

## ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ НА СТРУКТУРУ ВОЛНОВИХ ПОЛЕЙ В УПРУГИХ АКУСТИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

**В. А. МОИСЕЕНКО, канд. физ.- мат. наук, доц.**

*Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина*

В трехмерной постановке предложен эффективный аналитический подход к исследованию влияния анизотропии на кинематическую структуру волновых полей в акустических кристаллах гексагональной, кубической и орторомбической структуры. Этот подход основан на сведении полной системы уравнений движения пространственных волноводных объектов из анизотропных акустических кристаллов к решению независимых разрешающих волновых уравнений путем замены зависимых компонент вектора перемещений через независимые волновые потенциалы.

С использованием разработанного подхода для конкретного широкого набора реальных анизотропных акустических кристаллов исследовано влияние анизотропии упругих свойств материала на кинематическую структуру волновых полей в них. Изучены особенности различных форм представления общего решения полной системы уравнений движения и особенности структуры волновых полей для каждого из рассмотренных акустических кристаллов с упругими свойствами гексагональной, кубической и орторомбической структуры, проведено сравнение с различными известными решениями для изотропного и трансверсально-изотропного случаев упругой симметрии.

### ВВЕДЕНИЕ

Теоретические и экспериментальные исследования волновых процессов в изотропных волноводных объектах проводились еще с прошлого столетия и к настоящему времени накоплена достаточно полная информация о кинематической структуре волновых полей в них [1]. Однако практическая разработка и использование элементов и устройств функциональной электроники в аппаратуре нового поколения бурно развивается в направлении использования анизотропных акустических кристаллов, что стимулирует постоянное появление новых анизотропных кристаллов.

Одной из основных проблем возникающих при переходе от изотропных материалов к анизотропным материалам является построение и исследование общего решения полной системы основных уравнений движения для анизотропных волноводных объектов в трехмерной постановке. Эффективным подходом к решению этой проблемы является сведение исходной модели к решению независимых разрешающих уравнений путем замены зависимых компонент вектора перемещений через независимые волновые потенциалы. Для изотропного материала такими решениями являются известные классические представления [1,5], которые частично обобщены на случай трансверсально изотропного материала [6].

В данной работе в трехмерной постановке проведено полное обобщение такого подхода на анизотропные материалы гексагональной, кубической и орторомбической структуры. Этот подход позволяет делать основные выводы о кинематической структуре волновых полей в акустических анизотропных кристаллах посредством анализа структуры разрешающих уравнений для волновых потенциалов, а затем дополнять и

углублять эти выводы путем изучения структуры кинематической матрицы в представлениях компонент вектора перемещений через волновые потенциалы.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

Объектом рассмотрения является пространственный волноводный объект, который представляет собой однородную идеально упругую среду из анизотропного материала орторомбической структуры или любую часть среды, ограниченную полностью или частично произвольной кусочно-гладкой поверхностью. Волноводный объект отнесен к декартовой системе координат  $(O, x_1, x_2, x_3)$  с осями координат направленными по осям упругой симметрии материала.

Трехмерная математическая модель рассматриваемого анизотропного волноводного объекта представляет собой полную систему уравнений движения, которая связывает компоненты вектора перемещений  $U_i(\vec{x}, t)$ , тензора напряжений  $\sigma_{ij}(\vec{x}, t)$  и тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t)$  и состоит из непосредственно уравнений движения [3], уравнений закона Гука и соотношений Коши [3]. Эта математическая модель известным образом сводится к системе уравнений движения в перемещениях следующего вида:

$$L_{ij}U_j(\vec{x}, t) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

Здесь  $L_{ij}$  – дифференциальные операторы, которые имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11}\partial_1^2 + G_{12}\partial_2^2 + G_{13}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2, & L_{12} &= L_{21} = (C_{12} + G_{12})\partial_1\partial_2, \\ L_{22} &= G_{12}\partial_1^2 + C_{22}\partial_2^2 + G_{23}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2, & L_{13} &= L_{31} = (C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3, \\ L_{33} &= G_{13}\partial_1^2 + G_{23}\partial_2^2 + C_{33}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2, & L_{23} &= L_{32} = (C_{23} + G_{23})\partial_2\partial_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\partial_k$  и  $\partial_t$  частные производные по пространственным переменным  $x_k$  и по времени  $t$ ;  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – радиус-вектор,  $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{12}, C_{13}, C_{23}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – отнесенные к нормирующей константе  $C_0$  упругие безразмерные константы,  $C_0$  – произвольная постоянная, имеющая размерность упругих констант;  $\rho$  – плотность материала.

Основная идея разработанного подхода к проведению исследований состоит в том, чтобы перейти от зависимых неизвестных функций  $U_1(\vec{x}, t), U_2(\vec{x}, t), U_3(\vec{x}, t)$  (компонент вектора перемещений) к независимым неизвестным функциям  $\Psi_1(\vec{x}, t), \Psi_2(\vec{x}, t), \Psi_3(\vec{x}, t)$  (компонентам векторного волнового потенциала) с помощью полученных автором следующих представлений для вектора перемещений и разрешающего векторного волнового уравнения для векторного волнового потенциала:

$$\begin{aligned} U_1(\vec{x}, t) &= L_1^{(4)}\Psi_1(\vec{x}, t) - (C_{12} + G_{12})\partial_1\partial_2L_{12}^{(2)}\Psi_2(\vec{x}, t) - (C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3L_{13}^{(2)}\Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_2(\vec{x}, t) &= -(C_{12} + G_{12})\partial_1\partial_2L_{12}^{(2)}\Psi_1(\vec{x}, t) + L_2^{(4)}\Psi_2(\vec{x}, t) - (C_{23} + G_{23})\partial_2\partial_3L_{23}^{(2)}\Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_3(\vec{x}, t) &= -(C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3L_{13}^{(2)}\Psi_1(\vec{x}, t) - (C_{23} + G_{23})\partial_2\partial_3L_{23}^{(2)}\Psi_2(\vec{x}, t) + L_3^{(4)}\Psi_3(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (3)$$

$$L\bar{\Psi}(\vec{x}, t) = 0, \quad (4)$$

где  $\bar{\Psi}(\bar{x}, t) = (\Psi_1(\bar{x}, t), \Psi_2(\bar{x}, t), \Psi_3(\bar{x}, t))$  - неизвестный векторный волновой потенциал.

Для введенных дифференциальных операторов автором получены такие представления:

$$\begin{aligned}
 L_1^{(4)} &= \left\{ \begin{aligned} &G_{13}G_{12}\partial_1^4 + (G_{23}G_{12} + C_{22}G_{13})\partial_1^2\partial_2^2 + C_{22}G_{23}\partial_2^4 + \\ &+ (C_{33}G_{12} + G_{23}G_{13})\partial_1^2\partial_3^2 + (C_{22}C_{33} - C_{23}^2 - 2C_{23}G_{23})\partial_2^2\partial_3^2 + \\ &+ C_{33}G_{23}\partial_3^4 - [(G_{13} + G_{12})\partial_1^2 + (C_{22} + G_{23})\partial_2^2 + (C_{33} + G_{23})\partial_3^2] \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2 + \frac{\rho^2}{C_0^2}\partial_t^4 \end{aligned} \right\}, \\
 L_2^{(4)} &= \left\{ \begin{aligned} &C_{11}G_{13}\partial_1^4 + (C_{11}G_{23} + G_{13}G_{12})\partial_1^2\partial_2^2 + G_{23}G_{12}\partial_2^4 + \\ &+ (C_{33}G_{12} + G_{23}G_{13})\partial_2^2\partial_3^2 + (C_{11}C_{33} - C_{13}^2 - 2C_{13}G_{13})\partial_1^2\partial_3^2 + \\ &+ C_{33}G_{13}\partial_3^4 - [(C_{11} + G_{13})\partial_1^2 + (G_{23} + G_{12})\partial_2^2 + (C_{33} + G_{13})\partial_3^2] \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2 + \frac{\rho^2}{C_0^2}\partial_t^4 \end{aligned} \right\}, \\
 L_3^{(4)} &= \left\{ \begin{aligned} &C_{11}G_{12}\partial_1^4 + (C_{11}C_{22} - C_{12}^2 - 2C_{12}G_{12})\partial_1^2\partial_2^2 + C_{22}G_{12}\partial_2^4 + \\ &+ (C_{22}G_{13} + G_{23}G_{12})\partial_2^2\partial_3^2 + (C_{11}G_{23} + G_{13}G_{12})\partial_1^2\partial_3^2 + \\ &+ G_{23}G_{13}\partial_3^4 - [(C_{11} + G_{12})\partial_1^2 + (C_{22} + G_{12})\partial_2^2 + (G_{13} + G_{23})\partial_3^2] \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2 + \frac{\rho^2}{C_0^2}\partial_t^4 \end{aligned} \right\},
 \end{aligned}$$

(5)

$$L_{12}^{(2)} = L_{21}^{(2)} = G_{13}\partial_1^2 + G_{23}\partial_2^2 + \left( C_{33} - \frac{(C_{13} + G_{13})(C_{23} + G_{23})}{C_{12} + G_{12}} \right) \partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2,$$

$$L_{13}^{(2)} = L_{31}^{(2)} = G_{12}\partial_1^2 + \left( C_{22} - \frac{(C_{12} + G_{12})(C_{23} + G_{23})}{C_{13} + G_{13}} \right) \partial_2^2 + G_{23}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2,$$

$$L_{23}^{(2)} = L_{32}^{(2)} = \left( C_{11} - \frac{(C_{12} + G_{12})(C_{13} + G_{13})}{C_{23} + G_{23}} \right) \partial_1^2 + G_{12}\partial_2^2 + G_{13}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2.$$

$$\begin{aligned}
 L &= D_{600}\partial_1^6 + D_{060}\partial_2^6 + D_{006}\partial_3^6 + D_{420}\partial_1^4\partial_2^2 + D_{240}\partial_1^2\partial_2^4 + D_{402}\partial_1^4\partial_3^2 + D_{042}\partial_2^4\partial_3^2 + \\ &+ D_{222}\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2 + D_{204}\partial_1^2\partial_3^4 + D_{024}\partial_2^2\partial_3^4 - \rho^3 C_0^{-3}\partial_t^6 - D_{400}\rho C_0^{-1}\partial_1^4\partial_t^2 - \\ &- D_{040}\rho C_0^{-1}\partial_2^4\partial_t^2 - D_{004}\rho C_0^{-1}\partial_3^4\partial_t^2 - D_{220}\rho C_0^{-1}\partial_1^2\partial_2^2\partial_t^2 - D_{202}\rho C_0^{-1}\partial_1^2\partial_3^2\partial_t^2 + \\ &+ D_{022}\rho C_0^{-1}\partial_2^2\partial_3^2\partial_t^2 + D_{200}\rho^2 C_0^{-2}\partial_1^2\partial_t^4 + D_{020}\rho^2 C_0^{-2}\partial_2^2\partial_t^4 + D_{002}\rho^2 C_0^{-2}\partial_3^2\partial_t^4.
 \end{aligned}$$

(6)

После этого задача исследования влияния анизотропии на кинематическую структуру волновых полей в анизотропных кристаллах сводится к исследованию структуры дифференциального оператора шестого порядка с постоянными коэффициентами в основном разрешающем векторном уравнении (4) и структуры дифференциальных операторов четвертого и второго порядков в представлениях (3). Это значит, что для каждого случая упругой симметрии в структуре операторов (5) и (6) необходимо выделить слагаемые, которые при переходе к изотропному материалу дадут тождественно полностью общее решение для изотропного материала, а все остальные слагаемые при этом тождественно обратятся в ноль. Ниже приводятся реализация этой методики и

результаты исследований для наиболее распространенных кристаллов гексагональной и кубической структуры.

### ВОЛНОВОДНЫЕ ОБЪЕКТЫ ИЗ КРИСТАЛЛОВ ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Для этого случая упругой симметрии из девяти остается пять независимых упругих констант так как  $C_{22} = C_{11}$ ,  $C_{23} = C_{13}$ ,  $G_{23} = G_{13}$ ,  $C_{12} = C_{11} - 2G_{12}$ . Это приводит к характерному наличию биволнового и волнового операторных множителей в дифференциальном операторе  $L$ , так как основное разрешающее уравнение (4) для определения векторного потенциала  $\bar{\Psi}(\bar{x}, t)$  после соответствующих необходимых преобразований принимает такой вид:

$$L_{PS}^{(4)} L_{S2}^{(2)} \bar{\Psi}(\bar{x}, t) = 0 \quad (7)$$

Это значит, что волновой векторный потенциал распадается на сумму двух независимых составляющих, т.е.  $\bar{\Psi}(\bar{x}, t) = \bar{\Psi}^{(PS)}(\bar{x}, t) + \bar{\Psi}^{(S2)}(\bar{x}, t)$ . Однако, в отличие от изотропного волноводного объекта [1,5], первая составляющая является биволновой, т.е. взаимосвязанной комбинацией квазипродольной и квазипоперечной (квазисдвиговой) волновых составляющих. Таким образом, биволновой векторный потенциал  $\bar{\Psi}^{(PS)}(\bar{x}, t)$  определяет смешанную продольно-поперечную биволновую составляющую, а волновой векторный потенциал  $\bar{\Psi}^{(S2)}(\bar{x}, t)$  - квазипоперечную (квазисдвиговую) волновую составляющую, которые определяются из следующих разрешающих дифференциальных уравнений четвертого и второго порядков соответственно:

$$L_{PS}^{(4)} \bar{\Psi}^{(PS)}(\bar{x}, t) = \left[ \begin{array}{l} C_{11} G_{13} D^4 + (C_{11} C_{33} - C_{13}^2 - 2C_{13} G_{13}) D^2 \partial_3^2 + C_{33} G_{13} \partial_3^4 - \\ - \left[ (C_{11} + G_{13}) D^2 + (C_{33} + G_{13}) \partial_3^2 \right] \frac{\rho}{C_0} \partial_t^2 + \frac{\rho^2}{C_0^2} \partial_t^4 \end{array} \right] \bar{\Psi}^{(PS)}(\bar{x}, t) = 0, \quad (8)$$

$$L_{S2}^{(2)} \bar{\Psi}^{(S2)}(\bar{x}, t) = (G_{12} D^2 + G_{13} \partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0} \partial_t^2) \bar{\Psi}^{(S2)}(\bar{x}, t) = 0. \quad (9)$$

Для определения кинематической структуры биволновой составляющей преобразуем в уравнении (8) оператор  $L_{PS}^{(4)}$  с выделением характерных слагаемых:

$$\begin{aligned} L_{PS}^{(4)} &= (C_{11} D^2 + C_{33} \partial_3^2 - \rho C_0^{-1} \partial_t^2) (G_{13} D^2 + G_{12} \partial_3^2 - \rho C_0^{-1} \partial_t^2) + (C_{11} (C_{33} - G_{12}) - \\ &- G_{13} (C_{33} - G_{13}) - (C_{13} + G_{13})^2) D^2 \partial_3^2 + C_{33} (G_{13} - G_{12}) \partial_3^4 + (G_{12} - G_{13}) \partial_3^2 \rho C_0^{-1} \partial_t^2 = \\ &= L_{P1}^{(2)} L_{S1}^{(2)} + (C_{11} (C_{33} - G_{12}) - G_{13} (C_{33} - G_{13}) - (C_{13} + G_{13})^2) D^2 \partial_3^2 + \\ &+ C_{33} (G_{13} - G_{12}) \partial_3^4 + (G_{12} - G_{13}) \partial_3^2 \rho C_0^{-1} \partial_t^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Особенностью представления (10) есть то, что при переходе от материала гексагональной структуры к изотропному материалу первое слагаемое переходит в произведение чисто продольной и чисто сдвиговой составляющих, а второе, третье и четвертое слагаемые тождественно обращаются в ноль. Таким образом, кинематика биволновой составляющей для кристаллов гексагональной структуры является сложным

взаимосвязанным сочетанием квазипродольной и квазисдвиговой волновых составляющих.

Кинематическая матрица в представлении вектора перемещений через волновые потенциалы (3) для кристаллов гексагональной структуры также распадается на две соответствующие составляющие: биволновую и волновую. Для определения структуры этих кинематических матриц выделим соответствующие составляющие в каждом элементе исходной кинематической матрицы:

$$\begin{aligned}
 L_1^{(4)} &= L_{PS}^{(4)} - (C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_1^2, & L_{12}^{(2)} &= -\partial_1\partial_2(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}, \\
 L_2^{(4)} &= L_{PS}^{(4)} - (C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_2^2, & L_{13}^{(2)} &= -\partial_1\partial_3(C_{13} + G_{13})L_{S2}^{(2)}, & L_{23}^{(2)} &= -\partial_2\partial_3(C_{13} + G_{13})L_{S2}^{(2)}, \\
 L_3^{(4)} &= L_{PS}^{(4)} - (C_{33} - G_{13})L_{S2}^{(2)}\partial_3^2 - (G_{13} - G_{12})D^2L_{S2}^{(2)} - (C_{11} - G_{13})(L_2^{(2)} - L_{S2}^{(2)})D^2, & & & & (11) \\
 L_2^{(2)} &= L_{S2}^{(2)} + (G_{13} - G_{12})D^2 + (C_{33} - G_{13} - \frac{(G_{13} - G_{12})^2}{(G_{13} - G_{12})})\partial_3^2.
 \end{aligned}$$

После разделения для биволновой составляющей кинематическая структура с учетом (8) получается трехкомпонентной:

$$\begin{aligned}
 U_1^{(PS)}(\vec{x}, t) &= -(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_1(\partial_1\Psi_1^{(PS)}(\vec{x}, t) + \partial_2\Psi_2^{(PS)}(\vec{x}, t)) - (C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3L_{S2}^{(2)}\Psi_3^{(PS)}(\vec{x}, t), \\
 U_2^{(PS)}(\vec{x}, t) &= -(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_2(\partial_1\Psi_1^{(PS)}(\vec{x}, t) + \partial_2\Psi_2^{(PS)}(\vec{x}, t)) - (C_{13} + G_{13})\partial_2\partial_3L_{S2}^{(2)}\Psi_3^{(PS)}(\vec{x}, t), & (12) \\
 U_3^{(PS)}(\vec{x}, t) &= -(C_{13} + G_{13})L_{S2}^{(2)}\partial_3(\partial_1\Psi_1^{(PS)}(\vec{x}, t) + \partial_2\Psi_2^{(PS)}(\vec{x}, t)) + (L_{P1}^{(2)} - (C_{33} - G_{13})\partial_3^2)L_{S2}^{(2)}\Psi_3^{(PS)}(\vec{x}, t).
 \end{aligned}$$

Кинематическая структура для волновой составляющей после разделения с учетом (9) становится двухкомпонентной:

$$\begin{aligned}
 U_1^{(S2)}(\vec{x}, t) &= -(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_2(\partial_1\Psi_2^{(S2)}(\vec{x}, t) - \partial_2\Psi_1^{(S2)}(\vec{x}, t)), \\
 U_2^{(S2)}(\vec{x}, t) &= -(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_1(\partial_2\Psi_1^{(PS)}(\vec{x}, t) - \partial_1\Psi_2^{(PS)}(\vec{x}, t)), & (13)
 \end{aligned}$$

и при этом эта волновая составляющая будет чисто сдвиговой, поскольку  $\partial_1U_1^{(S2)} + \partial_2U_2^{(S2)} = 0$ .

Если в (12) положить  $\Psi_{12}^{(PS)}(\vec{x}, t) = \partial_1\Psi_1^{(PS)}(\vec{x}, t) + \partial_2\Psi_2^{(PS)}(\vec{x}, t)$  и  $\Psi_{33}^{(PS)}(\vec{x}, t) = L_{(S2)}^{(2)}\Psi_3^{(PS)}(\vec{x}, t)$ , а в (13) положить  $\Psi_{21}^{(S)}(\vec{x}, t) = (\partial_1\Psi_2^{(S)}(\vec{x}, t) - \partial_2\Psi_1^{(S)}(\vec{x}, t))L_{S2}^{(2)}$ , то для кинематической структуры волнового поля пространственного волнового объекта из кристаллов гексагональной структуры окончательно получим общее представление вектора перемещений через три скалярных волновых потенциала: два биволновых и один волновой:

$$\begin{aligned}
 U_1(\vec{x}, t) &= -(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_1\Psi_{12}^{(PS)}(\vec{x}, t) - (C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3\Psi_{33}^{(PS)}(\vec{x}, t) - (C_{11} - G_{12})\partial_2\Psi_{21}^{(S)}(\vec{x}, t), \\
 U_2(\vec{x}, t) &= -(C_{11} - G_{12})L_2^{(2)}\partial_2\Psi_{12}^{(PS)}(\vec{x}, t) - (C_{13} + G_{13})\partial_2\partial_3\Psi_{33}^{(PS)}(\vec{x}, t) + (C_{11} - G_{12})\partial_1\Psi_{21}^{(S)}(\vec{x}, t), \\
 U_3(\vec{x}, t) &= -(C_{13} + G_{13})L_{S2}^{(2)}\partial_3\Psi_{12}^{(PS)}(\vec{x}, t) + (L_{P1}^{(2)} - (C_{33} - G_{13})\partial_3^2)\Psi_{33}^{(PS)}(\vec{x}, t). & (14)
 \end{aligned}$$

Из представлений (14), как следствие при переходе к изотропному материалу, получаем классические представления [1,5], а при  $\Psi_{12}^{(PS)}(\vec{x}, t) = 0$  - кинематическую структуру однородных решений для материала гексагональной структуры [2,4].

Ниже в таблице для ряда различных материалов гексагональной структуры, упругие константы которых внесены в таблицу с точностью до множителя  $10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, приведена реализация разработанной методики и получены значений безразмерных коэффициентов

$$G1 = \frac{C_{11}(C_{33} - G_{12}) - G_{13}(C_{33} - G_{13}) - (C_{13} + G_{13})^2}{C_{11}G_{13}} \quad \text{и} \quad G2 = \frac{C_{33}(G_{13} - G_{12})}{C_{11}G_{13}}.$$

Таблица 1

Материал	C11	C33	C13	G13	G12	C12	G1	G2
$\alpha$ -ZnS	12.34	13.96	4.55	2.885	3.245	5.85	1.2638	-0.1412
CdS	9.07	9.38	5.10	1.504	1.63	5.81	1.0874	-0.0866
CdSe	7.41	8.36	3.93	1.317	1.445	4.52	1.4790	-0.1097
ZnO	20.9718	21.0941	10.513	4.2449	4.4289	12.114	0.6760	-0.0436
Zn	16.35	5.31	5.17	3.78	6.855	2.64	-1.7984	-0.2642
Cd	12.12	4.45	4.42	1.8	3.655	4.81	-1.5504	-0.3784
PZT-4	13.9	11.5	7.43	2.56	3.06	7.78	-0.1509	-0.1616
Be	29.23	33.64	1.4	16.25	13.28	2.67	0.0021	0.2103
Co	30.7	35.8	10.27	7.55	7.1	16.5	1.5111	0.0695
PbTiO <sub>3</sub>	14.27	13.1	2.4	5.58	5.55	3.17	0.0263	0.0049
Эклогит	17.5	20.81	5.9	5.85	5.725	6.05	0.3752	0.0254
CdS	8.16	8.08	4.79	14.3	1.605	4.95	-1.908	0.8791
ЦТС-19	11.2	10.6	6.22	2.49	2.39	6.42	-0.1472	0.0380
BaTiO <sub>3</sub>	15.0	14.6	6.6	4.4	4.2	6.6	-0.1497	0.0442

При переходе к изотропии эти коэффициенты тождественно обращаются в ноль, поэтому вычисленные значения коэффициентов для каждого материала позволяют сделать первичную классификацию рассмотренных материалов с точки зрения вклада второго и третьего слагаемых в структуру дифференциального оператора (10) и, следовательно, в кинематическую структуру биволновой составляющей при уходе от изотропии. Из таблицы видно, что по сочетанию знаков коэффициентов G1 и G2 все приведенные материалы делятся на четыре группы. В пределах каждой группы характер кинематической структуры волнового поля согласно (10) будет идентичным, а степень отличия от изотропии в каждой группе при этом будет характеризоваться величиной модуля коэффициентов G1 и G2.

### ВОЛНОВОДНЫЕ ОБЪЕКТЫ ИЗ КРИСТАЛЛОВ КУБИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Этот случай упругой симметрии характеризуется всего тремя независимыми упругими константами  $C = C_{11} = C_{22} = C_{33}$ ,  $\lambda = C_{12} = C_{13} = C_{23}$ ,  $G = G_{12} = G_{13} = G_{23}$ . В отличие от волноводных объектов изотропной и гексагональной структуры в разрешающем векторном волновом уравнении (4) для кристаллов кубической структуры дифференциальный оператор  $L$  не распадается на операторные множители и в общем случае после достаточно громоздких преобразований принимает такой вид

$$L = L_{KP}^{(2)}L_{KS}^{(2)}L_{KS}^{(2)} + (C + \lambda)[(C - (\lambda + 2G))\{(D^2\partial_3^2 + \partial_1^2\partial_2^2)L_{KS}^{(2)} + [(C - G) - 2\frac{(\lambda + G)^2}{C + \lambda}]\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2\}], \quad (15)$$

где

$$L_{KP}^{(2)} = C\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2, \quad L_{KS}^{(2)} = G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2.$$

Особенностью представления (15) есть то, что при переходе от материала кубической структуры к изотропному материалу полагаем  $C = \lambda + 2G$  и первое слагаемое переходит в произведение чисто продольной и двух чисто сдвиговых составляющих, а второе слагаемое тождественно обращается в ноль. Это значит, что в волноводных объектах из материала кубической структуры в отличие от материала изотропной и гексагональной структуры кинематическая структура волнового поля в общем случае есть трехволновой, т.е. сложным взаимосвязанным сочетанием одной квазипродольной и двух квазипоперечных волновых составляющих. Заслуживает внимания особый случай когда  $C \neq \lambda + 2G$ , а  $(C - G) - 2\frac{(\lambda + G)^2}{C + \lambda} = 0$ . Но такая ситуация невозможна, ибо тогда необходимо чтобы  $C = -(2\lambda + G)$  т.е.  $C < 0$  чего не может быть.

Выражения для дифференциальных операторов в представлении вектора перемещений (3) для кристаллов кубической структуры после выделения характерных слагаемых принимают вид:

$$\begin{aligned} L_1^{(4)} &= (L_{KP}^{(2)} - (C - G)\partial_1^2)L_{KS}^{(2)} + (C + \lambda)[C - (\lambda + 2G)]\partial_3^2\partial_3^2, \\ L_2^{(4)} &= (L_{KP}^{(2)} - (C - G)\partial_2^2)L_{KS}^{(2)} + (C + \lambda)[C - (\lambda + 2G)]\partial_1^2\partial_3^2, \\ L_3^{(4)} &= (L_{KP}^{(2)} - (C - G)\partial_3^2)L_{KS}^{(2)} + (C + \lambda)[C - (\lambda + 2G)]\partial_1^2\partial_2^2, \\ L_{12}^{(2)} &= -(\lambda + G)\partial_1^2\partial_2^2(L_{KS}^{(2)} + (\lambda + G)[(C - (\lambda + 2G)]\partial_3^2), \\ L_{13}^{(2)} &= -(\lambda + G)\partial_1^2\partial_3^2(L_{KS}^{(2)} + (\lambda + G)[(C - (\lambda + 2G)]\partial_2^2), \\ L_{23}^{(2)} &= -(\lambda + G)\partial_2^2\partial_3^2(L_{KS}^{(2)} + (\lambda + G)[(C - (\lambda + 2G)]\partial_1^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Из выражений (16) следует, что кинематическая матрица в представлении вектора перемещений (3) для кристаллов кубической структуры не распадается на независимые составляющие и в этом случае представление вектора перемещений через волновые потенциалы окончательно принимает такой вид:

$$\begin{aligned} U_1(\vec{x}, t) &= L_1^{(4)}\Psi_1(\vec{x}, t) - (\lambda + G)\partial_1\partial_2L_{12}^{(2)}\Psi_2(\vec{x}, t) - (\lambda + G)\partial_1\partial_3L_{13}^{(2)}\Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_2(\vec{x}, t) &= -(\lambda + G)\partial_1\partial_2L_{12}^{(2)}\Psi_1(\vec{x}, t) + L_1^{(4)}\Psi_2(\vec{x}, t) - (\lambda + G)\partial_2\partial_3L_{23}^{(2)}\Psi_3(\vec{x}, t), \\ U_3(\vec{x}, t) &= -(C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3L_{13}^{(2)}\Psi_1(\vec{x}, t) - (C_{23} + G_{23})\partial_2\partial_3L_{23}^{(2)}\Psi_2(\vec{x}, t) + L_3^{(4)}\Psi_3(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (17)$$

Структура дифференциальных операторов (16) имеет характерную важную особенность явного перехода к изотропному материалу, так как когда  $C = \lambda + 2G$  вторые слагаемые в выражениях для этих операторов тождественно равны нулю, а первые слагаемые после подстановки в представления (17) совпадают с классическими представлениями для изотропного материала [1,5].

По разработанной методике для кристаллов кубической структуры, исходя из представления (15), также можно ввести два коэффициента, характеризующие отличие от изотропии:

$$K1 = \frac{(C + \lambda)(C - (\lambda + 2G))}{CG} \quad \text{и} \quad K2 = (C - G - 2 \frac{(\lambda + G)^2}{C + \lambda})G^{-1}.$$

Эти коэффициенты при переходе к изотропии тождественно обращаются в ноль, но при этом, следуя структуре представления (15), коэффициент K1 является основным, а коэффициент K2 – дополнительным. Численная реализация разработанной методики для ряда различных материалов кубической структуры приведена ниже в таблице в виде значений безразмерных коэффициентов K1 и K2, которые позволяют сделать первичную классификацию этих материалов с точки зрения влияния упругих свойств материала на характер отличия от изотропии кинематической структуры волнового поля в них:

Таблица 2

Материал	C	G	$\lambda$	K1	K2
Ge	13.0	6.7	4.9	-1.0892	-1.3037
LiF	11.2	6.32	4.56	-1.3359	-1.6048
MgO	29.59	15.39	9.54	-0.9220	-1.1414
GaP	11.4	7.043	3.475	-1.1414	-1.4933
GaAs	12.26	6.00	5.71	-1.3314	-1.5002
B-ZnS	10.46	4.613	6.53	-1.8648	-1.9010
ZnSe	8.72	3.92	5.24	-1.7806	-1.8421
BaF <sub>2</sub>	9.04	2.53	4.06	-0.0458	-0.0475
SrTiO <sub>3</sub>	31.76	12.35	10.25	-0.3417	-0.3973
NaCl	4.911	1.284	1.285	1.0396	1.1656
NaF	9.71	2.8	2.43	0.7501	0.8585
NaI	3.04	0.72	0.9	1.2601	1.3720
KCl	4.07	0.63	0.69	3.9356	4.2982
KBr	3.46	0.515	0.56	4.2188	4.6021
AgCl	6.01	0.625	3.62	2.9226	2.6280
AgBr	5.63	0.72	3.3	1.9606	1.7926
CsCl	3.64	0.8	0.92	1.7538	1.9281
Bi <sub>4</sub> (GeO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub>	11.58	4.36	2.7	0.0452	0.0548

Упругие константы внесены в таблицу, как и ранее, с точностью до множителя  $10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>. Из приведенных в таблице полученных результатов следует, что материалы кубической структуры по сочетанию знаков коэффициентов K1 и K2 делятся не на четыре группы, а всего на две группы. При этом разброс отклонений от изотропии во второй группе выражен гораздо сильнее, чем в первой группе и сильнее, чем в материалах гексагональной структуры.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. Космодамианский А.С., Моисеенко В.А. Вынужденные колебания толстых транслопных плит под действием произвольной поперечной нагрузки // Доклады АН УССР, Сер.: Физико-математические и технические науки. – 1980. - №12. – С.27-30.

3. *Лехницький С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М:Наука, 1977. - 416 с.
4. *Мысовский Ю.В., Сторожев В.И., Шалдырван В.А.* Однородные решения пространственных задач о вынужденных колебаниях трансропных пластин. // Теоретическая и прикладная механика. – 1977.-Вып.8.- С.66-73.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. – М:Наука, 1975. - 618 с.
6. *Шульга Н.А.* Волновые потенциалы для упругой трансверсально-изотропной среды // Доклады АН УССР, Сер.: Физико-технические и математические науки. -1973. - №6. – С.547-549.