

УДК 539.3

ПОШИРЕННЯ ФРОНТІВ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ У НЕОДНОРІДНИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

В. І. ГУЛЯЄВ, Ю. О. ЗАЄЦЬ

Національний транспортний університет, Київ

Отримано 30.11.2009

Розглянуто поширення і трансформування фронтів розривних квазіпродовжніх і квазіпоперечних хвиль у неоднорідних трансверсально-ізотропних пружних середовищах. Запропоновано методику побудови еволюціонуючої системи променів і фронтів. Для різних значень параметрів анізотропії й неоднорідності пружного середовища досліджено формування геометричних особливостей у вигляді каустик.

Рассмотрено явление распространения и перестройки фронтов квазипродольных и квазипоперечных разрывных волн в неоднородных трансверсально-изотропных упругих средах. Предложена методика построения эволюционирующей системы лучей и фронтов. Для различных значений параметров анизотропии и неоднородностей упругой среды исследовано образование геометрических особенностей в виде каустик.

A problem on propagation and transformation of discontinuous wave fronts in transversally isotropic heterogeneous elastic media has been considered. The technique for construction of the evolving system of rays and fronts has been proposed. Formation of the caustic-type geometric singularities has been investigated for various values of anisotropy and heterogeneity parameters of the elastic medium.

ВСТУП

Вивчення поширення розривних хвиль в акустичних середовищах є одним з найактуальніших напрямків механіки нестационарних хвильових процесів. Особливості, які виникають при протіканні таких динамічних явищ, спричинені короткочасністю існування зони високоінтенсивного тиску. Як правило, на початковому етапі він сконцентрований у малій області, що примикає до вільної граничної поверхні середовища. У результаті дії зазначеного тиску високої амплітуди виникає рухома поверхня фронту розриву першої похідної від функції переміщень. В лінійній теорії пружності її найчастіше називають слабкою ударною (або розривною) хвилею [1]. З просуванням хвильового фронту межа виділеної для розрахунку області еволюціонує. Тому при аналізі таких явищ традиційні методи розв'язання крайових задач математичної фізики виявляються малоефективними.

Зазвичай при дослідженні слабких ударних хвиль найбільшу увагу приділяють питанням геометричної побудови поверхонь розривів польових функцій і обчисленню значень цих розривів, які дають найбільш повну інформацію про фронт слабкої ударної хвилі, та інтенсивності імпульсу, що переноситься нею, в кожній точці фронту. Тому для постановки і розв'язування таких задач важливу роль відіграють методи геометричної оптики, зокрема, нульове наближення променевого методу, яке забезпечує хороший кількісний опис ши-

рокого кола хвильових явищ різної фізичної природи [2], зокрема, пружних розривних хвиль [3].

Застосування променевого методу в теорії поширення фронтів розривних польових функцій у пружних середовищах дає змогу відслідковувати перебудову поверхонь фронтів і встановлювати ефекти виникнення на них геометричних особливостей. При цьому виникає необхідність побудови променевої системи координат, в якій сукупність координатних поверхонь співпадає з еволюціонуючими поверхнями фронтів [1–3]. Такий підхід здійснюється через представлення відповідного розв'язку хвильового рівняння членами ряду за променевою координатою. Для його реалізації конструюється система рівнянь ейконалу й транспортних рівнянь. Перше з них є нелінійним рівнянням з частинними похідними, яке описує поверхню фронту і систему променів (тому воно називається кінематичним рівнянням). Транспортні ж рівняння складають систему нелінійних рівнянь з частинними похідними. Вони визначають польові функції на поверхні фронту й позаду неї (тому вони є динамічними). Очевидно, що розриви польових функцій на поверхні фронту описуються нульовими членами променевих рядів [3].

Як один з найбільш успішних прикладів застосування променевої теорії до задач фізики відзначимо дослідження особливостей і перебудов каустик і фазових фронтів у геометричній оптиці [4].

Каустиками або каустичними поверхнями називаються об'єднані сімейства променів. Як

наслідок основної властивості обвідної на каустиці функціональний визначник перетворення променевих координат у декартові $J(\alpha, \beta, \tau) = \partial(x_1, x_2, x_3)/\partial(\alpha, \beta, \tau)$ вироджується в нуль. Це означає, що рівняння сімейства променів $x_k = x_k(\alpha, \beta, \tau)$ не може бути однозначно розв'язним відносно змінних α, β, τ . Отже, положення каустик визначається з системи рівнянь [2]

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(\alpha, \beta, \tau), \\ J(\alpha, \beta, \tau) &= 0 \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1)$$

Якщо з системи (1) виключити параметр τ , то рівняння каустик можуть бути записані в параметричній формі:

$$x_k^{\text{кауст}} = x_k(\alpha, \beta, \tau(\alpha, \beta)) \equiv x_k^{\text{кауст}}(\alpha, \beta), \quad (2)$$

де $\tau = \tau(\alpha, \beta)$ знаходиться з рівняння $J(\alpha, \beta, \tau) = 0$. Зі співвідношень (2) випливає, що положення точки на каустиці можна описати тими самими координатами α і β , що і на поверхні променя.

Важлива роль каустичних поверхонь у хвильових задачах визначається тим, що вони дозволяють скласти якісну картину поведінки променів. За формою каустик можна відновити сімейство променів. Особливо просто це робиться в однорідному середовищі, де промені – прямі лінії, дотичні до каустик. При цьому, оскільки на обвідній сімейства променів (каустиці) відбувається їх фокусування, інтенсивність фізичного поля уздовж каустик необмежено зростає (в ідеалізованій постановці), а на фазовому фронті утворюються особливості. В процесі руху поверхні фронту ці особливості ковзають уздовж каустик і в окремі моменти часу, пов'язані з виникненням особливостей уже на каустиках, перебудовуються. Тому задача про побудову каустик і областей біфуркацій хвильових фронтів має велике прикладне значення як в оптиці, так і в теорії ударних хвиль у пружних середовищах.

Класифікація основних типів каустик з'явилася порівняно нещодавно з розвитком теорії особливостей диференційованих відображень [5]. Каустичні поверхні, які не мають особливих точок, називаються простими або неособливими. В околі простої каустики перетинаються два дотичні до неї промені (рис. 1). Каустики, в околі яких перетинаються більша кількість променів, уже мають особливості (точки загострення, петлі та ін.) Наприклад, всередині каустики, що має форму дзюба (одна точка загострення), перетинаються три промені (рис. 2).

За допомогою нульового наближення променевих методу в роботах [6–11] розв'язані задачі

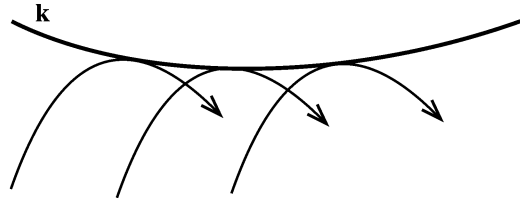


Рис. 1. Перетин променів в околі простої каустики

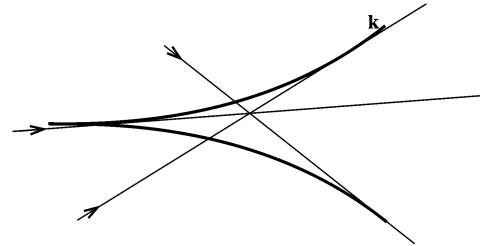


Рис. 2. Перетин променів всередині каустики, яка має одну точку загострення

про поширення розривних хвиль і їхнє фокусування опуклими та увігнутими лінзами в однорідних трансверсально-ізотропних пружних середовищах. Показано, що якщо середовище однорідне, то промені будуть прямолінійними, але в загальному випадку не ортогональними до поверхонь фронтів. Однак завдання побудови системи променів і фронтів ще більше ускладнюється, якщо анізотропне середовище неоднорідне. Тоді промені стають криволінійними, а аналіз процесу формування їхніх систем і фронтів можливий тільки за допомогою методів комп'ютерного моделювання. Одержані результати можуть бути використані в сейсмології, яка вивчає поширення пружних хвиль у тектонічних структурах, неоднорідних у силу неоднорідного попереднього напруження.

У даній роботі виконано дослідження перебудови хвильових фронтів у неоднорідних пружних середовищах при деяких заданих законах зміни параметрів пружності уздовж просторових координат.

1. МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Нехай неоднорідне трансверсально-ізотропне пружне середовище в прямокутній системі координат Ox_1, x_2, x_3 характеризується тензором пружних сталей:

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda - l \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu - p \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & \mu - m & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

l, m, p – параметри анізотропії, які відрізняють середовище від ізотропного з коефіцієнтами Ламе λ і μ ; Ox_2 – вісь симетрії.

Виходячи з умов ідеальної пружності, збурений стан такого середовища описується рівняннями руху (4)

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} + \sum_{k,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_k} \frac{\partial u_p}{\partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

де $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq}(x_1, x_2, x_3)/\rho(x_1, x_2, x_3)$ – приведені параметри пружності; $c_{ik,pq}$ – функції, які виражаються через елементи змінного тензора $C(\alpha, \beta)$ [3]; u_1, u_2, u_3 – компоненти вектора пружних переміщень.

Розв'язок системи рівнянь (4) з відомими початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2, x_3, 0),$$

$$\left. \frac{\partial u_0}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x_1, x_2, x_3, 0) \quad (5)$$

будується у вигляді плоскої монохроматичної хвилі із хвильовим числом k і фазовою швидкістю v , фронтами якої є поверхні постійних фаз

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt = \text{const}, \quad (6)$$

які рухаються зі швидкістю $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$ та локально перпендикулярні до орта $\mathbf{n}$.

Для будь-якого вибраного напрямку $\mathbf{n}$ фазова швидкість хвилі v й вектор її поляризації $\mathbf{A}$ визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь [3]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Розв'язуючи задачі на власні значення симетричної додатньо визначеної матриці коефіцієнтів системи

$$\Lambda_{iq} \equiv \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p; \quad i, q = 1, 2, 3, \quad (8)$$

для кожного напрямку $\mathbf{n}$ визначаються квадрати швидкостей трьох по різному поляризованих хвиль $[v^{(r)}]^2$, $r = 1, 2, 3$, та для кожного значення фазової швидкості компоненти вектора поляризації $\mathbf{A}$ хвилі, як власні вектори матриці (8). Для будь-якого напрямку $\mathbf{n}$ вектори поляризації мають задовольняти умови ортогональності

$$\mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{A}^{(k)}(\mathbf{n}) = \delta_{ik}; \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Величини фазових швидкостей нумеруються в послідовності зменшення їхніх модулів. Хвиля, яка має найбільшу фазову швидкість та номер $r=1$, називається квазіпоздовжньою. Дві інші ($r=2, 3$) – квазіпоперечні, фронти яких завжди відстають від фронту квазіпоздовжньої хвилі.

В анізотропних середовищах окрім фазової швидкості v не менший інтерес викликає променева швидкість ξ , яку трактують як швидкість поширення енергії хвильового поля. Ці дві величини пов'язані співвідношенням

$$\mathbf{n} \cdot \xi^{(r)} = v^{(r)}, \quad r = 1, 2, 3, \quad (10)$$

звідки видно, що променева швидкість за модулем більша за фазову або дорівнює їй при співпаданні напрямків їхніх векторів. Компоненти вектора променевої швидкості

$$\xi_k^{(r)} = \sum_{k=1}^3 \xi_k^{(r)} i_k, \quad r = 1, 2, 3 \quad (11)$$

обчислюються за формулою [3]

$$\xi_k^{(r)} = \frac{1}{v^{(r)}} \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}; \quad (12)$$

$$r, k = 1, 2, 3.$$

Поверхня фронту ударної хвилі з урахуванням залежності (6) може бути представлена співвідношенням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (13)$$

де τ – функція, яка задовольняє диференціальне рівняння

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1. \quad (14)$$

Тут для компонент вектора рефракції [3] уведено позначення $p_k \equiv \partial\tau/\partial x_k = n_k/v_r(\mathbf{n})$.

Рівняння (14) за допомогою метода характеристик приводимо до системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dx_m^{(r)}}{d\tau} &= \xi_m \equiv \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ \frac{dp_m^{(r)}}{d\tau} &= \eta_m \equiv 0; \\ r, m &= 1, 2, 3,\end{aligned}\quad (15)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned}x_k^{(r)}\Big|_{t=0} &= x_k^0, \\ p_k^{(r)}\Big|_{t=0} &= \frac{n_k}{v_k^{(r)}},\end{aligned}\quad (16)$$

інтегруючи які для послідовності заздалегідь вибраних початкових напрямків, можна побудувати сімейство m променів, вздовж яких у пружному анізотропному середовищі зі швидкостями ξ_m поширюється енергія хвильового поля.

Однак, якщо пружне середовище неоднорідне, то співвідношення (6)–(16) перестають бути однаковими в кожній точці променя за рахунок зміни властивостей середовища при переході від одної точки на промені до іншої. Тому кожне з них може бути використане лише локально і при переході до неоднорідного середовища рівняння (15) треба замінити системою [3]

$$\begin{aligned}\frac{dx_m^{(r)}}{d\tau} &= \xi_m \equiv \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ \frac{dp_m^{(r)}}{d\tau} &= \eta_m \equiv -\frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}; \\ r, m &= 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (17)$$

Друга група рівнянь цієї системи свідчить про те, що в даному випадку величини η_m ($m=1, 2, 3$) уже не рівні нулю, а p_m – не константи. Тому з першої групи рівнянь випливає, що ξ_m і $x_m^{(r)}$ стають нелінійними функціями, і промені, уздовж яких переноситься енергія хвилі, викривлюються. Поширення фронтів розривних хвиль у неоднорідних пружних середовищах відзначається тим, що в залежності від напрямку руху навіть фронт початково плоскої хвилі може зазнавати викривлення по мірі зсуву. Однак найбільш яскраво процеси транс-

формування фронтів, їхніх біфуркацій і виникнення геометричних сингулярностей проявляються на початково криволінійних замкнутих фронтових поверхнях. Тому в даній роботі будуть вивчатися явища випромінювання розривних хвиль сферичними джерелами. При цьому більш складної форми набувають і fronti хвиль.

Розглянемо випадки, коли розміри хвильового джерела достатньо малі у порівнянні з геометрією хвильових фронтів, щоб вважати його точковим. Помістимо в цю точку початок прямокутної системи координат $Ox_1x_2x_3$, вісь Ox_2 якої збігається з віссю симетрії пружних характеристик і густини трансверсально-ізотропного середовища. Тоді для дослідження еволюції поверхонь фронтів ударної хвилі досить побудувати їхній переріз будь-якою площиною, якій належить вісь Ox_2 – розв'язати плоску задачу. Виберемо у зазначеній площині деяку послідовність m напрямків фазових швидкостей хвилі заданої поляризації, які визначаються векторами $\mathbf{n}_m^{(0)}$. Для кожного з них побудуємо матрицю (8) і визначимо її власні значення й вектори. Для трансверсально-ізотропних пружних середовищ, пружні характеристики яких мають ту саму вісь симетрії, що й хвильове джерело, фазова швидкість $v_m^{(3)}$ завжди дорівнює $v_m^{(2)}$. Тому вектори поляризації й компоненти векторів рефракції обчислюються тільки для швидкостей $v_m^{(1)}$ і $v_m^{(2)}$. Частинні похідні наведених параметрів пружності за координатами $\partial\lambda(x_1, x_2)/\partial x_k$ для $k=1, 2$ обчислюються аналітично або чисельно в залежності від виду функції $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq}(x_1, x_2, x_3)/\rho(x_1, x_2, x_3)$. Наступні кроки полягають у визначенні для кожного напрямку $\mathbf{n}_m$ величин $\xi_k^{(m)}$ і $\eta_k^{(m)}$ за формулами (17) і чисельному інтегруванні рівнянь методом Рунге–Кутта. Отримані координати $x_k^{(m)}$ точок променів дозволяють побудувати сітку променів-фронтів імпульсної розривної хвилі аж до розглянутого значення параметра τ .

Під час розв'язання задач про поширення пружних хвиль у неоднорідних середовищах необхідно враховувати також, що характер неоднорідності пружних властивостей середовища не може бути довільним і компоненти тензора $(C_{\alpha\beta})$ повинні задовольняти нерівності

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad |C_{\alpha\beta}| > 0, \quad (18)$$

які забезпечують позитивну визначеність квадратичної форми потенціальної енергії елементів пружного середовища в розглянутій точці (x_1, x_2, x_3) [3].

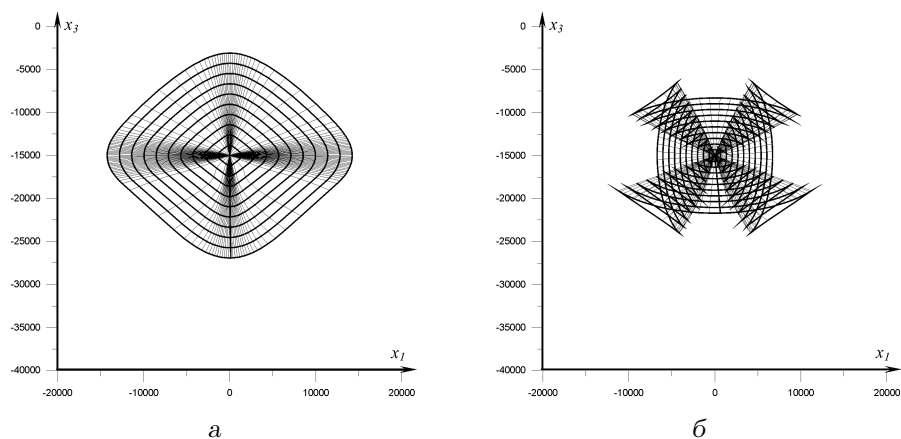


Рис. 3. Система променів і фронтів квазіпоздовжньої (а) і квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l = \lambda(0.1 + 10^{-8}x_3^2)$

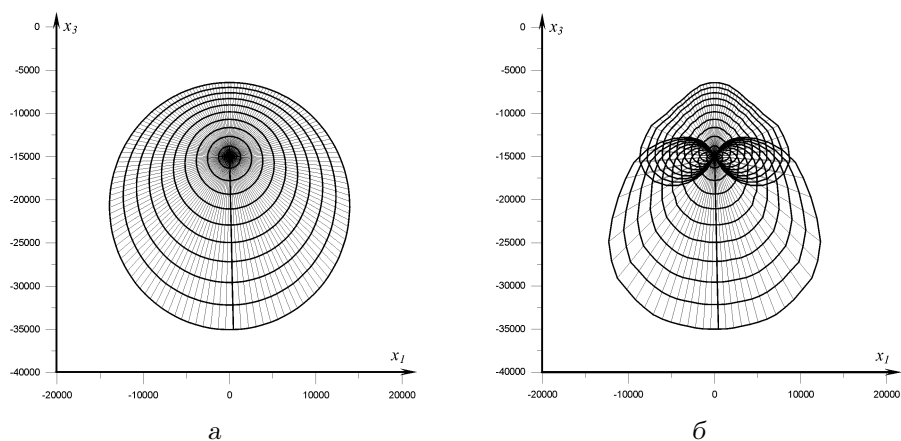


Рис. 4. Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) і квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m = \mu(0.3 - 5 \cdot 10^{-6}x_3^2)$

Невиконання умов (18) призводить до появи комплексних коренів системи (7), що суперечить умові задачі, оскільки швидкості поширення хвиль $v^{(r)}$ можуть бути виключно дійсними величинами. На практиці така ситуація може скластись у пружному середовищі з так званою штучною анізотропією, викликаною попереднім напруженням середовища. Тоді в області, де умови (18) не задовольняються, середовище виявляється нестабільним і пружні хвилі тут поширюватись не можуть.

2. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У загальному випадку динамічні властивості неоднорідного трансверсально-ізотропного пружного середовища визначаються п'ятьма функціями

λ, μ, l, m, p його пружних характеристик і функцією ρ його густини. Узагальнюючий аналіз особливостей перебудови фронтів розривних хвиль при різноманітних комбінаціях і законах зміни цих матеріальних параметрів – дуже складне завдання, яке далеко виходить за рамки цього дослідження. Тому нижче представлені результати розрахунків лише для найпростіших випадків, у яких параметри анізотропії l, m або p модулюються елементарними функціями вздовж однієї з осей.

На рис. 3 у площині Ox_1x_3 зображені сітки променів і фронтів для квазіпоздовжньої і квазіпоперечної розривних хвиль, ініційованих миттєвим прикладанням до поверхні сферичної порожнини рівномірно розподіленого нормального тиску. Відзначимо, що у зв'язку з набуттям рядом середовищ анізотропії фізичних властивостей під

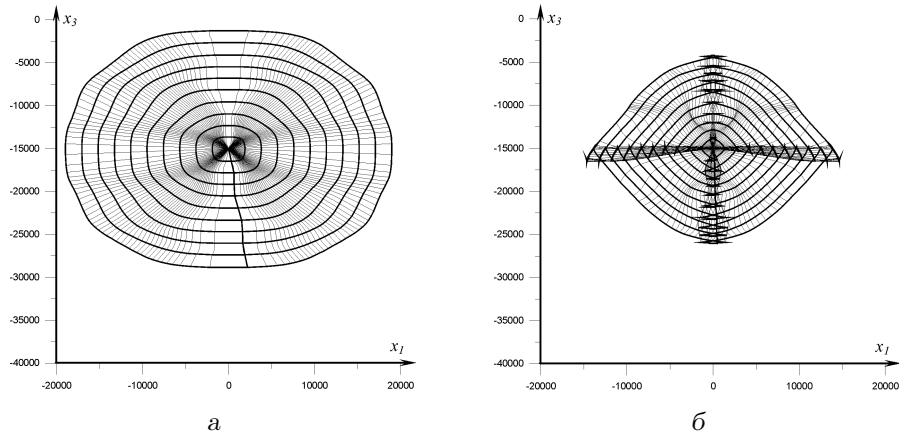


Рис. 5. Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) і квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m = \mu(0.1 + 0.5 \cos(10^{-3}x_3))$

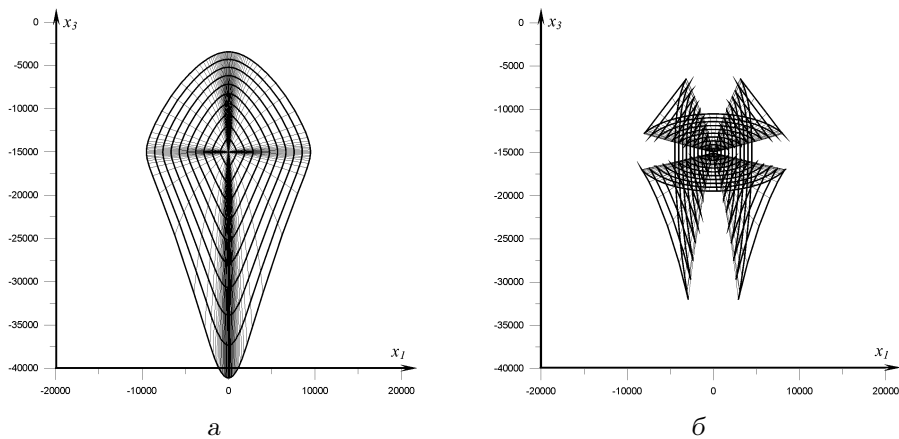


Рис. 6. Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) і квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $p = (\lambda + 2\mu)(-0.3 - 10^{-8}x_3^2)$

час прикладання нормального тиску до вільної поверхні в загальному випадку від неї відходить не тільки квазіпоздовжня, а й квазіпоперечна хвиля. Форми перерізів їхніх фронтів відображені на рис. 3, а і б відповідно.

При обрахунках фізичні характеристики середовища задавались такими:

$$\lambda = 3.4 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \mu = 1.36 \cdot 10^{11} \text{ Па},$$

$$m = 0.5\mu, \quad l = \lambda(\beta_0 + \beta x_3^2), \quad p = 0.3(\lambda + 2\mu),$$

$$\beta_0 = 0.1, \quad \beta = 10^{-8}, \quad \rho = 2760 \text{ кг/м}^3.$$

При цьому матриця $(C_{\alpha\beta})$ набула вигляду

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad (19)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda(1 - \beta_0 - \beta x_2^3) \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda(1 - \beta_0 - \beta x_2^3) \\ \lambda(1 - \beta_0 - \beta x_2^3) & \lambda(1 - \beta_0 - \beta x_2^3) & \lambda + 2\mu - p \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & \mu - m & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

тобто чотири її елементи стали змінними, а на поверхні qS-хвилі утворились біфуркаційні особливості типу ластівкових хвостів.

Найчастіше властивості неоднорідності середовища проявляються зі зміною параметра m , який входить у два діагональних елемента матриці (3). Рис. 4 ілюструє сітку променів і фронтів при $m = \mu(0.3 - 5 \cdot 10^{-6}x_3^2)$. Тут спостерігається яскраво ви-

ражена асиметрія фронтів уздовж осі Ox_3 .

У випадку, коли параметр m змінюється за законом $m = \mu(0.1 + 0.5 \cos(10^{-3}x_3))$, промені qP-хвилі стають більш криволінійними, а фронти перестають бути опуклими (див. рис. 5, а). При цьому фронти qS-хвилі настільки спотворюються, що каустики накладаються одна на одну (див. рис. 5, б).

Істотне трансформування фронтів спостерігається й при зміні параметра p за законом $p = (\lambda + 2\mu)(\gamma_0 + \gamma x_3^2)$, де $\gamma_0 = -0.3$, $\gamma = -10^{-8} \text{ м}^{-1}$ (рис. 6), хоча функція $p(x_3)$ входить лише в один діагональний коефіцієнт матриці (3). У цьому випадку також наявний ефект викривлення променів і загальна асиметрія фронтів уздовж осі Ox_3 .

Представлені системи променів і фронтів дозволяють оцінити характер зміни напружень під час поширення поверхні їх розриву. Очевидно, що в зонах згущення променів (див. рис. 6, а) має місце концентрація напружень, в зонах розбігання – їхнє зменшення.

ВИСНОВКИ

1. На основі нульового наближення променевого методу сформульовано задачу про моделювання поширення в неоднорідному анізотропному середовищі фронтів розривних пружних хвиль, що виходять із джерела, розміри якого достатньо малі у порівнянні з геометричними параметрами хвильових поверхонь.
2. У результаті чисельних досліджень встановлено, що неоднорідність механічних властивостей анізотропного пружного середовища призводить до суттєвої перебудови системи променів і фронтів. При цьому в залежності від значень параметрів анізотропії та їхньої неоднорідності по просторових координатах

хвильові промені можуть зазнавати слабких чи суттєвих викривлень, а перебудова фронтів може супроводжуватись утворенням на них геометричних особливостей у вигляді каустик.

1. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. – К.: Наук. думка, 1988. – 220 с.
2. Кравцов Ю. А. Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
3. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Л.: Наука, 1980. – 280 с.
4. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 607 с.
5. Арнольд В. И. Теория катастроф. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 128 с.
6. Гуляев В. И., Луговой П. З., Иванченко Г. М., Яковенко Е. В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прик. мех. мат. – 2000. – 64, N 3. – С. 394–402.
7. Гуляев В. И., Луговой П. З., Крицкий В. Б., Иванченко Г. М. Отражение и преломление плоских разрывных волн параболическими поверхностями раздела анизотропных упругих сред // Геофиз. ж. – 2005. – 27, N 3. – С. 418–426.
8. Гуляев В. И., Луговой П. З., Иванченко Г. М. Дифракция разрывных волн на эллипсоидных поверхностях раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. мех. – 2004. – 40, N 10. – С. 98–106.
9. Гуляев В. И., Ващилина Е. В., Борщ Е. И. Цилиндрические спиральные волны во вращающихся закрученных упругих стержнях // Прикл. мех. – 2008. – 44, N 3. – С. 125–134.
10. Gulyaev V. I., Lugovoy P. Z., Ivanchenko G. M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // Int. J. Solids Struct. – 2003. – 40. – P. 237–247.
11. Lugovoy P. Z., Gulyaev V. I. Propagation of shock wave fronts in anisotropic layered media // Shock Compression of Condensed Matter: Proc. Conf. Amer. Phys. Soc., vol 1. – Snowbird, Utah, USA, 1999. – P. 1287–1290.