РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НАД УПРУГИМ ДНОМ

И.Т. Селезов, О.В. Карнаухова, З.В. Хатунцева

Институт гидромеханики НАН Украины, отдел ГВП,

ул. Желябова,8/4, Киев, 03680. E-mail: selezov@uninet.kiev.ua

В докладе рассматривается задача о влиянии упругого дна на распространение поверхностных волн на воде. Исходя из полностью нелинейной постановки задачи для распространения поверхностных волн в жидкости конечной глубины и проводя масштабирование, можно установить, что за рассматриваемые явления ответственны 5 безразмерных параметров: параметр нелинейности α, параметр дисперсии β, параметр вертикального донного перемещения γ, отношение скорости распространения волн в мелкой воде $c_{sh} = \sqrt{gh_0}$ к скорости распространения волн сдвига в упругом полупространстве c_s: c_{sh} / c_s, отношение дилатационного модуля упругости λ к сдвиговому G: λ / G, отношение плотности жидкости ρ^f к плотности упругой среды ρ^e: ρ^f / ρ^e.

Представленная задача обобщает раннее рассмотренную задачу для заданного параметра возбуждения (вертикального донного перемещения). Здесь этот параметр должен определяться как решение задачи эластодинамики для полупространства. Задача формулируется в терминах потенциала скорости и отклонения свободной поверхности для жидкости сверху и вектора упругих перемещений для упругого полупространства. Задача для жидкости решается методом степенных рядов, который был успешно применен для построения вырожденных гиперболических моделей распространения волн в упругих пластинах и оболочках (Селезов, 1960) и позже для построения некоторых вырожденных моделей распострения волн на воде (Уизем, 1974). Потенциал скорости представляется в виде степенного ряда по вертикальной координате и подставляется в исходные уравнения, что позволяет свести трехмерную задачу к двухмерной. Такой подход приводит к бесконечной системе уравнений, из которой после асимптотических оценок получены слабо нелинейных и дисперсионных волн эволюционные уравнения, включая предельное линейное уравнение.

Задача эластодинамики решается на основе скалярного и векторного потенциалов и в результате это позволяет найти вертикальное перемещение дна.

Задача формулируется в терминах потенциала скоростей $\varphi(x, y, z, t)$, отклонения свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ и вектора перемещений $\vec{u}$

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega^f, \tag{1}$$

$$\hat{\nabla}^2\vec{u} + \left(\frac{\lambda}{G} + 1\right)\hat{\vec{\nabla}}\left(\hat{\vec{\nabla}} \cdot \vec{u}\right) = c_s^{-2}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} - F \qquad \text{в} \ \Omega^e, \tag{2}$$

$$\eta_t + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\eta - \varphi_z = 0 \qquad \text{при} \ z = \eta(x, y, t), \tag{3}$$

$$g\eta + \rho\varphi_t + \frac{1}{2}\rho\left[\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] = 0 \quad \text{при} \ z = \eta(x, y, t), \tag{4}$$

$$h_t + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}h = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = -h(x, y, t), \tag{5}$$

$$-\frac{\rho^f}{\rho^e}\left(\frac{c_{sh}}{c_s}\right)p\delta_{ik} = \sigma_{ik} \quad \text{при} \ z = -h(x, y, t), \ i, k = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где $\nabla^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\hat{\nabla}^2 = \nabla^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$,

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \ \hat{\vec{\nabla}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Донную поверхность представим в виде

$$h(x, y, t) = H(x, y) - \xi(x, y, t), \tag{7}$$

где $\xi(x, y, t)$ – вертикальное отклонение дна относительно невозмущенного уровня $H(x, y)$. Тогда подстановка (7) в (5) приводит к соотношению

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\xi - \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}H = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad z = -H(x, y) + \xi(x, y, t). \tag{8}$$

В дальнейшем вводятся безразмерные величины по формулам (звездочки опускаются)

$$\left(x^*, y^*\right) = (x, y)/l,\ z^* = z/h_0,\ H^* = H/h_0,$$

$$\xi^* = \xi/\xi_0,\ \eta^* = \eta/a,\ \varphi^* = \varphi\sqrt{g h_0}/g l a,\ t^* = t\sqrt{g h_0}/l,$$

где l – характерная длина, h_0 – характерная глубина, ξ_0 – амплитуда отклонения дна, a – амплитуда перемещения поверхности.

В безразмерном виде система уравнений (1) - (6) с учетом (8) принимает вид:

$$\beta\nabla^2\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{в } \Omega^f, \tag{9}$$

$$\nabla^2\vec{u} + \left(\frac{\lambda}{G} + 1\right)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) = c_s^{-2}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} - \vec{F} \qquad \text{в } \Omega^e, \tag{10}$$

$$\eta_t + \alpha\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\eta - \frac{1}{\beta}\varphi_z = 0 \qquad \text{при } z = \alpha\eta(x, y, t), \tag{11}$$

$$\eta + \varphi_t + \frac{\alpha}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 + \frac{\alpha}{2\beta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = 0 \tag{12}$$

$$\gamma\left[\xi_t + \alpha\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\xi\right] - \alpha\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}H = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{13}$$

$$-\frac{\rho^f}{\rho^e}\left(\frac{c_{sh}}{c_s}\right)^2 p\delta_{ik} = \sigma_{ik} \quad \text{при } z = -H(x, y) + \gamma\,\xi(x, y, t), \tag{14}$$

$i, k = 1,2,3.$

Полагаем в (2) массовую силу равной нулю и векторное поле $\vec{u}$ представляем согласно теореме Гельмгольца в виду суммы градиента скалярной функции ψ и ротора векторного потенциала $\vec{a}$

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}\times\vec{a}, \tag{15}$$

что приводит к несвязанным волновым уравнениям [3, стр. 15]

$$\hat{\nabla}\psi - \frac{1}{c_e^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0,\ \nabla^2\vec{a} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t^2} = 0. \tag{16}$$

Давление в (14) определяется из интеграла Бернулли (12), если в правой части записать член $\left(p-p_0\right)/\,p_0$, который при $p=p_0$ обращается в нуль на поверхности жидкости $z=\eta\,(x,y,t)$.

Тензор напряжений $\sigma_{i\,k}$ в (6) записываем в терминах компонент вектора $\vec{u}$ [3]

$$\sigma_{ik}=\lambda\,u_{n,n}+G\left(u_{i,k}+u_{k,i}\right),\;\; i,k,n=1,2,3 \tag{17}$$

по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Если рассматривать плоскую задачу, так что производные по y от всех полевых функций равны нулю $\frac{\partial}{\partial\,y}(\;)=0$ и $u_y=v=0$.

Тогда задача (9) - (14) с учетом соотношений (15) - (17) сводится к определению функций $\varphi,\,\eta,\,\psi,\,\vec{a}$.

В случае теории первого порядка система уравнений (9), (11) - (13) приводится к виду

$$\beta\;\nabla^2\varphi+\frac{\partial^{\,2}\varphi}{\partial\,z^2}=0 \quad \text{в} \quad \Omega^{\,f} \tag{18}$$

$$\beta\left(\eta+\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,t}\right)+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,z}\right)^2=0 \;\;\text{при}\;\; z=\alpha\,\eta \tag{19}$$

$$\beta\,\frac{\partial\,\eta}{\partial\,t}=\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,z} \quad \text{при}\;\; z=\alpha\,\eta \tag{20}$$

$$\beta\left(\frac{\partial\,\xi}{\partial\,t}-\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}H\right)=\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,z} \quad \text{при} \quad z=-H+\gamma\,\xi \tag{21}$$

Исключая в (19), (20) функцию η получаем систему уравнений

$$\beta\nabla^2\varphi+\frac{\partial^{\,2}\varphi}{\partial\;z^2}=0 \;\;\text{в}\quad \Omega^{\,f} \tag{22}$$

$$\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,z}+\beta\frac{\partial^{\,2}\varphi}{\partial\,t^2}=0 \quad \text{при}\quad z=\alpha\,\eta \tag{23}$$

$$\eta=-\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,t}\Big|_{z=\alpha\,\eta} \tag{24}$$

$$\beta\left(\frac{\partial\,\xi}{\partial\,t}-\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}H\right)=\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,z}\quad \text{при}\quad z=-H+\gamma\,\xi \tag{25}$$

Рассмотрим случай жидкости постоянной глубины $H=1$ и представим функцию $\varphi(x,y,z,t)$ в виде степенного ряда

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x,y,t)(z+1)^n\,. \tag{26}$$

Подстановка (26) в систему (22) -(25) приводит к бесконечной системе уравнений

$$\beta\nabla^2\varphi_n+(n+1)(n+2)\varphi_{n+2}=0, \tag{27}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\beta\,\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial\,t^2}+(n+1)\varphi_{n+1}\right](1+\alpha\,\eta)^n=0, \tag{28}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varphi_{n+1}(\gamma\,\xi)^n=\beta\frac{\partial\,\xi}{\partial\,t}. \tag{29}$$

Из (27) - (29) следует уравнение, описывающее распространение слаболинейных слабодисперсионных поверхностных волн в жидкости с подвижным дном

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t^2}-(1+\alpha\eta_0-\gamma\,\xi)\nabla^2\varphi_0-\frac{\beta}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\varphi_0+\\&+\frac{\beta}{6}\nabla^2\nabla^2\varphi_0=\frac{\partial F}{\partial t}\end{aligned} \tag{30}$$

где

$$F=-\xi-\beta\frac{\partial^2\xi}{\partial\,t^2}+\frac{\beta}{2}\nabla^2\xi\,, \tag{31}$$

$$\eta_0=-\frac{\partial\varphi_0}{\partial\,t}. \tag{32}$$

В случае линейного бездисперсионного приближения уравнение (30) приводится к виду

$$\nabla^2\varphi_0-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\,t^2}=\frac{\partial\xi}{\partial\,t}. \tag{33}$$

Уравнение (33) представляет собой предельное волновое уравнение.

Подставляя в уравнение (33) компоненту вектора перемещений u_3, получим уравнение, описывающее распространение линейных поверхностных гравитационных волн в жидкости конечной глубины над упругим полупространством.

В линейном приближении система (30), (31) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi_0 - \frac{1}{2}\beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 \varphi_0 + \frac{1}{6}\beta\, \nabla^2 \nabla^2 \varphi_0 = \\ = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\xi - \beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\beta\, \nabla^2 \xi \right) \tag{34}$$

Это уравнение описывает распространение волн с учетом дисперсии порядка β^0, β^1.

Рассмотрим случай, когда величина ξ пропорциональна давлению $\xi = S\,\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial t}$.

Тогда уравнение (34) принимает вид

$$\nabla^2 \varphi_0 - (1+s)\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} - \frac{1}{6}\beta \nabla^2 \nabla^2 \varphi_0 + \\ + \frac{1}{2}(\beta + s)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 \varphi_0 + \beta s \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial t^4} = 0. \tag{35}$$

Из уравнения (35) видно, что предельный случай $s = 0$ соответствует жесткому дну и что реакция, пропорциональная давлению, приводит к уменьшению скорости распространения волн.

1. Селезов І.Т. Дослідження поперечних коливань пластини.–Прикл. механіка, 1960, 6, №3.–С.319-327.
2. Whitham G.B. Linear and nonlinear waves.–Wiley, New York, 1974. Русский перевод: Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.– М.: Мир, 1977. – 622с.
3. Селезов И.Т., Селезова Л.В. Волны в магнитогидроупругих средах. Киев, Наук. думка, 1975, 164 с.