	-0.3417	-0.3417	-0.3417	0.1357
Si	16.5000	16.5000	16.5000	7.9300	7.9300	7.9300	6.4000	6.4000	6.4000	-1.0081	-1.0081	-1.0081	1.1904
Ge	13.0000	13.0000	13.0000	6.7000	6.7000	6.7000	4.9000	4.9000	4.9000	-1.0892	-1.0892	-1.0892	1.4200
GaP	11.4000	11.4000	11.4000	7.0430	7.0430	7.0430	3.4750	3.4750	3.4750	-1.1414	-1.1414	-1.1414	1.7045
GaAs	12.2600	12.2600	12.2600	6.0000	6.0000	6.0000	5.7100	5.7100	5.7100	-1.3314	-1.3314	-1.3314	1.9974
LiF	11.2000	11.2000	11.2000	6.3200	6.3200	6.3200	4.5600	4.5600	4.5600	-1.3359	-1.3359	-1.3359	2.1438
ZnSe	8.7200	8.7200	8.7200	3.9200	3.9200	3.9200	5.2400	5.2400	5.2400	-1.7806	-1.7806	-1.7806	3.2800
β -ZnS	10.4600	10.4600	10.4600	4.6130	4.6130	4.6130	6.5300	6.5300	6.5300	-1.8648	-1.8648	-1.8648	3.5450
Y ₃ Fe ₅ O ₁₂	26.9000	26.9000	26.9000	7.6400	7.6400	7.6400	10.8000	10.8000	10.8000	0.1504	0.1504	0.1504	0.0240
Bi ₄ (SiO ₄) ₃	13.5700	13.5700	13.5700	5.1800	5.1800	5.1800	2.2700	2.2700	2.2700	0.2118	0.2118	0.2118	0.0565
NaF	9.7100	9.7100	9.7100	2.8000	2.8000	2.8000	2.4300	2.4300	2.4300	0.7502	0.7502	0.7502	0.6440
NaCl	4.9110	4.9110	4.9110	1.2840	1.2840	1.2840	1.2850	1.2850	1.2850	1.0396	1.0396	1.0396	1.2118
CsI	2.4570	2.4570	2.4570	0.6290	0.6290	0.6290	0.6470	0.6470	0.6470	1.1087	1.1087	1.1087	1.3729
TlCl	4.4916	4.4916	4.4916	0.9370	0.9370	0.9370	1.8020	1.8020	1.8020	1.2197	1.2197	1.2197	1.5239
NaI	3.0400	3.0400	3.0400	0.7200	0.7200	0.7200	0.9000	0.9000	0.9000	1.2601	1.2601	1.2601	1.7288
TlBr	3.7800	3.7800	3.7800	0.7560	0.7560	0.7560	1.4800	1.4800	1.4800	1.4504	1.4504	1.4504	2.1545
CsBr	3.0720	3.0720	3.0720	0.7250	0.7250	0.7250	0.8000	0.8000	0.8000	1.4291	1.4291	1.4291	2.2584
Bi ₁₂ GeO ₂₀	12.0000	12.0000	12.0000	2.5000	2.5000	2.5000	3.9000	3.9000	3.9000	1.6430	1.6430	1.6430	2.8574
AgBr	5.6300	5.6300	5.6300	0.7200	0.7200	0.7200	3.3000	3.3000	3.3000	1.9607	1.9607	1.9607	3.5146
CsCl	3.6400	3.6400	3.6400	0.8000	0.8000	0.8000	0.9200	0.9200	0.9200	1.7538	1.7538	1.7538	3.3815
CaF ₂	16.4200	16.4200	16.4200	3.3700	3.3700	3.3700	4.3980	4.3980	4.3980	1.9872	1.9872	1.9872	4.2768
TlBr-Tl, KRS-6	4.2000	4.2000	4.2000	0.7600	0.7600	0.7600	1.3500	1.3500	1.3500	2.3125	2.3125	2.3125	5.5854
TlBr-Tl, KRS-5	3.6000	3.6000	3.6000	0.5550	0.5550	0.5550	1.5000	1.5000	1.5000	2.5270	2.5270	2.5270	6.3240
Bi ₁₂ SiO ₂₀	12.8000	12.8000	12.8000	2.5000	2.5000	2.5000	2.8000	2.8000	2.8000	2.4375	2.4375	2.4375	6.5313
AgCl	6.0100	6.0100	6.0100	0.6250	0.6250	0.6250	3.6200	3.6200	3.6200	2.9226	2.9226	2.9226	7.6808