

ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА, ЗАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ И ОКРУЖЕННОГО УПРУГОЙ СРЕДОЙ, ГЕНЕРИРУЕМОЕ ИСТОЧНИКОМ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

В. Т. ГРИНЧЕНКО, Г. Л. КОМИССАРОВА
Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

ВВЕДЕНИЕ

Эксплуатация трубопроводов сопровождается образованием различного типа дефектов. Обусловлено это тем, что перекачка по трубопроводу жидкости приводит к образованию газонасыщенной среды. Пузырьки газа являются источником кавитации при возникновении зон разрежения. В этих зонах в трубопроводе могут развиваться откольные явления с образованием больших кавитационных полостей, отверстий и трещин. При вытекании газонасыщенной среды через отверстие пузырьки газа лопаются, создавая звуковое поле в трубопроводе. Для интерпретации звуковых полей, зафиксированных приборами неразрушающего контроля и диагностики, необходимо иметь числовые данные о характеристиках волновых полей в зависимости от типа дефекта и его расположения. Сложность решения этих задач существенно возрастает, в случае контакта трубопровода с окружающей средой и учета излучения энергии в среду. В этом случае дисперсионное уравнение волноводной системы становится комплексным.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

При решении задачи трубопровод моделируем бесконечной тонкостенной идеально упругой изотропной цилиндрической оболочкой, заполненной идеальной сжимаемой жидкостью и окруженной идеальной упругой средой. Наличие дефекта в трубопроводе, через который вытекает жидкость, моделируем воздействием точечной низкочастотной гармонической нагрузки вида

$$q(z, \theta, t) = F \delta(\theta) \delta(z) \exp(-i \omega t). \quad (1)$$

Для описания волнового поля в трубопроводе оболочки использованы уравнения движения цилиндрической оболочки типа Тимошенко [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} - \nu \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\rho_1 a^2}{E} (1-\nu^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\rho_1 a^2}{E} (1-\nu^2) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - w - \frac{h^2}{12a^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - 2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) &= \\ = \frac{\rho_1 a^2}{E} (1-\nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + iF \frac{(1-\nu^2)a}{Eh} \delta(\theta) \delta(z) \exp(-i\omega t) + \frac{(1-\nu^2)}{Eh} P_f(z, \theta, t) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь u, v, w – соответственно продольные, окружные и поперечные компоненты вектора смещения; r, z, θ – радиальная, продольная и окружная координаты; P_f – распределенная нагрузка, обусловленная воздействием внутренней жидкости и окружающей упругой средой; a и h – срединный радиус и толщина цилиндрической оболочки; E, ρ, ν – модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала оболочки; ω – круговая частота. Все линейные величины отнесены к срединному радиусу оболочки.

Поскольку внешняя нагрузка гармоническая по времени то полагаем, что нагрузка P_f и компоненты вектора смещений также являются гармоническими функциями по времени. В работе [2] рассмотрен случай цилиндрической оболочки, заполненной и окруженной жидкой средой. Решение рассматриваемой граничной задачи (упругая окружающая среда) строим по принятой в [2] методике.

Потенциал скорости внутренней жидкости, удовлетворяющий уравнение Гельмгольца, имеет вид [3]

$$\begin{aligned} \varphi_{0n} &= D_{0n} J_n(\chi_0 r) \cos n\varphi \exp[i(\zeta z - \omega t)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \chi_0^2 &= \left(\frac{\omega a}{C_0}\right)^2 - \zeta^2 = \left(\frac{V_s}{C_0}\right)^2 \gamma^2 - \zeta^2, \quad (0 \leq r \leq 1), \quad \gamma = \frac{\omega a}{V_s} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ζ – безразмерная постоянная распространения, $J_n(r)$ – функция Бесселя, C_0 – скорость звука в жидкости, D_{0n} – произвольная постоянная.

В качестве окружающей упругой среды рассмотрены песчанно-глинистые породы. К ним относятся песок, глина, песчаник, аргелиты. Для этих пород скорость волн сдвига V_{S2} значительно меньше скорости волн расширения V_{D2} [4]. Учитывая, что при контакте цилиндрической оболочки с окружающей упругой средой имеет место проскальзывание ($\delta_{zr} = 0$) и то, что $V_{S2} \ll V_{D2}$, а также излучение энергии в окружающую среду, потенциал скорости окружающей среды представляем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{2n} &= D_{2n} H_n^{(1)}(\chi_2 r) \cos n\varphi \exp[i(\zeta x - \omega t)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ H_n^{(1)}(\chi_2 r) &= J_n(\chi_2 r) + iY_n(\chi_2 r), \quad \chi_2^2 = \left(\frac{V_s}{V_{D2}}\right)^2 \gamma^2 - \zeta^2, \quad (1 \leq r \leq \infty) \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $H_n^{(1)}(\chi_2 r)$ – функция Ханкеля, D_{2n} – произвольная постоянная.

Выражение для P_{fn} находим из условия равенства радиальных скоростей цилиндрической оболочки и контактирующих с ней внутренней жидкой и внешней упругой сред

$$P_{fn} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{J_n(\chi_0)}{J_n'(\chi_0 r)_{r=1}} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{H_n^{(1)}(\chi_2)}{H_n^{(1)'}(\chi_2 r)_{r=1}} \right) w_n \quad (5)$$

Здесь значок (') означает дифференцирование по r .

Разлагая в ряд Фурье по окружной координате функцию $\delta(\theta)$, компоненты вектора смещений и P_f , а также используя преобразование Фурье относительно продольной координаты, получаем следующую неоднородную систему уравнений относительно изображений $\bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n$.

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{2}{1-\nu} \zeta^2 + n^2 - \gamma^2 \right) \bar{u}_n + \frac{1+\nu}{1-\nu} n \zeta \bar{v}_n - \frac{2\nu}{1-\nu} \zeta \bar{w}_n = 0, \\
 & \frac{1+\nu}{1-\nu} n \zeta \bar{u}_n + \left(\zeta^2 + \frac{2}{1-\nu} n^2 - \gamma^2 \right) \bar{v}_n - \frac{2}{1-\nu} n \bar{w}_n = 0, \\
 & -\frac{2}{1-\nu} \zeta \bar{u}_n - \frac{2}{1-\nu} n \bar{v}_n + \left\{ \frac{2}{1-\nu} \left[1 + \frac{h^2}{12a^2} (\zeta^2 + n^2)^2 \right] - \right. \\
 & \left. \gamma^2 \left[1 + \frac{a}{h} (b_0^{(n)} - b_2^{(n)}) \right] \right\} \bar{w}_n = -\frac{V}{4\pi} \frac{a}{h}, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (6) \\
 & b_0^{(n)} = \frac{\rho_0}{\rho_1} b_0^*, \quad b_0^* = \frac{J_n(\chi_0)}{J'_n(\chi_0 r)_{r=1}}, \quad b_2^{(n)} = \frac{\rho_2}{\rho_1} b_2^*, \quad b_2^* = \frac{H_n^{(1)}(\chi_2)}{H_n^{(1)}(\chi_2 r)_{r=1}}.
 \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (1.6) в соответствии с правилом Крамера представляем в виде

$$[\bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n] = \frac{\Delta^{(nk)}}{\Delta^{(n)}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, 3) \quad (7)$$

Здесь $\Delta_3^{(n)}$ определитель системы уравнений (1.6), приравнивая который нулю, получаем дисперсионное уравнение для данного волновода. Оно связывает безразмерную частоту γ и постоянную распространения ζ при заданных безразмерных физических и геометрических параметрах. В области параметров γ и ζ , в которой χ_2 является мнимым, дисперсионное уравнение $\Delta_3^{(n)} = 0$ становится действительным и может иметь действительные корни. Переходя от изображений к оригиналу, получим решение исходной системы уравнений (2). В частности, после выполнения обратного преобразования Фурье поперечные перемещения срединной поверхности цилиндрической оболочки принимают вид

$$w_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{33}^{(n)}}{\Delta_3^{(n)}} e^{i\zeta z} d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Res} \left(\frac{\Delta_{33}^{(n)}}{\Delta_3^{(n)}} \right) e^{i\zeta_j z} - \int_{L_2} \frac{\Delta_{33}^{(n)}}{\Delta_3^{(n)}} e^{i\zeta z} d\zeta. \quad (8)$$

Аналогичный вид имеют выражения для продольных и окружных перемещений. Здесь интеграл Фурье представлен интегралом на комплексной плоскости ζ . На комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ подинтегральное выражение (1.8) имеет четыре точки ветвления $\zeta_{1,2} = \pm \gamma \frac{V_S}{C_0}$ и $\zeta_{3,4} = \gamma \frac{V_S}{V_{D2}}$, ($k_0 = \omega / C_0$) и полюса в точках $\zeta = \zeta_j$. Здесь ζ_j – корни дисперсионного уравнения. Используя теорему Коши и лемму Жордана, несобственный интеграл представлен в виде суммы двух слагаемых: суммы вычетов и интегралов по берегам разрезов к точкам ветвления [5, 6]. Исследования показали, что интегралы по разрезу к точкам ветвления $\zeta_{1,2}$ равны нулю. Отличным от нуля является только интеграл по контуру L_2 к точкам ветвления $\zeta_{3,4}$, обусловленных окружающей средой. Для вычисления вычетов необходимо определять корни дисперсионного уравнения составного волновода.

2. АНАЛИЗ ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве примера рассмотрена стальная цилиндрическая труба, заполненная водой и окруженная песчанно-глинистой породой. Согласно [4] для этих пород выбраны следующие средние значения физических параметров: $\rho_2 = 2,7 \text{ г/см}^3$, $V_{D2} = 5500 \text{ м/сек}$. Для рассматриваемого волновода имеем следующие значения параметров: $\nu = 0,25$, $\rho_0 / \rho_1 = 0,13$, $\rho_2 / \rho_1 = 0,58$, $V_{S1} / C_0 = 2,14$, $V_{S1} / V_{D2} = 0,58$. Внешний радиус трубы $R = 10 \text{ см}$, толщина $h = 1 \text{ см}$, а относительный внутренний радиус $r_1 = R_1 / R = 0,9$. Корни дисперсионного уравнения вычисленно для значений $n = 0,1$ и 2 в диапазоне частот от 1 КГц до 4 КГц . В табл. 1 приведены значения действительных корней, а в табл. 2 – комплексных корней для $n = 0,1$ и 2 .

Табл. 1 – Действительные корни дисперсионного уравнения составного волновода, окруженного упругой средой (вода – сталь – песчанно-глинистые породы $r_1 = 0,9$)

ω (КГц)	γ_2	ζ_0	ζ_1
1	0,187029	0,44253	0,61787
2	0,374058	0,89980	1,0222
3	0,561081	1,3914	1,5052
4	0,748116	1,9702	2,1504

Табл. 2 – Комплексные корни дисперсионного уравнения составного волновода, окруженного упругой средой (вода – сталь – песчанно-глинистые породы)

ω (КГц)	$\text{Re } \zeta_0$	$\text{Im } \zeta_0$	$\text{Re } \zeta_1$	$\text{Im } \zeta_1$	$\text{Re } \zeta_2$	$\text{Im } \zeta_2$
1	0,11797	$0,446 \cdot 10^{-3}$	-0,01632	0,47227	0,84546	0,03763
2	0,23566	$0,499 \cdot 10^{-2}$	-0,02287	0,56518	1,2872	0,16258
3	0,34510	$0,908 \cdot 10^{-2}$	-0,021814	0,57382	1,5367	0,22363
4	0,45680	$0,643 \cdot 10^{-2}$	-0,01251	1,52754	1,7484	0,24931

Действительные и комплексные корни цилиндрического волновода, окруженного упругой средой, мало отличаются (несколько увеличились) от соответствующих корней для случая окружающей жидкой среды [2]. Комплексные корни для $n = 2$ заметно отличаются (значительно увеличились).

Для рассматриваемого волновода на рис. 1 показано влияние частоты источника нагружения на распределение поперечных перемещений по длине $W^*(z)$ для угловой координаты $\theta = 0$.

Здесь рис. 1,а соответствует частоте 1 КГц , рис. 1,б – частоте 2 КГц и рис. 1, в – частоте 4 КГц . В случае упругой окружающей среды характер зависимости $W^*(z)$ можно условно разбить на два этапа. На первом этапе модуль амплитуды $W^*(z) = W(z) / W(0)$ быстро уменьшается, а на втором изменяется почти по гармоническому закону. Длина первого этапа существенно уменьшается с увеличением частоты: для $\omega = 1 \text{ КГц}$ его длина составляет $6a$, для $\omega = 2 \text{ КГц}$ – $3,6a$, для $\omega = 3 \text{ КГц}$ – $2,4a$, для $\omega = 4 \text{ КГц}$ – $1,8a$. Здесь

a – срединный радиус трубы, $a = R - \frac{h}{2}$. На втором этапе с увеличением частоты источника увеличивается амплитуде перемещений $w(z)$ и уменьшается длина волны. Характер зависимости $W^*(z)$ указывает, что на втором этапе волновое поле формируют бегущие волны, которым соответствуют действительные корни дисперсионного уравнения. В табл.3 приведены значения длин волн, соответствующих бегущим волна для рассмотренного значения частот.

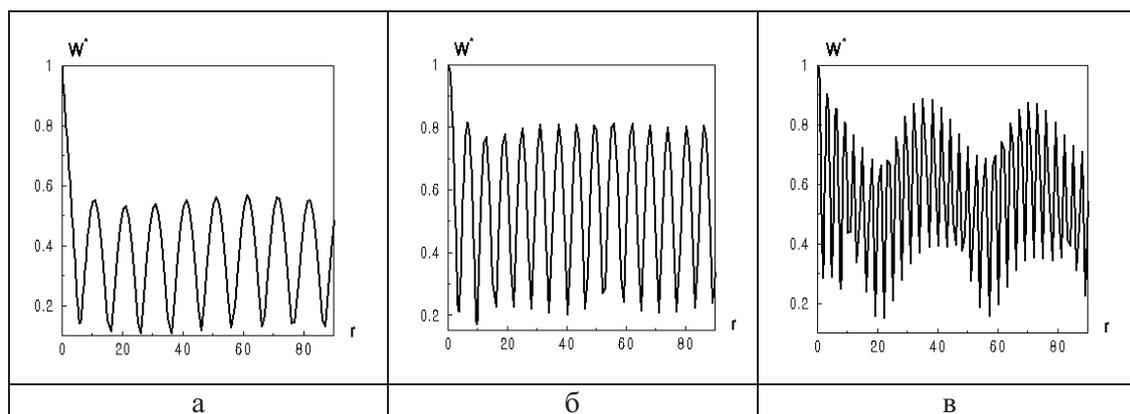


Рис. 1 – Частотная зависимость характеристик волнового поля

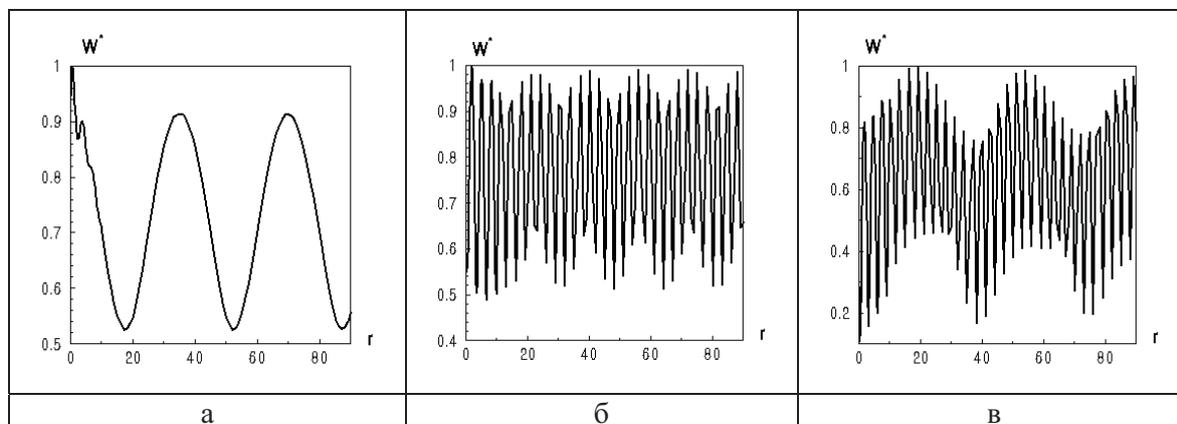


Рис. 2 – Угловая зависимость характеристик волнового поля

Табл. 3 – Частотная зависимость длины волны

ω (КГц)	ζ_0	λ_0	ζ_1	λ_1
1	0.44253	14.1984	0.61787	10.1691
2	0.89980	6.9829	1.0222	6.1467
3	1.3914	4.4908	1.5052	4.1743
4	1.9702	3.1891	2.1504	2.9219

Характер углової залежності $W^*(z)$ на частоті 4 КГц показан на рис. 2. Здесь рис. 2,а соответствует углу $\theta = \pi / 4$, рис. 2,б – $\theta = \pi / 2$ и 2,в – $\theta = \pi$. Сравнение $W^*(z)$ для $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ показывает, что в отличие от окружающей жидкой среды для этих значений угловой x координат симметрия волнового поля отсутствует.

Сравнение кинематических характеристик срединной поверхности цилиндра ($W^*(z)$) для случаев окружающей упругой и жидкой сред показывает, что определение места расположения дефекта (приложения нагрузки) на поверхности цилиндра в случае упругой окружающей среды является более сложной задачей, чем в случае жидкой среды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана методика определения волнового поля гармоническим точечным источником в составном цилиндрическом волноводе, заполненном жидкостью и окруженного упругой средой при учете излучения энергии в окружающую среду.

2. Показано, что в случае упругой окружающей среды, которая соответствует песчанно-глинистым породам, волновое поле условно можно разбить на два этапа: быстрого уменьшения амплитуды колебаний и установившихся колебаний. С увеличением частоты источника длина первого этапа существенно уменьшается, а на втором этапе уменьшается длина волны.

3. Волновое поле рассматриваемого составного цилиндрического волновода существенно зависит от угловой координаты.

4. Определение места расположения дефекта на поверхности трубопровода является более сложной задачей в случае окружающей упругой среды по сравнению со случаем среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жарий О.Г., Улитко А.Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. – Киев: Выща школа. – 1989. – 184 с.
2. Комиссарова Г.Л. Передача возмущений, генерируемых источником в упругом тонкостенном цилиндре, заполненном и окруженном жидкостью // Консанс – 2003. – Акустичний симпозіум, 1 - 3 жовтня 2003 р. Збірник праць. – Київ. – 2003. – С. 293-298.
3. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Осесимметричные волны в упругом полом цилиндре, заполненном и окруженном жидкостью // Прикладная механика. – 1994. – **30**, № 9. – С.15-23.
4. Петрофизика (в 3 книгах) Книга 1: Горные породы и полезные ископаемые. – М.: Недра. – 1992. – 392 с.
5. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Излучение точечного источника внутри упругого полого цилиндра, помещенного в акустическую среду. Общее решение и вычислительный алгоритм // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 5. – С.20-29.
6. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Излучение точечного источника внутри упругого полого цилиндра, помещенного в акустическую среду. Свойства нормальных волн и направленность излучения // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 5. – С.12-23.