ВОЛНОВАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ФЕРРОЖИДКОСТИ

И. Т. СЕЛЕЗОВ, док. физ.- мат. наук, проф.
Институт гидромеханики НАН Украины
03680, Киев, Желябова, 8/4

ВВЕДЕНИЕ

Представлена новая обобщенная модель феррогидродинамики, в которой учитываются эффекты сжимаемости и тепловой релаксации. Система нелинейных уравнений линеаризуется относительно невозмущенного поля давления, плотности, температуры, скорости, напряженности магнитного поля и намагниченности. В результате исходные уравнения сводятся к системе трех разрешающих скалярных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболо-эллиптического типа, что предсказывает распространение волн с конечной скоростью в отличие от традиционной модели (Maxwell, 1967; Selezov, 2000) [8, 10)]. Исследуется разрешимость соответствующих задач о распространении плоских волн. Показано, что решения типа стационарных волн не существуют. Получены условия разрешимости в случае распространения монохроматических волн.

Феррогидродинамика изучает поведение суспензии, которая состоит из жидкости и намагничиваемых частиц – феррочастиц. Такая частица показана на рисунке ниже.

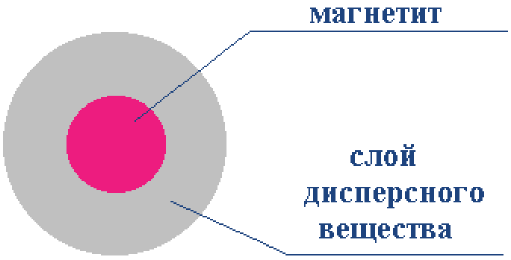

Рис. 1.

Магнитная жидкость (феррожидкость) включает частицы размером $3-15\,нм = (3-15)10^{-9}\,м = 0.000001\,мм$ расположенные в вакуумном масле. Плотность частиц равна $10^{23}\,частиц\,/\,м^3$.

На основе традиционной модели проводились исследования различных задач [3, 5, 6, 11, 15-19]. Рассматривалась также динамика взвешенных ферромагнитных частиц в суспензии при действии магнитного поля [2, 20].

ТРАДИЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ФЕРРОГИДРОДИНАМИКИ ПАРАБОЛИЧЕСКИ - ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Макроскопическое поведение такой жидкости может описываться рассмотрением дисперсии как континуума (Neuringer & Rosensweig, 1964) [7]. Соответствующая система уравнений, традиционно применяемая приведена ниже (Берковский и др., 1989; Rosensweig, 1989) [1, 9].

$$\rho\left[\partial\vec{V}/\partial t+\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right]=-\vec{\nabla}P+\eta\nabla^2\vec{V}+\mu_0\left(\vec{M}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}\,, \quad \text{(C1)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0, \qquad \partial T/\partial t+\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)T=\chi\nabla^2T+f(\vec{V})\,, \quad \text{(C2)}$$

$$\rho=\rho^*\left[1-\beta\left(T-T^*\right)\right], \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}=0, \qquad \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}+\vec{M}\right)=0, \quad \text{(C3)}$$

$$\vec{M}=M\vec{H}/H,\; M=M^*-K_p\left(T-T^*\right)+\chi_r\left(H-H^*\right). \quad \text{(C4)}$$

Система (C1) - (C2) записана в общепринятых обозначениях.

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ФЕРРОГИДРОДИНАМИКИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИ-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Соответствующая замкнутая система обобщенных уравнений приведена ниже (Selezov, 2007, 2009) [12-14].

Уравнение сохранения импульса

$$\tilde{\rho}\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right]=-\vec{\nabla}p+\mu_0(\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{H}\,, \quad (1)$$

обобщенное уравнение состояния

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}=-K\vec{\nabla}\cdot\vec{V}+\beta K\frac{\partial T}{\partial t}\,, \quad (2)$$

обобщенное гиперболическое уравнение распространения тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\nabla^2T - \tau\frac{\partial^2T}{\partial t^2}-\gamma\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\,, \quad (3)$$

уравнения Максвелла

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=0, \qquad \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}+\vec{M}\right)=0\,, \quad (4)$$

материальные уравнения

$$\tilde{\rho}=\rho_0\left[1-\beta\left(T-T_0\right)\right], \qquad \vec{M}=\frac{\vec{H}}{H}M\,, \quad (5)$$

$$M=M_0-K_p\left(T-T_0\right)+\chi\left(H-H_0\right), \quad (6)$$

В (1) – (6) приняты следующие обозначения: $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ - пространственные координаты, t - время, $\vec{\nabla}$ - гамильтониан, ∇^2 - лапласиан, $(\bullet)$ и $(\times)$ - символы скалярного и векторного произведения, $\tilde{p}$ - давление, $\tilde{\rho}$ - плотность, T - температура, $\vec{V}$ - вектор скорости, $\vec{H}$ - вектор напряженности магнитного поля, $\vec{M}$ - вектор намагниченности, μ_0 - магнитная проницаемость, K - коэффициент объемного расширения, β - коэффициент объемной температурной дилатации, κ - коэффициент теплопроводности, τ - время тепловой релаксации, γ - коэффициент термоупругой диффузии, K_p - пиромагнитная постоянная, χ - восприимчивость.

Представим поле в виде суммы невозмущенных и возмущенных компонент в предположении, что в начальном состоянии среда покоится

$$\begin{aligned} &\tilde{p}\ \left(\vec{x},t\right)=p_0+p\left(\vec{x},t\right), &&\tilde{\rho}\left(\vec{x},t\right)=\rho_0+\rho\left(\vec{x},t\right)\ , \\ &\vec{V}\ \left(\vec{x},t\right)=0+\vec{v}\left(\vec{x},t\right), &&T\left(\vec{x},t\right)=T_0\left(\vec{x}\right)+\hat{t}\left(\vec{x},t\right)\ , \\ &\vec{H}\left(\vec{x},t\right)=\vec{H}_0\left(\vec{x}\right)+\vec{h}\left(\vec{x},t\right), &&\vec{M}\left(\vec{x},t\right)=\vec{M}_0\left(\vec{x}\right)+\vec{m}\left(\vec{x},t\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Предположение малости возмущенных величин по сравнению с невозмущенными приводит к линеаризованной замкнутой системе уравнений для скалярных функций φ, $\hat{t}$ и $\psi\left(\vec{v}=\vec{\nabla}\varphi,\ \ \vec{h}=\vec{\nabla}\psi\right)$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c_0^2\nabla^2\varphi=-\beta c_0^2\frac{\partial\hat{t}}{\partial t}+\frac{\mu_0\left(1+\chi\right)}{\rho_0}\left(\vec{\nabla}\psi_0\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\hat{t}}{\partial t^2}-c_h^2\nabla^2\hat{t}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\hat{t}}{\partial t}=\frac{1}{\tau}\nabla^2\varphi \tag{9}$$

$$\nabla^2\psi=\frac{K_p}{\chi}\nabla\hat{t}\ , \tag{10}$$

где $$c_0=\sqrt{\frac{K}{\rho_0}}\ \ ,\ \ c_h=\sqrt{\frac{K}{\tau}}\ .$$

Уравнение (8) включает в правой части член, учитывающий влияние температурного поля и диссипации, связанной с потерями в магнитной жидкости. Уравнение (9) включает член с релаксацией времени и член, учитывающий влияние дилатационного поля. Как видно от уравнения (8), последний член не равен нулю только в том случае, когда $\vec{\nabla}\psi_0\neq 0$.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

Предполагается, что в направлении оси Ox распространяется плоская волна. В этом случае система уравнений (8) – (10) представляется в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\beta c_0^2\frac{\partial\hat{t}}{\partial t}+\frac{\mu_0\left(1+\chi\right)}{\rho_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi_0\left(x\right)\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2\hat{t}}{\partial t^2}-c_h^2\frac{\partial^2\hat{t}}{\partial x^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\hat{t}}{\partial t}=\frac{1}{\tau}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\ , \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{K_p}{\chi}\frac{\partial\hat{t}}{\partial x}\ . \tag{13}$$

В дальнейшем рассматривается случай постоянного невозмущенного магнитного поля $H_0=const$. Тогда

$$\psi_0\left(x\right)=H_0x\ \ \Rightarrow\ \ \frac{\partial\psi_0\left(x\right)}{\partial x}=H_0\,. \tag{14}$$

Уравнения (11) - (13) в случае (14) могут быть сведены к следующему уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\ \left[\tau\frac{\partial^2\hat{t}}{\partial t^2}-\tau c_h^2\frac{\partial^2\hat{t}}{\partial x^2}+\frac{\partial\hat{t}}{\partial t}\right]-\left[-\underbrace{\beta c_0^2}_{q_t}+\underbrace{\frac{\mu_0\left(1+\chi\right)}{\rho_0}H_0\frac{K_p}{\chi}}_{q_m}\right]\frac{\partial^3\hat{t}}{\partial x^2\partial t}=0 \tag{15}$$

После некоторых преобразований уравнение (15) может быть представлено в виде

$$\tau\frac{\partial^4\hat{t}}{\partial t^4}-\tau\left(c_h^2+c_0^2\right)\frac{\partial^4\hat{t}}{\partial t^2\partial x^2}+\tau c_0^2c_h^2\frac{\partial^4\hat{t}}{\partial x^4}+\frac{\partial^3\hat{t}}{\partial t^3}+\left(q_t-q_m\right)\frac{\partial^3\hat{t}}{\partial t\partial x^2}=0. \qquad (16)$$

СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

Для исследования стационарных волн функция $\hat{t}$ представляется как

$$\hat{t}\left(x,\,t\right)=f\left(x-ct\right)=f\left(\theta\right), \qquad (17)$$

где θ фаза.

В классе решений (17) уравнение (16) может быть приведено к следующему уравнению:

$$f''-\frac{a_1}{a_2}f'-\frac{a_0}{a_2}f=0, \qquad (18)$$

где

$$a_0=\tau\left(\ c_h^2+c_0^2\right)c^2,\quad a_1=c\left(\ c^2+q_t-q_m\right),\qquad a_2=\tau\left(\ c^4+c_0^2c_h^2\right).$$

Общее решение уравнения (18) записывается в виде

$$f\left(\theta\right)=B_1e^{\kappa_1\theta}+B_2e^{\kappa_2\theta}, \qquad (19)$$

где

$$\kappa_{1,2}=\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2+\frac{a_0}{a_2}}. \qquad (20)$$

Из (20) следует, что действительные корни существуют при условиях $a_1^2>4a_0,\ c^2+q_t>q_m$ и в этом случае решения уравнения (16), соответствующие стационарным волнам (17), не существуют.

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

В этом случае решение представляется в виде распространяющихся монохроматических волн

$$\hat{t}\left(x,\,t\right)\sim e^{i\left(kx-\omega t\right)}. \qquad (21)$$

После подстановки (21) в уравнение (16) мы получаем условие разрешимости в виде

$$\tau c_p^4-\tau\left(c_h^2+c_0^2\right)c_p^2+\tau c_0^2c_h^2+i\frac{\lambda}{2\pi}c_p^3+i\left(q_t-q_m\right)\frac{\lambda}{2\pi}c_p=0, \qquad (22)$$

где $c_p=\dfrac{\omega}{k}$ - фазовая скорость, $\omega=\dfrac{2\pi}{\lambda}c_p$ - круговая частота, $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число, λ - длина волны.

В общем случае уравнение (22) имеет две пары комплексно сопряженных корней. Ниже рассматриваем два вырожденных случая: длинноволновое приближение и коротковолновое приближение. В первом случае при $\lambda\to\infty$ (*или* $\tau\to 0$) медленное движение определяется условием существования решений

$$c_p=\sqrt{q_m-q_t},\qquad q_m>q_t. \qquad (23)$$

Во втором случае при $\lambda\to 0$ уравнение (22) вырождается и сводится к виду

$$c_p^4-\left(c_h^2+c_0^2\right)c_p^2+c_0^2c_h^2=0 \qquad (24)$$

Уравнение (24) имеет два действительных корня, что дает условия разрешимости: $c_p = c_h$ и $c_p = c_0$, которые соответствуют двум характеристикам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С.* Магнитные жидкости. - М.: Химия, 1989 - 240 с.: англ. перевод: *Berkovsky, B., Medvedev V., Krakov M.* Magnetic fluids: engineering applications. - Oxford University Press, 1993.
2. *Новак И.Л., Селезов И.Т.* Некоторые модели и задачи механики суспензий ферромагнитных частиц // Тез. докл. Всесоюз. симп. “Гидродинамика и теплофизика магнитных жидкостей”, Латвийская ССР, Рига, Сала-спилс, 30 сентября – 2 октября 1980. – С. 115–122.
3. *Радионов А.В., Селезов И.Т.* Анализ возможности применения магнито-жидкостных устройств в космической технике // Сб. тез. 2-ой укр. конф. по перспективным космическим исследованиям. - Крым, Кацивели, 2002. – С. 127.15.
4. *Селезов И.Т.* Распространение волн в магнитных жидкостях с временной релаксацией // Акустический симпозиум. – Киев, 27–29 сентября 2005. - С. 279–282.
5. *Селезов И.Т., Гайдук В.Ф., Кравцов А.И., Новак И.Л.* Численное и экспери-ментальное исследование комбинированных магнитожидкостных уплотнений // Нелинейные задачи гидроаэромеханики и теории упругости. – Днепропетровск: ДГУ, 1987. – С. 48–53.
6. *Селезов И.*, *Радионов А.* О моделировании поведения магнитной жидкости в кольцевом зазоре герметизатора // Proc. 12th Int. Scientific and Engineering Conference “Hermetic sealing, vibration reliability and ecological safety of pump and compressor machinery”(HERVICON 2008), Vol. 2, Poland, Kielce-Przemysl, 9-12 September 2008. - C. 27-32.
7. *Neuringer J.L., Rosensweig R.E.* Ferrohydrodynamics // Phys. Fluids, 1964, **7**, N 12, 1927-1937.
8. *Maxwell J.C.* On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. Roy. Soc., 1967. - **157**, - P. 49-89.
9. *Rosensweig R.E.* Ferrohydrodynamics. - Cambridge University Press. - 1985. Русский перевод: *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. - М.: Мир, 1989. - 356 с.
10. *Selezov I.* Nonlinear wave propagation in close to hyperbolic systems // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. 8th Int. Conf. in Magdeburg. – 2000. – Vol. 2; Int. Ser. of Numerical Mathematics. – Vol. 141 / Ed. by H. Freistuhler and G. Warnecke. Basel / Switzerland: Birkhauser Verlag, 2001. – P. 851 – 860.
11. *Selezov I.* Some wave problems of magnetofluids // Book of Abstracts, 9th International Conf. on Magnetic Fluids, Germany, Bremen, 23 – 27 July 2001.
12. *Selezov I.* Extended ferrohydrodynamic equations to predict finite velocity disturbance propagation // Proc. Int. Symp. “Trends in Continuum Physics” (TRECOP’07), 16–20 September 2007, Ukraine, Lviv, Briukhovichi. – P. 66–67.
13. *Selezov I.T.* An extended wave model of magnetofluid dynamics // Book of Abstracts, 11th Int. Conf. on Magnetic Fluids (ICMF 11), Slovakia, Kosice, 23–27 July 2007. – P. 6P1.
14. *Selezov I.T.* On wave hyperbolic model for disturbance propagation in magnetic fluid. Ser. Operator Theory. Advances and Applications, Vol. 191. Birkhauser Verlag Basel / Switzerland, 2009. – P. 221–225.

15. *Selezov I.T., Korsunsky S.V.* Nonlinear waves in an hydroelastic systems with magnetic fluids // Abstracts, 5th Int. Conf. on Magnetic Fluids, Salaspils, Latvian Acad. Sci., 18–22 September 1989. – P. 150–151.
16. *Selezov I.T., Korsunskii S.V.* Nonlinear waves in hydroelastic systems with magnetic fluids // Magnetohydrodynamics. – 1991. – **27**, N 2. – P. 154–156.
17. *Selezov I., Korsunsky S., Mironchuk M.* The effect of localized inhomogeneity on nonlinear wave propagation in magnetic fluid layer // Abstracts, 8th Int. Conf. on Magnetic Fluids (ICMF 8), Romania, Timisoara, 29 June – 3 July 1998. – P. 355–356.
18. *Selezov I.T., Mironchuk M.V.* Wave propagation in a layer of magnetic liquid // J. Math. Sci. – 2001. – **103**, N 3. – P. 414–417.
19. *Selezov I., Morozova L., Radionov A.* Some estimates of centrifugal, magnetic and temperature fields in ferrofluid seals // Book of Abstracts, 9th International Conf. on Magnetic Fluids, Germany, Bremen, 23 – 27 July 2001.
20. *Selezov I.T., Taran E.Yu., Pridatchenko Yu.V., Taran D.E.* Dynamics of anysotropic ferromagnetic suspended particles in the presence of flows and magnetic field // Program and Abstracts, 6th Int. Conf. on Magnetic Fluids, Paris, France, 1992. – P. 452–453.