УДК 534.7:538.56

МЕТОД ПУАССОНОВСКИХ СПЕКТРОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

А.И. Красильников
Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев
E – mail : tangor@ukrpost.net

Показана целесообразность использования метода пуассоновских спектров для исследования законов распределения флуктуационных сигналов.

Введение

В последние десятилетия стремительно развиваются пассивные методы исследования, диагностики и контроля физических объектов, использующие информацию, которая содержится в флуктуационных сигналах, возникающих в этих объектах в процессе их естественного функционирования. К таким сигналам относятся, в частности, кавитационные шумы, сигналы акустической эмиссии, шумы дыхания, магнитные шумы и др.

В настоящее время большинство задач исследования различных флуктуационных сигналов и их применений решены в рамках корреляционно – спектральной теории. Однако эти сигналы имеют, как правило, равномерную спектральную плотность и в ряде случаев нестационарный характер, что ограничивает информативность и применимость корреляционно – спектральных характеристик. В связи с этим возникает необходимость исследования более полных вероятностных характеристик флуктуационных сигналов, в частности – их законов распределения.

В большинстве прикладных задач авторы, рассматривая флуктуационные сигналы как результат суммирования большого числа независимых элементарных импульсов и, ссылаясь на центральную предельную теорему, считают распределение мгновенных значений флуктуационных сигналов гауссовским. Данное предположение нельзя считать корректным, поскольку согласно современной теории суммирования случайных величин [1] предельным для сумм независимых случайных величин является класс безгранично делимых законов распределения, включающий частным случаем гауссовское распределение.

В данной работе показана целесообразность использования метода пуассоновских спектров для исследования законов распределения флуктуационных сигналов.

Модель флуктуационных сигналов

Наиболее полно изученной моделью флуктуационных сигналов являются в настоящее время процессы Бунимовича – Райса, определяемые выражением

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}\alpha_k h(t-t_k),\quad t>0\ , \tag{1}$$

где t_k – однородный поток пуассоновских событий, α_k – амплитуды импульсов, взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, которые не зависят от случайных моментов времени t_k , $N(t)$ – число элементарных импульсов, возникающих на интервале времени $[0;t]$,которое является однородным процессом Пуассона, $h(t)$ – неслучайная функция, описывающая форму импульсов, достаточно быстро убывающая при $t\to\pm\infty$.

Процессы (1) независимо исследовали В.И. Бунимович [2] и С. Райс [3] при рассмотрении дробового шума электронных ламп. Модель (1) нашла широкое применение в радиофизике, статистической радиотехнике, электронике, в исследованиях ферромагнетизма и в акустике при исследовании акустической эмиссии, кавитационного шума, морской реверберации. Данная модель лежит в основе моделей, которые являются обобщением процесса Бунимовича – Райса. Эти обобщения вызваны необходимостью более полного отражения физики образования флуктуационных сигналов и связаны с корректировкой условий, лежащих в основе модели Бунимовича – Райса.

Одно из обобщений рассматриваемой модели (1) приводит к модели линейных случайных процессов [4], определяемых следующим образом:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\,d\eta(\tau)\ , \qquad (2)$$

где $h(t,\tau)$ – неслучайная действительная функция, называемая ядром линейного случайного процесса (2) и удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{\infty} h^p(t,\tau)\,d\tau < \infty,\quad p = 1{,}2,$ для всех $t \in (-\infty;\infty)$, а $\eta(\tau)$ – порождающий процесс, являющийся однородным процессом с независимыми приращениями.

Применимость модели (2) для описания флуктуационных сигналов обоснована в работах [5,6] на основе корректировок условий, используемых при обосновании модели (1). Суть корректировок заключается в следующем. Считается, что физическая система, в которой формируется флуктуационный сигнал, может быть разбита на m непересекающихся областей. В каждой i –той области, где $i = \overline{1,m}$, в случайные моменты времени $t_{k\,i}$ возникают элементарные импульсы, форма которых зависит от $t_{k\,i}$ и описывается неслучайной функцией $h(t,t_{k\,i})$, а амплитуды $\alpha_{k\,i}$ являются независимыми между собой и одинаково распределенными величинами, не зависящими от $t_{k\,i}$. Тогда i –тый флуктуационный сигнал, сформированный в соответствующей области, опишется формулой

$$\xi_i(t) = \sum_{k=1}^{N_i(t)} \alpha_{k\,i} h(t,t_{k_i}\ ),\quad i = \overline{1,m}, \qquad (3)$$

а результирующий флуктуационный сигнал $\xi(t)$ в точке приема представляет собой суперпозицию процессов (3), т. е.

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{N_i(t)} \alpha_{k_i} h(t,t_{k_i}),\quad t > 0\ . \qquad (4)$$

В работах [5,6] показано, что все процессы (4) при любых m, конечных или счетных, являются подмножеством линейных случайных процессов (2).

Отметим, что если в (2) ядро $h(t,\tau)$ зависит от разности аргументов, т.е. $h(t,\tau) = h(t-\tau)$, то линейный случайный процесс является стационарном в узком смысле случайным процессом.

Учитывая, что белый шум в узком смысле представляет собой обобщенную производную $\eta'(t)$ от процесса с независимыми приращениями, выражение (2) формально можно переписать в виде:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\eta'(\tau)\,d\tau\ . \qquad (5)$$

Из выражения (5) видно, что линейный случайный процесс (2) можно интерпретировать как результат фильтрации белого шума $\eta'(t)$ линейной параметрической системы с импульсной характеристикой $h(t,\tau)$.

Процессы (2) достаточно хорошо исследованы в теоретическом плане. В частности, в работе [4] получены одномерная и многомерная характеристические функции модели (2), ее одномерные и многомерные кумулянты, решены задачи анализа линейных и некоторых нелинейных преобразований процесса.

Метод пуассоновских спектров

В работе [5] доказано, что характеристическая функция процессов (2) безгранично делима. Как известно [1], безгранично делимую характеристическую функцию можно представить в трех канонических представлениях – Колмогорова, Леви – Хинчина, Леви. Поскольку линейные случайные процессы имеют конечную дисперсию, то для решения практических задач удобно использовать каноническое представление в форме Колмогорова.

В работе [5] показано, что одномерная характеристическая функция линейного случайного процесса может быть представлена в канонической форме Колмогорова

$$f_\xi(u,t) = \exp\left\{ ium_\xi(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - iux\right) \frac{dK_\xi(x,t)}{x^2} \right\}, \tag{6}$$

где $\{m_\xi(t), K_\xi(x,t)\}$ – параметры характеристической функции представления (6). Параметр $m_\xi(t)$ является математическим ожиданием процесса (2) и определяется формулой:

$$m_\xi(t) = m_\eta \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)d\tau \ , \tag{7}$$

в которой $m_\eta = M\{\eta(1)\}$.

Функция $K_\xi(x,t)$ назывется пуассоновской спектральной функцией Колмогорова и вычисляется по формуле

$$K_\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_h(x,y,t)dK_\eta(y) \ , \tag{8}$$

где $K_\eta(y)$ – пуассоновская спектральная функция Колмогорова порождающего процесса, а ядро преобразования Колмогорова $K_h(x,y,t)$ линейных случайных процессов равно [5,6]:

$$K_h(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t,\tau)E[x - yh(t,\tau)]d\tau \ , \tag{9}$$

где $E(x)$ – единичная функция.

Если $h(t,\tau) \equiv h(t-\tau)$, то процесс (2) является стационарным в узком смысле, а ядро преобразования (9) не зависит от времени и может быть найдено по формуле

$$K_h(x,y,t) = K_h(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)E[x - yh(t)]dt \ . \tag{10}$$

Аппарат характеристических функций является основным при исследовании законов распределения линейных случайных процессов, поскольку при нахождении плотности вероятностей процессов (2) сталкиваются с рядом трудностей, описанных в работе [6]. В связи с этим в настоящее время для нахождения функции распределения используют приближенные методы, основными из которых являются разложения плотностей вероятностей в ортогональные и не ортогональные ряды, применение системы распределений Пирсона, использование численных методов интегрирования. Но все выше упомянутые методы исследования функции распределения и плотности вероятностей имеют ряд недостатков и ограничений [6].

Более того, в математике [1] давно известен тот факт, что для безгранично делимых распределений нахождение функции распределения является в общем случае неразрешимой задачей, найти функцию распределения в явном виде можно лишь для ограниченного числа распределений, например, для гауссовского, Коши, гамма, Пуассона и отрицательного биномиального.

В связи с этим представляется целесообразным отказаться от поиска функции распределения флуктуационных сигналов, описываемых моделью линейных случайных процессов (2) и для исследования их закона распределения использовать непосредственно характеристическую функцию. Такой подход требует разработки прикладной теории характеристических функций, которая практически отсутствует в настоящее время и может иметь два направления.

Первое из них состоит в исследовании модуля и аргумента характеристической функции линейных случайных процессов [4]. Но в настоящее время это направление разработано слабо и практически ограничивается частными результатами работы [4].

Второе направление – это применение метода пуассоновских спектров [5,6], в основе которого лежит каноническое представление (6) характеристической функции линейных случайных процессов. Рассмотрим подробней суть метода.

Пусть имеется случайный процесс $\xi(t)$, у которого характеристическая функция $f_{\xi}(u,t)$ является безгранично делимой, и, как следствие, может быть представлена в одной из трех канонических форм, например, Колмогорова (6).

Предположим, что процесс $\xi(t)$ подвергается функциональному преобразованию, которое описывается оператором W_t, причем свойства оператора таковы, что полученный в результате преобразования процесс $\zeta(t)=W_t[\xi(t)]$ также имеет безгранично делимое распределение с соответствующими параметрами $\{m_{\zeta}(t),K_{\zeta}(x,t)\}$.

Метод пуассоновских спектров заключается в том, что задача исследования преобразования оператором W_t закона распределения безгранично делимых случайных процессов рассматривается как задача исследования трансформации этим оператором параметров канонического представления, т.е.

$$\{m_{\xi}(t),K_{\xi}(x,t)\}\xrightarrow{W_t}\{m_{\zeta}(t),K_{\zeta}(x,t)\} \qquad (11)$$

Определение общих условий, которым должен удовлетворять оператор W_t, в настоящее время является нерешенной задачей, однако, если W_t – линейный оператор, а $\xi(t)$ – линейный случайный процесс, то $\zeta(t)$ также является линейным случайным процессом, поэтому условия применения метода пуассоновских спектров выполняются.

Используя трактовку (5) линейных случайных процессов как результата фильтрации линейной системы с импульсной характеристикой $h(t,\tau)$ белого шума $\eta'(\tau)$ с параметрами $\{m_{\eta}(t),K_{\eta}(x,t)\}$, соотношение (11) можно представить в виде

$$\{m_{\eta}(t),K_{\eta}(x,t)\}\xrightarrow{h(t,\tau)}\{m_{\xi}(t),K_{\xi}(x,t)\} \qquad (12)$$

Таким образом, метод пуассоновских спектров использует вместо характеристической функции ее каноническую форму (6) и позволяет в терминах параметров канонических представлений исследовать закон распределения линейных случайных процессов и их линейных преобразований используя, соотношения (11) и (12).

Главное преимущество метода пуассоновских спектров состоит в простоте пуассоновских спектральных функций, которые являются действительными функциями и имеют свойства, совпадающие со свойствами обычных функций распределения. Подход, основанный на непосредственном использовании характеристических функций или их модулей и аргументов, является менее изученным, а главное, требует привлечения гораздо более сложного математического аппарата – теории функций комплексного переменного.

Примеры применения метода пуассоновских спектров

Приведем результаты вычисления пуассоновских спектров нескольких типовых моделей флуктуационных сигналов, задаваясь различными ядрами процессов (2).

Модель 1. Для ядра

$$h(t) = B\,E(t)\,E(t_0 - t), \quad B > 0, \tag{13}$$

пуассоновская спектральная функция равна:

$$K_\xi(x) = B^2 t_0 K_\eta\left(\frac{x}{B}\right).$$

Примером флуктуационных сигналов, имеющих прямоугольную форму импульса (13), является тепловой шум.

Модель 2. Пусть ядро равно:

$$h(t) = btE(t)E(t_0 - t) \tag{14}$$

Соответствующая пуассоновская спектральная функция равна:

при $x \le 0,\ y \ne 0$

$$K_\xi(x) = \frac{b^2 t_0^3}{3} K_\eta\left(\frac{x}{bt_0}\right) - \frac{(-x)^3}{3b} \int_{-\infty}^{x/bt_0} \frac{dK_\eta(y)}{(-y)^3},$$

при $x > 0,\ y \ne 0$

$$K_\xi(x) = \frac{b^2 t_0^3}{3} K_\eta\left(\frac{x}{bt_0}\right) + \frac{x^3}{3b} \int_{x/bt_0}^{\infty} \frac{dK_\eta(y)}{y^3},$$

при $-\infty < x < +\infty,\ y = 0$

$$K_\xi(x) = \frac{b^2 t_0^3}{3} E(x) \cdot \left(K_\eta(+0) - K_\eta(-0)\right).$$

Примером флуктуационных сигналов, имеющих треугольную форму импульса (14), является дробовой шум.

Модель 3. Ядро определяется формулой

$$h(t) = (t_0 + t)^{-n} E(t),\ t_0 > 0. \tag{15}$$

В этом случае

$$K_\xi(x) = \begin{cases} (2n-1)^{-1}\left[\dfrac{K_\eta(xt_0^n)}{t_0^{2n-1}} - x^{2-1/n} \displaystyle\int_{-\infty}^{xt_0^n} \frac{dK_\eta(y)}{y^{2-1/n}}\right], & y \ne 0,\ x < 0, \\ (2n-1)^{-1} \dfrac{E(x)}{t_0^{2n-1}} \left[K_\eta(0_+) - K_\eta(0_-)\right], & x \in (-\infty, \infty),\ y = 0, \\ (2n-1)^{-1}\left[\dfrac{K_\eta(xt_0^n)}{t_0^{2n-1}} + x^{2-1/n} \displaystyle\int_{xt_0^n}^{\infty} \frac{dK_\eta(y)}{y^{2-1/n}}\right], & y \ne 0,\ x > 0. \end{cases}$$

Примером флуктуационных процессов с формой импульсов в виде (15) является $1/f$ – шум

Модель 4. Ядро описывается выражением

$$h(t) = Be^{-\alpha t}E(t),\ B > 0, \alpha > 0\,. \qquad (16)$$

Тогда

$$K_{\xi}(x) = \frac{B^2}{2\alpha}\left[K_{\eta}\left(\frac{x}{B}\right) - \left(\frac{x}{B}\right)^2 L_{\eta}\left(\frac{x}{B}\right)\right],$$

где

$$L_{\eta}(x) = \begin{cases} M_{\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} y^{-2}dK_{\eta}(y), & x < 0, \\ N_{\eta}(x) = -\int\limits_{x}^{\infty} y^{-2}dK_{\eta}(y), & x > 0. \end{cases}$$

Экспоненциальную форму импульса (16) имеют сигналы акустической эмиссии, кавитационные шумы.

Литература

1. Золоторев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. - М.: Наука, 1986. -416с.
2. Бунимович В.И. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. - М.: Сов. радио, 1951. -360с.
3. Райс С. Теория флуктуационных шумов: Сокр. пер. с англ. /В кн.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех.– М.: ИЛ, 1952.-С.88 - 238.
4. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. – К.: Наук. Думка, 1973.–192 с.
5. Красильников А.И. Исследование импульсных гидроакустических сигналов методом характеристических функций: Дис.– канд. физ.– мат. наук: 01.04.06. -К., 1982. - 171с.
6. Горовецкая Т.А., Красильников А.И., Чан Хыу Дат. Модели и законы распределения флуктуационных сигналов.//Электроника и связь, 2000, № 9,- С.5-14.