ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ К РАСЧЕТУ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА СО СТУПЕНЧАТЫМ ДНОМ

Папкова Ю.И., Папков С.О. к. ф.-м.н., Ярошенко А.А. к. ф.-м.н.
Севастопольский национальный технический университет

Для гидроакустического волновода с подводным выступом на основе метода частичных областей проводится анализ энергетических характеристик. Исследуется зависимость среднего потока мощности от высоты подводного выступа, трансформация потока энергии из внутренней области над выступом в энергию нормальных мод во внешней области.

ВВЕДЕНИЕ

При теоретическом анализе звуковых полей в акустических волноводах широкое применение получил метод частичных областей [1], с помощью которого соответствующие задачи сводятся к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений или к системе интегральных уравнений. Наличие изломов, угловых точек и ребер границ волноводов позволяет эффективно решить бесконечную систему в силу того, что асимптотика неизвестных находится благодаря априорно известному характеру особенности вблизи угла.

Аналитическая форма решения, обеспеченная использованием метода частичных областей, позволяет значительно упростить исследование энергетических характеристик звукового поля. В частности, в статье [2] рассмотрена трансформация энергии падающей волны в составном упругом волноводе, в статье [3] - энергетические характеристики падающей, отраженных и прошедших волн через зону сопряжения плоского и клиновидного волновода.

В статье авторов [4] методом частичных областей строится решение задачи о звуковом поле в неоднородном гидроакустическом волноводе со ступенчатым дном. Там же, в качестве численного примера, исследовался волновод с выступом.

Целью данной работы является исследование энергетических характеристик прохождения звуковой волны для волновода с выступом.

ПОСТАНОВКА И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

На рис. 1 изображен гидроакустический волновод, имеющий подводный выступ с радиальной симметрией, над центром которого расположен точечный гармонический источник звука. Согласно методу частичных областей разобьем волновод на две области, определяемых скоростью звука $c_j(z)$ и постоянной глубиной h_j, плотность жидкости ρ полагаем постоянной в обеих областях. Распространение звуковых волн описывается неоднородным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2(z)}\Phi = -\frac{\delta(z-z_0)\delta(r)}{2\pi r}, \qquad (1)$$

где Φ - потенциал скоростей; ω - частота; $c(z)$ - профиль скорости звука; δ - дельта функция Дирака.

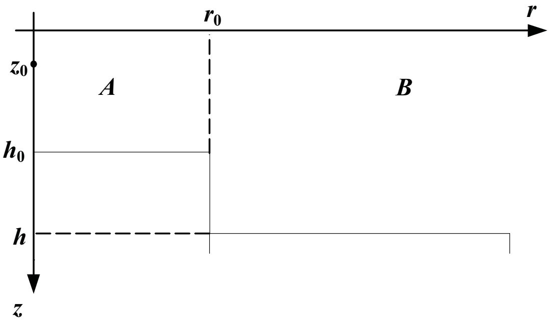

Рис.1. Гидроакустический волновод с выступом

Положим, что поверхность волновода является акустически мягкой, а дно – акустически жестким:

$$\Phi(r,0) = 0; \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}\right|_L = 0\,,$$

где L – кривая, определяющая форму дна.

Решение для волновода со ступенчатым дном строится [4] в виде суммы нормальных мод в каждой из частичных областей. Для волновода с одним выступом общее решение имеет следующий вид:

$$\Phi_A = \frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_{A,n}(z_0)\varphi_{A,n}(z)}{\gamma_{A,n}}H_0^{(1)}(\xi_{A,n}r) + \sum_{n=0}^{\infty}A_n\varphi_{A,n}(z)J_0(\xi_{A,n}r)\,, \qquad (2)$$

$$\Phi_B = \sum_{n=0}^{\infty}B_n\varphi_{B,n}(z)H_0^{(1)}(\xi_{B,n}r)\,. \qquad (3)$$

где $\gamma_{A,n} = \int\limits_0^{h_0}(\varphi_{A,n}(s))^2 ds$; $\xi_{A,n}$, $\varphi_{A,n}$, $\xi_{B,n}$, $\varphi_{B,n}$ - собственные числа и функции соответствующих задач Штурма-Луивилля:

$$\varphi_A'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2\right)\varphi_A = 0, \quad \varphi_A(0) = 0, \varphi_A'(h_0) = 0\,;$$

$$\varphi_B'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2\right)\varphi_B = 0, \quad \varphi_B(0) = 0, \varphi_B'(h) = 0\,. \qquad (4)$$

Алгоритм построения собственных чисел и функций краевых задач (4) для кусочно-заданного профиля скорости звука $c(z)$ описан в [4].

Использование нормальных мод позволяет выполнить граничные условия на горизонтальных стенках волновода и условие излучения точно. Из условий непрерывности звукового поля на границах раздела частичных областей $r = r_0$:

$$\Phi_A(r_0,z) = \Phi_B(r_0,z), \quad z \in [0;h_0]; \quad \frac{\partial \Phi_B}{\partial r}(r_0,z) = \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_A}{\partial r}(r_0,z), & z \in [0;h_0] \\ 0, & z \in [h_0;h] \end{cases},$$

получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ в представлении потенциала скоростей (2-3)

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\gamma_{B,m}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{m,n}^1 \cdot x_n + y_m - \dfrac{1}{\gamma_{B,m}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{m,n}^2 \cdot y_n = Q_m^1 \\ -\dfrac{1}{\xi_{B,m}\gamma_{B,m}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{m,n}^1 \cdot \xi_{A,n}\dfrac{J_1(\xi_{A,n}r_0)}{J_0(\xi_{A,n}r_0)}x_n + \dfrac{H_1^{(1)}(\xi_{B,m}r_0)}{H_0^{(1)}(\xi_{B,m}r_0)}y_m = Q_m^2 \end{cases}, \qquad (5)$$

$m = 0,1,2\ldots$

где $x_n = A_n J_0(\xi_{A,n} r_0)$; $y_n = B_n \, H_0^{(1)}(\xi_{B,n} r_0)$, $\gamma_{B,n} = \int_0^h (\varphi_{B,n}(s))^2 ds$,

$$Q_m^1 = \frac{i}{4\gamma_{B,m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{A,n}(z_0)}{\gamma_{A,n}} I_{m,n}^1 \cdot H_0^{(1)}(\xi_{A,n} r_0) \, ; \quad Q_m^2 = \frac{i}{4\gamma_{A,m}\xi_{A,m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{A,n}(z_0)}{\gamma_{A,n}} I_{m,n}^1 \cdot \xi_{A,n} H_1^{(1)}(\xi_{A,n} r_0).$$

Интегралы $I_{m,n}^1 = \int_0^{h_0} \varphi_{A,n} \varphi_{B,m} dz$; $I_{m,n}^2 = \int_{h_0}^{h} \varphi_{B,n} \varphi_{B,m} dz$, в случае совпадающего в частичных областях профиля скорости звука вычисляются точно интегрированием по частям:

$$I_{m,n}^1 = \frac{\varphi'_{B,m}(h_0)\varphi_{A,n}(h_0)}{\xi_{B,m}^2 - \xi_{A,n}^2} \, ; \; I_{m,n}^2 = \frac{\varphi_{B,m}(h_0)\varphi'_{B,n}(h_0) - \varphi'_{B,m}(h_0)\varphi_{B,n}(h_0)}{\xi_{B,m}^2 - \xi_{B,n}^2}, \quad m \neq n \, .$$

Из условий на ребре волновода в статье [4] найден характер асимптотического поведения неизвестных в бесконечной системе (5):

$$x_n = \frac{a_0(-1)^n}{n^{5/3}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \; y_n = \frac{b_0 \sin\left(\frac{\pi h_0}{h_1}(n+1/2) - \frac{\pi}{3}\right)}{n^{5/3}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty, \tag{6}$$

который позволяет использовать для определения неизвестных метод улучшенной редукции. Кроме того, асимптотический закон (6) позволяет провести улучшение сходимости рядов для потенциала и колебательной скорости на границах раздела частичных областей. При этом локальная особенность в поведении колебательной скорости вблизи кромки акустически жесткого тела оказывается заключенной в аналитически свернутых остатках рядов, что дает возможность для описания звукового поля в непосредственной близости от ребра.

Полученное аналитическое решение позволяет также исследовать энергетические характеристики распространения звука. Средний поток мощности от источника в области над выступом (A) через сечение $r = r_0$ есть сумма средних потоков мощности каждой из нормальных мод

$$w_A = \frac{\omega\rho}{2} \sum_{n=0}^{N_A} \frac{\varphi_{A,n}(z_0)\xi_{A,n}}{4} \left(J_1(\xi_{A,n} r_0) Y_0(\xi_{A,n} r_0) - J_0(\xi_{A,n} r_0) Y_1(\xi_{A,n} r_0) \right) \left(\frac{\varphi_{A,n}(z_0)}{4\gamma_{A,n}} + \operatorname{Im} A_n \right) +$$
$$+ \frac{\omega\rho}{4\pi} \sum_{n=N_A+1}^{\infty} \varphi_{A,n}(z_0) \, |\xi_{A,n}| \operatorname{Im} A_n \left(K_0(|\xi_{A,n}| r_0) I_1(|\xi_{A,n}| r_0) + K_1(|\xi_{A,n}| r_0) I_0(|\xi_{A,n}| r_0) \right), \tag{7}$$

где $N_A + 1$ – число распространяющихся нормальных волн области над выступом.
Средний поток мощности области без выступа (B), подводимый через сечение $r = r_0$, есть сумма средних потоков мощности распространяющихся нормальных волн:

$$w_B = \frac{\omega\rho}{2} \sum_{n=0}^{N_B} |B_n|^2 \, \gamma_{B,n} \xi_{B,n} \left(J_1(\xi_{B,n} r_0) Y_0(\xi_{B,n} r_0) - J_0(\xi_{B,n} r_0) Y_1(\xi_{B,n} r_0) \right), \tag{8}$$

где $N_B + 1$ – число распространяющихся нормальных волн области без выступа.

Согласно закону сохранения энергии следует равенство:

$$\frac{w_B}{w_A} = 1,$$

которое может служить критерием точности решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (5).

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Формулы (7-8) позволяют провести расчеты потоков энергии в сечении волновода $r = r_0$ для каждой из частичных областей, что дает возможность исследовать трансформацию звуковой волны, прошедшей через зону сопряжения, в нормальные волны области без выступа.

В табл.1 приведены коэффициенты возбуждения нормальных волн области без выступа $W_n = \dfrac{w_{B,n}}{w_A}$ (n = 0,1,…N_B) в зависимости от отношения глубин в частичных областях волновода h_0/h при фиксированной безразмерной частоте Ω (Ω = $\omega h/c_{cp}$). Характерные размеры волновода принимались равными следующим значениям: c = 1480 м/с; z_0 = 0,1h, r_0 = 2h, h = 100 м, Ω = 5. При таких параметрах волновода в области без выступа (B) существуют две распространяющиеся моды. Количество распространяющихся нормальных волн области над выступом (A) зависит от отношения h_0/h и частоты Ω. Для постоянного профиля скорости звука имеется конечное число

$$N_A = \left[\frac{h_0\Omega}{h\pi} - \frac{1}{2}\right]$$

([x] – целая часть действительного числа x) незатухающих мод, соответствующих вещественным собственным значениям.

Табл. 1.

Зависимость коэффициентов возбуждения нормальных волн от отношения h_0/h

h_0/h	0,99	0,95	0,94	0,92	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
W_0	0,09	0,25	0,60	0,96	0,96	0,62	0,33	0,17	0,11	0,08	0,10	0,06
W_1	0,91	0,75	0,40	0,04	0,04	0,38	0,67	0,83	0,89	0,92	0,90	0,94

Из данных табл. 1 следует, когда параметр h_0/h находится в диапазоне 0,8 ≤ h_0/h ≤ 0,94 большую энергию несет нулевая нормальная волна, которая по величине превосходит первую. По мере приближения выступа к границам волновода (h_0/h > 0,94 и h_0/h < 0,8) пропорционально увеличивается влияние первой нормальной волны и соответственно снижение нулевой.

Для оценки влияния выступа на прохождение звуковой волны на рис. 2 представлен график изменения величины w_A/w_0 (w_0 – средний поток мощности от источника через сечение $r = r_0$ для идеального волновода глубины h) в зависимости от размеров h_0/h.

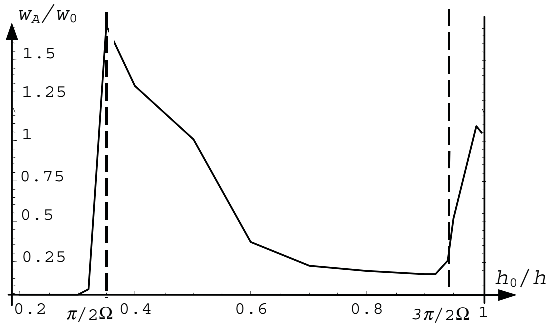

Рис. 2. Зависимость изменения величины w_A/w_0 от отношения h_0/h

При определенных размерах $\dfrac{h_0}{h} = \dfrac{\pi}{2\Omega}$ и $\dfrac{h_0}{h} = \dfrac{3\pi}{2\Omega}$ частота распространения звука оказывается резонансной для области над выступом (A). Анализ спектра данной области показал, что при условии $\dfrac{h_0}{h} < \dfrac{\pi}{2\Omega}$ существуют только затухающие моды, в случае

$\frac{\pi}{2\Omega} < \frac{h_0}{h} < \frac{3\pi}{2\Omega}$ - одна распространяющиеся нормальная волна, когда $\frac{h_0}{h} > \frac{3\pi}{2\Omega}$ - две распространяющихся волны. При этом, если в области над выступом присутствуют только затухающие нормальные волны, энергия, подводимая к границе частичных областей, оказывается достаточно малой, а с уменьшением глубины h_0 она практически равна нулю (в случае $h_0/h \leq 0{,}2$ отношение $w_A/w_0 \approx 10^{-10}$). Таким образом, несмотря на то, что во внешней области волновода всегда существуют две распространяющиеся моды, можно говорить об эффекте «запирания» волновода. Из рис. 2 также следует, что добавление распространяющейся моды в области (A) приводит к увеличению w_A/w_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Вовк И.В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. К.: Наукова думка, 1986. – 240с.
2. Городецкая Н.С. Трансформация энергии падающей волны на границе раздела в составном волноводе // Акуст. вісн. – 2001. – Т.4., №1. – С. 17-25.
3. Мацыпура В.Т. Прохождение звука через область сопряжения плоского и клиновидного волноводов // Акуст.вісн. – 1999. – Т.2, № 1. – С. 31 – 41.
4. Папков С.О., Папкова Ю.И., Ярошенко А.А. Звуковое поле в неоднородном гидроакустическом волноводе со ступенчатым дном // Акуст.вісн. – 2003. – Т.6, № 1. – С. 32 – 42.