ISSN 1028-7507 Акустичний вісник. 2008. Том 11, N 4. С. 36 – 43

УДК 539.3

УСТАНОВИВШИЕСЯ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИЗМЫ ПРИ ЗАДАННЫХ НА ГРАНИЦЕ СМЕЩЕНИЯХ

С. О. ПАПКОВ

Севастопольский национальный технический университет

Получено 05.11.2007 ⋄ Пересмотрено 02.12.2008

Получено решение первой граничной задачи о вынужденных колебаниях упругой призмы прямоугольного поперечного сечения. С помощью метода суперпозиции задача сведена к квазирегулярной бесконечной линейной системе. На основе достаточного признака существования ограниченного решения для квазирегулярной бесконечной системы рассчитаны собственные частоты призмы. Исследована применимость приближенного решения при упрощенных граничных условиях.

Отримано розв'язок першої граничної задачі про вимушені коливання пружної призми прямокутного перерізу. За допомогою методу суперпозиції задачу зведено до квазирегулярної нескінченної лінійної системи. На базі достатньої умови існування обмеженого розв'язку нескінченної системи розраховані власні частоти призми. Досліджено умови застосування наближеного розв'язку при спрощених граничних умовах.

A solution of the first boundary problem for forced vibrations of an elastic prism is obtained. By a superposition method, this problem is reduced to a quasi-regular infinite linear system. The prism eigenfrequencies were calculated on the basis of the sufficient condition of existence of bounded solution for a quasi-regular infinite system, Application range of the approximate method at simple boundary conditions has been studied.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании динамических задач теории упругости одна из наиболее важных проблем заключается в построении собственных частот и соответствующих им форм колебаний. Для ряда канонических бесконечных тел (полупространство, бесконечный слой, бесконечный цилиндр) точные значения собственных частот определяются из трансцендентных дисперсионных уравнений, которые удается получить с помощью нормальных мод. Однако даже для простейших конечных тел (в частности, для прямоугольной призмы) отражение упругих волн от границы представляет собой довольно сложный процесс, что приводит к трудностям при отыскании их нормальных колебаний и определении собственных частот. Невозможность точного аналитического решения подобной задачи для ограниченных тел (за исключением сферы) при силовых и кинематических граничных условиях стала очевидной на рубеже XIX–XX веков, что привело к появлению частных и приближенных решений (их обзор можно найти в [1, 2]).

Для некоторых величин отношений сторон призмы точное решение задачи о собственных колебаниях было получено Ламе, в общем же случае исторически сложились два подхода к его построению: метод однородных решений [3] и метод суперпозиции. В рамках метода суперпозиции наиболее полно задача о силовых граничных условиях для прямоугольной призмы исследована в монографии В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко [1]. Для кинематических граничных условий данная задача рассматривалась в работе [4].

J. R. Hutchinson (Хатчинсон) в своей статье [5] получил собственные частоты и формы колебаний упругого конечного жестко защемленного цилиндра и показал, что данные характеристики могут быть удовлетворительно описаны с помощью более простого (точного) решения для бесконечного цилиндра при упрощенных граничных условиях (simple boundary conditions). Для построения собственных значений конечного цилиндра автор использует модификацию метода суперпозиции, удерживая в общем решении для бесконечного цилиндра и слоя конечное число слагаемых. Из однородных граничных условий следует однородная конечная система линейных алгебраических уравнений, равенство нулю определителя которой дает дисперсионное уравнение для приближенных значений собственных частот.

В этой работе на основе метода суперпозиции построено и исследовано решение задачи о собственных колебаниях жестко защемленной прямоугольной призмы. Получено точное решение в случае упрощенных граничных условий (по терминологии [5]). Проведено сравнение двух полученных решений, что позволило выделить диапазон применимости приближенного решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

В безразмерных координатах $x=X/h$, $y=Y/h$ (рис. 1) задача сводится к определению собственных частот и функций уравнений упругости для установившихся колебаний:

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \left(\frac{\pi\Omega}{2}\right)^2 \vec{u} = 0, \qquad (1)$$

где ν – коэффициент Пуассона; Ω – безразмерная частота колебаний, при однородных условиях (fixed boundary conditions, далее обозначаемых как FBC) для компонент вектора смещений $\vec{u}=u_x\vec{i}+u_y\vec{j}$:

$$u_x|_{x=\pm 1} = u_y|_{x=\pm 1} = u_x|_{y=\pm\eta} = u_y|_{y=\pm\eta} = 0. \quad (2)$$

При упрощенных граничных условиях (SBC) на гранях $x=\pm 1$ граничные условия аналогичны соотношениям (2), а при $y=\pm\eta$ полагаем равными нулю нормальную составляющую вектора смещений и касательные напряжения:

$$u_x|_{x=\pm 1} = u_y|_{x=\pm 1} = u_y|_{y=\pm\eta} = \sigma_{xy}|_{y=\pm\eta} = 0. \quad (3)$$

При построении общего решения уравнений упругости в случае осесимметричных колебаний использовался метод разделения переменных для уравнений скалярного и векторного потенциалов, который позволяет записать известные решения [1] для слоя $x\in[-1;1]$:

$$u_x^I = C_0 \sin\Omega_1 x + \sum_{m=1}^{\infty}(C_m \mathrm{sh}\, q_{1m}x + D_m \mathrm{sh}\, q_{2m}x)\cos\beta_m y,$$

$$u_y^I = -\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m\frac{\beta_m}{q_{1m}}\mathrm{ch}\, q_{1m}x + D_m\frac{q_{2m}}{\beta_m}\mathrm{ch}\, q_{2m}x\right)\sin\beta_m y$$

и для слоя $y\in[-\eta;\eta]$:

$$u_x^{II} = -\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\frac{\alpha_m}{p_{1m}}\mathrm{ch}\, p_{1m}y + B_m\frac{p_{2m}}{\alpha_m}\mathrm{ch}\, p_{2m}y\right)\sin\alpha_m x,$$

$$u_y^{II} = A_0\sin\Omega_1 y + \sum_{m=1}^{\infty}(A_m \mathrm{sh}\, p_{1m}y + B_m \mathrm{sh}\, p_{2m}y)\cos\alpha_m x.$$

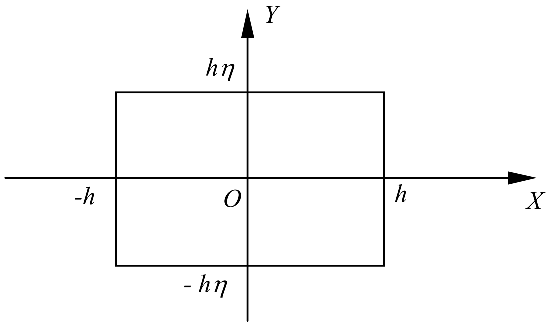

Рис. 1. Геометрия задачи

Здесь

$$\alpha_m = \pi m, \qquad \beta_m = \frac{m\pi}{\eta};$$

$$q_{l,m}^2 = \beta_m^2 - \Omega_l^2, \qquad p_{l,m}^2 = \alpha_m^2 - \Omega_l^2 \qquad (l=1,2);$$

$$\Omega_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1-2\nu}{2-2\nu}}\,\Omega, \qquad \Omega_2 = \frac{\pi\Omega}{2}.$$

2. РЕШЕНИЕ ПРИ УПРОЩЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Граничные условия (3) дают возможность искать решение в форме $\vec{u}^S = u_x^I\vec{i} + u_y^I\vec{j}$. Действительно, в этом случае касательные напряжения имеют вид

$$\frac{\sigma_{xy}^S}{2G} = -\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m\beta_m \mathrm{sh}\, q_{1m}x + D_m\frac{\beta_m^2+q_{2m}^2}{2\beta_m}\,\mathrm{sh}\, q_{2m}x\right)\sin\beta_m y$$

и в силу выбора $\beta_m=m\pi/\eta$ равны нулю на гранях $y=\pm\eta$ вместе с нормальной составляющей вектора смещений.

Равенство нулю вектора смещений на гранях $x=\pm 1$ приводит к системе соотношений следующего вида ($y\in[-\eta;\eta]$):

$$\begin{gathered} C_0\sin\Omega_1 + \sum_{m=1}^{\infty}(C_m \mathrm{sh}\, q_{1m} + D_m \mathrm{sh}\, q_{2m})\cos\beta_m y = 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m\frac{\beta_m}{q_{1m}}\,\mathrm{ch}\, q_{1m} + D_m\frac{q_{2m}}{\beta_m}\,\mathrm{ch}\, q_{2m}\right)\sin\beta_m y = 0. \end{gathered} \qquad (4)$$

Каждое из равенств (4) представляет собой разложение по полной системе тригонометрических функций, следовательно,

$$C_0\sin\Omega_1=0;$$

$$\begin{cases} C_m \operatorname{sh} q_{1m}+D_m \operatorname{sh} q_{2m}=0, \\ C_m\dfrac{\beta_m}{q_{1m}}\operatorname{ch} q_{1m}+D_m\dfrac{q_{2m}}{\beta_m}\operatorname{ch} q_{2m}=0. \end{cases}$$

Нетривиальное решение задачи возможно лишь в том случае, когда

$$\sin\Omega_1=0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \operatorname{sh} q_{1m} & \operatorname{sh} q_{2m} \\ \dfrac{\beta_m}{q_{1m}}\operatorname{ch} q_{1m} & \dfrac{q_{2m}}{\beta_m}\operatorname{ch} q_{2m} \end{vmatrix}=0.$$

Выпишем дисперсионное уравнение для определения собственных частот задачи при упрощенных граничных условиях:

$$\begin{aligned} &\sin\Omega_1=0 && \text{при} \quad m=0, \\ &\frac{q_{2m}}{\beta_m}\operatorname{sh} q_{1m}\operatorname{ch} q_{2m}- \\ &-\frac{\beta_m}{q_{1m}}\operatorname{ch} q_{1m}\operatorname{sh} q_{2m}=0 && \text{при} \quad m=1,2,\ldots \end{aligned} \qquad (5)$$

Если обозначить через $\Omega^S_{m,n}$ n-ое собственное значение в уравнении (5) номера m, то собственные моды колебаний имеют вид

$$\vec{u}^S_{0,m}=\sin\Omega_1 x\,\vec{i};$$

$$\vec{u}^S_{n,m}=\frac{\operatorname{sh} q_{1m}\operatorname{sh} q_{2m}x-\operatorname{sh} q_{1m}x\operatorname{sh} q_{2m}}{\operatorname{sh} q_{1m}}\times$$
$$\times\cos\beta_m y\,\vec{i}+ \qquad (6)$$
$$+\frac{\beta_m^2\operatorname{ch} q_{1m}x\operatorname{sh} q_{2m}-q_{1m}q_{2m}\operatorname{sh} q_{1m}\operatorname{ch} q_{2m}x}{\beta_m q_{1m}\operatorname{sh} q_{1m}}\times$$
$$\times\sin\beta_m y\,\vec{j}.$$

3. РЕШЕНИЕ В СЛУЧАЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Для определения спектра граничной задачи (2) общее решение уравнений (1) выбираем в виде суммы решений для полос $x\in[-1;1]$ и $y\in[-\eta;\eta]$:

$$\vec{u}=(u_x^I+u_x^{II})\vec{i}+(u_y^I+u_y^{II})\vec{j}.$$

Тогда краевые условия (2) приводят к следующей системе функциональных равенств:

$$\mathrm{I}:\quad C_0\sin\Omega_1+\sum_{m=1}^{\infty}(C_m\operatorname{sh} q_{1m}+D_m\operatorname{sh} q_{2m})\times$$
$$\times\cos\beta_m y=0;$$

$$\mathrm{II}:\quad A_0\sin\Omega_1 y-\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m\frac{\beta_m}{q_{1m}}\operatorname{ch} q_{1m}+\right.$$
$$\left.+D_m\frac{q_{2m}}{\beta_m}\operatorname{ch} q_{2m}\right)\sin\beta_m y+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(A_m\operatorname{sh} p_{1m}y+B_m\operatorname{sh} p_{2m}y)=0;$$

$$\mathrm{III}:\quad C_0\sin\Omega_1 x-\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\frac{\alpha_m}{p_{1m}}\operatorname{ch} p_{1m}\eta+\right.$$
$$\left.+B_m\frac{p_{2m}}{\alpha_m}\operatorname{ch} p_{2m}\eta\right)\sin\alpha_m x+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(C_m\operatorname{sh} q_{1m}x+D_m\operatorname{sh} q_{2m}x)=0;$$

$$\mathrm{IV}:\quad A_0\sin\Omega_1\eta+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\operatorname{sh} p_{1m}\eta+B_m\operatorname{sh} p_{2m}\eta)\times$$
$$\times\cos\alpha_m x=0.$$

Равенства I и IV позволяют сразу найти $C_0\sin\Omega_1=0$, $A_0\sin\Omega_1\eta=0$ и выразить связь

$$C_m=-\frac{\operatorname{ch} q_{2m}}{\operatorname{ch} q_{1m}}D_m, \qquad A_m=-\frac{\operatorname{ch} p_{2m}\eta}{\operatorname{ch} p_{1m}\eta}B_m. \qquad (7)$$

Нетрудно заметить, что значения частот

$$\Omega_n^0(\eta)=\frac{2n}{\eta}\sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}},$$

которые являются решением уравнения $\sin\Omega_1\eta=0$, также дают $q_{1n}=0$. В частности, при $\eta=1$ на нулях $\sin\Omega_1=0$ появляются значения $p_{1n}=0$. Таким образом, здесь требуется иное представление общего решения задачи. Непосредственной проверкой можно показать, что частоты $\Omega_n^0(\eta)$ не есть собственными.

Функциональные равенства II и III после разложения входящих в них функций по полной системе тригонометрических функций ($l=1,2$)

$$\operatorname{sh} p_{lm} y = \frac{2\operatorname{sh} p_{lm}\eta}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\beta_n}{\beta_n^2 + p_{lm}^2} \sin\beta_n y;$$

$$\sin\Omega_1 y = \frac{2\sin\Omega_1\eta}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\beta_n}{q_{1n}^2} \sin\beta_n y;$$

$$\operatorname{sh} q_{lm} x = 2\operatorname{sh} q_{lm} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\alpha_n}{\alpha_n^2 + q_{lm}^2} \sin\alpha_n x;$$

$$\sin\Omega_1 x = 2\sin\Omega_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\alpha_n}{p_{1n}^2} \sin\alpha_n x$$

и подстановки (7) приводят к парной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} \tilde{\Delta}_m x_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} y_n, \\ \Delta_m y_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} x_n, \\ m \in \mathsf{N}, \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$x_n = \frac{(-1)^n B_n \operatorname{sh} p_{2n}\eta}{\eta}; \qquad y_n = (-1)^n D_n \operatorname{sh} q_{2n};$$

$$a_{mn} = \frac{2\Omega_1^2\alpha_m}{(1-2\nu)} \frac{1}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)};$$

$$b_{mn} = \frac{2\Omega_1^2\beta_m}{(1-2\nu)} \frac{1}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)};$$

$$\Delta_m = \frac{\beta_m}{q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m} - \frac{q_{2m}}{\beta_m} \operatorname{cth} q_{2m};$$

$$\tilde{\Delta}_m = \eta\left(\frac{\alpha_m}{p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m}\eta - \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \operatorname{cth} p_{2m}\eta\right).$$

Заметим, что с точностью до множителя $\operatorname{sh} q_{1m} \operatorname{sh} q_{2m}$ величина Δ_m совпадает с дисперсионным уравнением для определения собственных частот (5) при упрощенных граничных условиях.

При исследовании бесконечных систем линейных алгебраических уравнений зачастую удается доказать существование ограниченного (главного) решения, используя то, что в некотором функциональном пространстве оператор, соответствующий бесконечной матрице в правой части системы, является сжимающим. В частности, это выполняется, если бесконечная система

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} z_n + b_m, \qquad m \in \mathsf{N}$$

удовлетворяет условиям регулярности

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{mn}| < 1, \quad m \in \mathsf{N}.$$

Если указанное условие выполняется не с первого, а с некоторого номера $m > N^*$, то бесконечная система называется квазирегулярной и ее анализ можно свести к рассмотрению некоторой конечной системы [6] порядка N^*.

Чтобы исследовать регулярность (7), используем сумму ряда из [7]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{2a^2}.$$

Тогда значения рядов из модулей коэффициентов системы (8) можно вычислить точно:

$$\begin{aligned} S_{2m-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_{mn}}{\tilde{\Delta}_m}\right| = \frac{1}{|\tilde{\Delta}_m|} \sum_{n=1}^{N_a} (|a_{mn}| - a_{mn}) + \\ &+ \frac{2\alpha_m}{|\tilde{\Delta}_m|}\left(\frac{\eta}{2p_{2m}} \operatorname{cth} p_{2m}\eta - \frac{\eta}{2p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m}\eta + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2p_{1m}^2} - \frac{1}{2p_{2m}^2}\right), \\ S_{2m} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{b_{mn}}{\Delta_m}\right| = \frac{1}{|\Delta_m|} \sum_{n=1}^{N_b} (|b_{mn}| - b_{mn}) + \\ &+ \frac{2\beta_m}{|\Delta_m|}\left(\frac{1}{2q_{2m}} \operatorname{cth} q_{2m} - \frac{1}{2q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2q_{1m}^2} - \frac{1}{2q_{2m}^2}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$N_a = [\eta\sqrt{\max(0, (\Omega_2/\pi)^2 - 1)}],$$

$$N_b = [\sqrt{\max(0, (\Omega_2/\pi)^2 - 1/\eta^2)}] \;\; —$$

номера, начиная с которых коэффициенты рядов становятся строго положительными ($[\cdot]$ обозначает целую часть действительного числа).

При $m \to \infty$ можно найти следующие асимптотические представления для величин в последней формуле ($l=1,2$):

$$\begin{gathered} q_{lm} \approx \beta_m - \frac{\Omega_l^2}{2\beta_m}; \qquad p_{lm} \approx \alpha_m - \frac{\Omega_l^2}{2\alpha_m}; \\ \tilde{\Delta}_m \approx \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\alpha_m^2}\eta; \qquad \Delta_m \approx \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\beta_m^2}. \end{gathered} \tag{10}$$

Табл 1. Локализация первой собственной частоты осесимметричных колебаний призмы при $\nu=0.25$, $\eta=2$

N_T	1	5	20	50
$\widehat{\Omega}_{N_T}$	1.9243	1.9251	1.92534	1.925370
$\breve{\Omega}_{N_T}$	1.9256	1.9255	1.92539	1.925374

Подставив выражения (10) в формулу (9), получим оценку при $m\to\infty$:

$$S_m=\frac{1}{3-4\nu}+O\left(\frac{1}{m}\right). \qquad (11)$$

Из (11) следует, что полученная система (8) является квазирегулярной. Действительно, при $\nu\neq 0.5$ для любого значения частоты Ω всегда можно найти номер N^*, начиная с которого $S_m<1$.

В статье [8] был предложен алгоритм вычисления собственных значений второй основной краевой задачи для упругой призмы на основе проверки следующей теоремы – достаточного признака существования ограниченного решения для квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Квазирегулярная бесконечная система

$$z_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}z_n+b_k \quad (k\in\mathsf{N}),$$

коэффициенты и свободные члены которой при заданном значении N_T удовлетворяют условиям:

а) $\det[\delta_{kn}-a_{kn}]_{k,n=1}^{N_T}\neq 0$;

б) $\max\limits_{j=1,\ldots,N_T}\sum\limits_{i=1}^{N_T}|c_{ij}|\sum\limits_{n=N_T+1}^{\infty}|a_{in}|<1+f_{N_T}$,

где $\{c_{ji}\}_{j,i=1}^{N_T}$ – матрица, обратная к матрице $\{\delta_{kn}-a_{kn}\}_{k,n=1}^{N_T}$;

в) $|b_k|<B_{N_T}\sum\limits_{n=1}^{N_T}|a_{kn}| \quad (k=N_T+1,N_T+2,\ldots)$,

имеет ограниченное решение

$$|z_k|\le\begin{cases}\dfrac{B_{N_T}+M_{N_T}}{L_{N_T}}(1+f_{N_T})+M_{N_T}, & k=1,\ldots,N_T,\\[2ex] \dfrac{B_{N_T}+M_{N_T}}{L_{N_T}}, & k>N_T.\end{cases}$$

Здесь δ_{kn} – символы Кронекера;

$$f_{N_T}=\inf_{k>N_T}\frac{\rho_k}{\sum\limits_{n=1}^{N_T}|a_{kn}|};$$

$$\rho_k=1-\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|; \quad M_{N_T}=\max_{k=1,\ldots,N_T}\sum_{n=1}^{N_T}|c_{kn}b_n|;$$

$$L_{N_T}=1+f_{N_T}-\max_{j=1,\ldots,N_T}\sum_{i=1}^{N_T}|c_{ji}|\sum_{n=N_T+1}^{\infty}|a_{in}|.$$

Применив данную теорему к бесконечной системе (8), посредством варьирования N_T можно локализовать интервал частоты $[\widehat{\Omega}_{N_T};\breve{\Omega}_{N_T}]$, на котором не выполняется условие (б). Проверка данного условия главным образом сводится к численному обращению конечной матрицы, так как входящие в него ряды даются аналитически формулами (9). Увеличение значения N_T позволяет локализовать собственную частоту с требуемой точностью. В табл. 1 представлен пример локализации первой собственной частоты осесимметричных колебаний призмы при $\nu=0.25$, $\eta=2$.

По сравнению с подходом, использованным в статье [5], где собственные значения определялись как нули определителя редуцированной системы, использование данной теоремы более эффективно, так как позволяет указать погрешность в вычислении собственной частоты колебаний.

После нахождения собственной частоты Ω_n^F, собственные формы колебаний строятся по нетривиальному решению бесконечной системы (8) согласно формулам

$$\begin{aligned}u_x=&-\eta\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{p_{2m}}{\alpha_m}\frac{\operatorname{ch}p_{2m}y}{\operatorname{sh}p_{2m}\eta}-\frac{\alpha_m}{p_{1m}}\frac{\operatorname{ch}p_{1m}y}{\operatorname{sh}p_{1m}\eta}\right)\times\\&\times(-1)^m x_m\sin\alpha_m x+\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sh}q_{2m}x}{\operatorname{sh}q_{2m}}-\frac{\operatorname{sh}q_{1m}x}{\operatorname{sh}q_{1m}}\right)\times\\&\times(-1)^m y_m\cos\beta_m y,\end{aligned} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}u_y=&\,\eta\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sh}p_{2m}y}{\operatorname{sh}p_{2m}\eta}-\frac{\operatorname{sh}p_{1m}y}{\operatorname{sh}p_{1m}\eta}\right)\times\\&\times(-1)^m x_m\cos\alpha_m x-\\&-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q_{2m}}{\beta_m}\frac{\operatorname{ch}q_{2m}x}{\operatorname{sh}q_{2m}}-\frac{\beta_m}{q_{1m}}\frac{\operatorname{ch}q_{1m}x}{\operatorname{sh}q_{1m}}\right)\times\\&\times(-1)^m y_m\sin\beta_m y.\end{aligned}$$

Для построения нетривиального решения $\{x_m,y_m\}$ бесконечной системы используем замену переменных, предложенную в работе [9]:

$$\begin{gathered} x_m = \sum_{j=1}^{N^*} (\mathrm{X}_m^{j1} x_j + \mathrm{X}_m^{j2} y_j), \\ y_m = \sum_{j=1}^{N^*} (\mathrm{Y}_m^{j1} x_j + \mathrm{Y}_m^{j2} y_j), \\ m > N^*. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $N^* = N^*(\Omega, \eta)$ – номер, начиная с которого для (8) выполняются условия регулярности.

Подстановка (13) в (8) приводит к совокупности бесконечных систем с одинаковой матрицей относительно введенных новых неизвестных:

$$\begin{gathered} \begin{cases} \mathrm{X}_m^{j1} = \dfrac{1}{\tilde{\Delta}_m} \displaystyle\sum_{n=N^*+1}^{\infty} a_{mn} \mathrm{Y}_n^{j1}, \\ \mathrm{Y}_m^{j1} = \dfrac{1}{\Delta_m} \displaystyle\sum_{n=N^*+1}^{\infty} b_{mn} \mathrm{X}_n^{j1} + \dfrac{b_{mj}}{\Delta_m}; \end{cases} \\ \begin{cases} \mathrm{X}_m^{j2} = \dfrac{1}{\tilde{\Delta}_m} \displaystyle\sum_{n=N^*+1}^{\infty} a_{mn} \mathrm{Y}_n^{j2} + \dfrac{a_{mj}}{\tilde{\Delta}_m}, \\ \mathrm{Y}_m^{j2} = \dfrac{1}{\Delta_m} \displaystyle\sum_{n=N^*+1}^{\infty} b_{mn} \mathrm{X}_n^{j2}; \end{cases} \\ m > N^*, \qquad j = 1, 2, \ldots, N^* \end{gathered} \tag{14}$$

и к конечной однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно первых неизвестных $\{x_m, y_m\}_{m=1}^{N^*}$, коэффициенты которой зависят от решений (14):

$$\begin{gathered} x_m = \sum_{n=1}^{N^*} \left(\sum_{j=N^*+1}^{\infty} \frac{a_{mj}}{\tilde{\Delta}_m} \mathrm{Y}_j^{n1} \right) x_n + \\ + \sum_{n=1}^{N^*} \left(\frac{a_{mn}}{\tilde{\Delta}_m} + \sum_{j=N^*+1}^{\infty} \frac{a_{mj}}{\tilde{\Delta}_m} \mathrm{Y}_j^{n2} \right) y_n; \\ y_m = \sum_{n=1}^{N^*} \left(\frac{b_{mn}}{\Delta_m} + \sum_{j=N^*+1}^{\infty} \frac{b_{mj}}{\Delta_m} \mathrm{X}_j^{n1} \right) x_n + \\ + \sum_{n=1}^{N^*} \left(\sum_{j=N^*+1}^{\infty} \frac{b_{mj}}{\Delta_m} \mathrm{X}_j^{n2} \right) y_n; \\ m = 1, 2, \ldots, N^*. \end{gathered} \tag{15}$$

Согласно асимптотической формуле (11), бесконечные системы (14) являются вполне регулярными. Очевидно, что их свободные члены ограничены (для регулярной части уравнений (8) величины Δ_m, $\tilde{\Delta}_m$ заведомо отличны от нуля). Таким образом, согласно известной теореме [9], каждая из систем (14) имеет единственное ограниченное решение и одинаково эффективно решается на всем диапазоне изменения частоты колебаний. Разрешимость бесконечной системы (8) оказывается связанной с разрешимостью конечной системы (15). Равенство нулю определителя $\det M$ системы (15) дает необходимое условие для нахождения собственной частоты. Для параметров задачи $\nu = 0.25$, $\eta = 2$ значения этого определителя представлены на рис. 2. Нуль достигается в точке $\Omega^* = 1.925$.

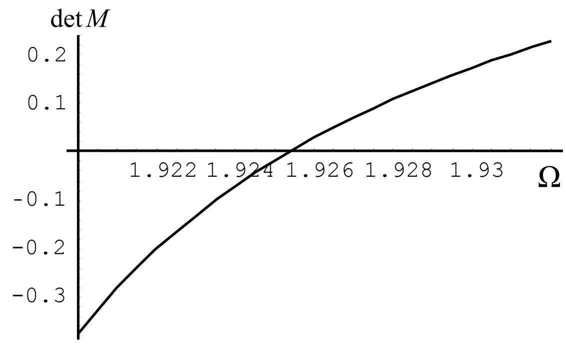

Рис. 2. Значения определителя системы (15) вблизи нуля при $\nu = 0.25$, $\eta = 2$

Данный подход оказывается менее точным и более трудоемким по сравнению с локализацией собственной частоты на основе теоремы существования, так как каждая точка на графике рис. 2 находится на основе решения бесконечных систем (14) при заданной частоте вынужденных колебаний Ω, что требует соответствующей точности решения этих систем.

Так как на собственной частоте колебаний система (15) имеет ранг, меньший, чем ее порядок, то можно найти ее базисные решения и по формулам замены (13) построить нетривиальное решение бесконечной системы (8).

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Использование описанной методики позволяет построить спектр вынужденных установившихся колебаний прямоугольной призмы под действием смещений (FBC) и при упрощенных граничных условиях (SBC). На рис. 3 представлена зависимость собственных значений от геометрии призмы η для коэффициента Пуассона $\nu = 0.25$. Из графи-

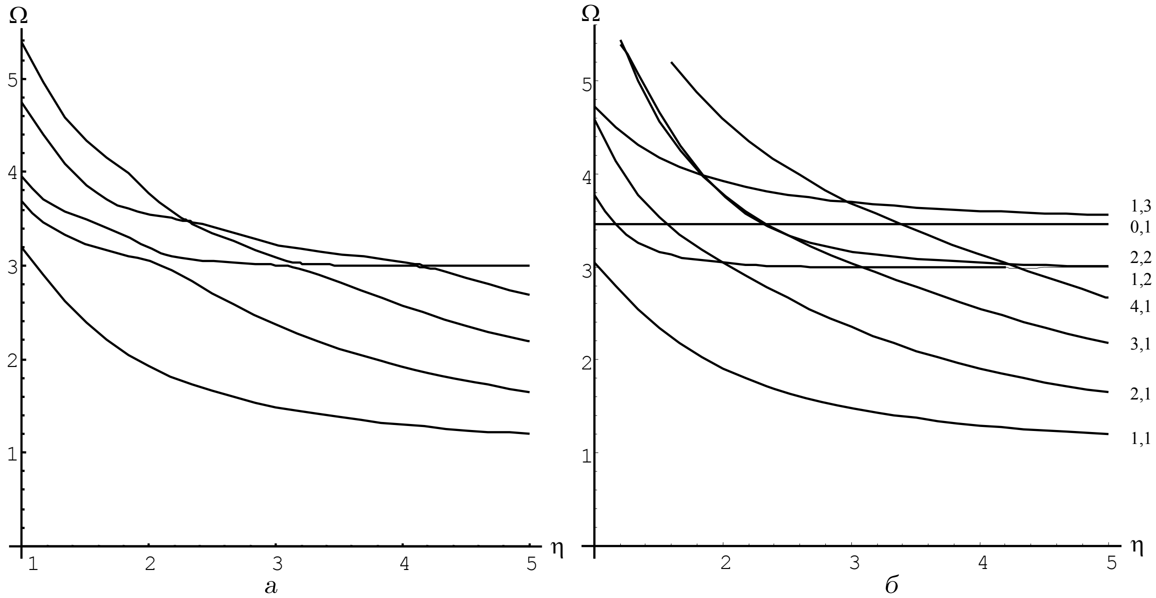

Рис. 3. Зависимость собственных значений $\Omega_{m,n}$ от геометрического параметра η для коэффициента Пуассона $\nu=0.25$:
а – кинематические граничные условия FBC; б – упрощенные граничные условия SBC

Табл 2. Сравнение первых пяти собственных частот для двух типов граничных условий $\nu=0.25$ (без учета нулевой моды)

	$\eta=1$		$\eta=3$		$\eta=5$	
	FBC	SBC	FBC	SBC	FBC	SBC
Ω_1	3.191	3.043	1.487	1.482	1.199	1.197
Ω_2	3.686	3.771	2.369	2.347	1.651	1.647
Ω_3	3.950	4.591	3.005	2.993	2.184	2.174
Ω_4	4.742	4.722	3.091	3.043	2.687	2.667
Ω_5	5.397	5.557	3.226	3.165	2.992	2.989

Табл 3. Сравнение собственных частот Ω_n^* с частотами задачи о возбуждении колебаний напряжениями Ω_n^F при $\nu=0.25$, $\eta=1$

n	1	2	3	4
Ω_n^F	3.191	3.686	3.950	4.742
Ω_n^*	1.415	1.627	2.733	3.271

ка следует, что расположение спектральных кривых для двух типов краевых условий имеет качественное сходство. Главное отличие заключается в том, что, в отличие от кривых SBC, кривые FBC не пересекаются. Кроме того, для граничных условий (2) нет аналога нулевой моды. Нижняя собственная частота FBC оказывается соответствующей ветви дисперсионного уравнения (5) с номером 1,1. Второй собственной частоте FBC на интервале $\eta\in[1;2.1]$ можно поставить в соответствие ветвь с номером 1,2 и для $\eta>2.1$ – ветвь с номером 2,1. Аналогично, третьей собственной частоте FBC на $\eta\in[1;2,1]$ соответствует ветвь с номером 2,1; на $\eta\in[2,1;3,2]$ – ветвь с номером 1,2, и при $\eta>3.2$ – ветвь с номером 3,1. При этом сходство между дисперсионными кривыми возрастает по мере увеличения отношения сторон призмы η.

В табл. 2 представлено сравнение первых пяти собственных частот задачи FBC с собственными значениями SBC (без учета нулевой моды) для коэффициента Пуассона $\nu=0.25$. Из этих данных следует, что с увеличением отношения сторон призмы η собственные значения при упрощенных граничных условиях (3) приближаются к собственным значениям задачи (2). При $\eta\geq5$ отличие между собственными значениями одного порядкового номера данных краевых задач не превосходит 0.3 %. Подобная картина наблюдается и для собственных функций, что позволяет использовать для их представления при больших η более удобные формулы (6).

Расположение кривых на рис. 3, а качественно напоминает случай возбуждения колебаний призмы заданными на границе напряжениями [1]: пер-

ISSN 1028-7507 Акустичний вісник. 2008. Том 11, N 4. С. 36 – 43

вая собственная частота монотонно убывает, следующие за ней частоты образуют "плато", соответствующее краевому резонансу. Однако в данном случае собственные частоты Ω_n^F лежат выше соответствующих собственных частот Ω_n^* задачи о возбуждении колебаний напряжениями. При $\nu=0.25$; $\eta=1$ значения первых четырех собственных частот для этих задач приведены в табл. 3.

Зависимость первой собственной частоты для разных значений η от материала призмы дана на рис. 4. С увеличением коэффициента Пуассона ν наблюдается возрастание первой собственной частоты призмы для любых соотношений ее сторон. Если для квадратного сечения данная зависимость почти линейна, то с ростом η нелинейная составляющая все более увеличивается.

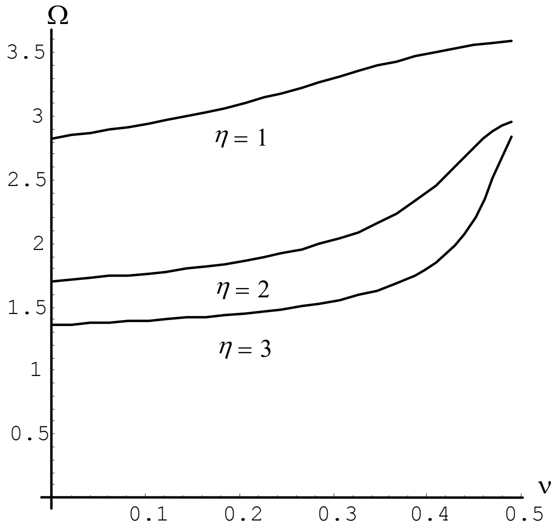

Рис. 4. Зависимость первой собственной частоты от материала призмы для разных значений η

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Представлен новый алгоритм вычисления собственных частот первой краевой задачи для установившихся колебаний прямоугольной призмы на основе теоремы о существовании ограниченного решения для квазирегулярной бесконечной системы. Этот подход, в отличие от использовавшихся ранее, позволяет оценить точность полученных результатов.

2. Исследована зависимость собственных частот призмы от отношения ее сторон и материала. Сделан вывод о качественном подобии спектров собственных частот призмы в случае силовых и кинематических граничных условий.

3. Получено точное решение задачи о собственных значениях упругой призмы в случае упрощенных граничных условий. Из численных результатов следует, что при достаточно большом отношении сторон призмы ($\eta \geq 5$) спектральные характеристики первой краевой задачи могут быть удовлетворительно описаны с помощью более удобного решения для упрощенных граничных условий. При меньших значениях η решение для упрощенных граничных условий дает значительную погрешность, следовательно, для описания спектральных характеристик призмы необходимо использовать точное решение.

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.

2. *Григолюк Э. Н., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.– М.: ВИНИТИ, 1973.– 272 с.

3. *Mindlin R. D., Medick M. A.* Extensional vibrations of elastic plates // J. Appl. Mech.– 1959.– **26**, N 4.– P. 541–569.

4. *Власов А. Г.* Метод переопределенных рядов в некоторых краевых задачах математической физики // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.– 1959.– **3**.– С. 403–463.

5. *Hutchinson J. R.* Axisymmetric vibrations of a solid elastic cylinder encased in a rigid container // J. Acoust. Soc. Amer.– 1967.– **42**, N 2.– P. 398–402.

6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.– М.: Наука, 1984.– 752 с.

7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции.– М.: Наука, 1981.– 800 с.

8. *Папков С. О., Чехов В. Н.* О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе // Доп. НАН України.– 2004.– N 10.– С. 57–62.

9. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа.– М.-Л.: Гостехиздат, 1952.– 695 с.