ФУНКЦІЯ ГРІНА КОНВЕКТИВНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПРЯМОГО ЖОРСТКОСТІННОГО КАНАЛУ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

А. О. БОРИСЮК
Інститут гідромеханіки НАН України, вул. Желябова, 8/4, 03680 Київ-180 МСП
Тел. (+38-044) 453-26-55   E-mail: aobor@mail.ru

A Green’s function of the three-dimensional wave equation for an infinite straight rigid-walled channel of circular cross-section with mean flow is found. This function is written in terms of the series of the channel acoustic modes, and is periodic in the angular co-ordinate and symmetric about the axial section of the unit point impulse source location. Each term of the series is a sum of the direct and reverse waves propagating in the corresponding channel mode downstream and upstream of the noted source. In the found Green’s function the mean flow effects are directly reflected. The effects become more significant as the flow Mach number increases, causing, in particular, the appearance and further growth of the function asymmetry about the cross-section of the source location. And vice versa, the decrease of the Mach number results in the decrease of the effects and, in particular, the decrease of the indicated asymmetry of the function. In the limiting case of the mean flow absence, the obtained Green’s function is symmetric about the indicated cross-section and coincides with the corresponding Green’s function for the investigated channel, which is available in the scientific literature.

ВСТУП

Проблеми знаходження й дослідження акустичних полів у каналах є актуальними у нафтогазовій промисловості, автомобіле- та літакобудуванні, архітектурі, медицині, комунальному господарстві тощо [1-5]. Всі вони, незалежно від типу каналів й акустичних джерел у них, в принципі можуть бути розв’язані за допомогою методу функцій Гріна. Проте застосування цього методу є доцільним лише за умови існування принципової можливості побудови відповідної функції Гріна.

Ця можливість, окрім кваліфікації дослідника, залежить від геометрії досліджуваного каналу та форми його поперечного перерізу, фізичних властивостей його стінок та умов його закріплення, акустичних умов на кінцях каналу та наявності або відсутності течії в ньому тощо. Як показує аналіз наукової літератури, серед випадків, які визначаються різними комбінаціями цих факторів, найбільш дослідженими є випадки нескінченного прямого жорсткостінного каналу прямокутного та кругового поперечного перерізів (див., наприклад, [1, 3, 4-10] та відповідні посилання в них). Для цих випадків побудовано відповідні функції Гріна хвильового рівняння і рівняння Гельмгольца, а також, з їх допомогою, одержано вирази для різних характеристик акустичних полів, згенерованих відповідними джерелами у зазначених каналах. Проте всі ці результати, як правило, обмежуються випадком відсутності течії в каналі. Якщо ж наявність течії і береться до уваги, то її ефекти у відповідних функціях Гріна та/або кінцевих результатах проявляються лише у неявному вигляді [1, 3, 5, 8].

Цей недолік частково виправляється у даній роботі. Тут будується функція Гріна хвильового рівняння для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Ця функція має явну залежність від параметрів течії, а у разі її відсутності – співпадає з відповідною функцією Гріна для зазначеного каналу, яка наведена в науковій літературі [1, 3, 5-8, 10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається нескінченний прямий жорсткостінний канал кругового поперечного перерізу радіусу a (див. рис.), в якому з осередненою осьовою швидкістю U тече рідина. У каналі задані як завгодно розташовані акустичні джерела різної природи, які створюють в ньому акустичне поле. Це поле описується специфічним типом тривимірного хвильового рівняння, яке в науковій літературі часто називають тривимірним *конвективним* хвильовим рівнянням [8, 10]:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 p_a}{\mathrm{d}t^2} - \nabla^2 p_a = \gamma$$

(1)

(тут p_a - акустичний тиск, c_0 - швидкість звуку в незбуреній рідині, а функція γ описує сумарний розподіл зазначених джерел). Необхідно побудувати функцію Гріна рівняння (1) для досліджуваного каналу.

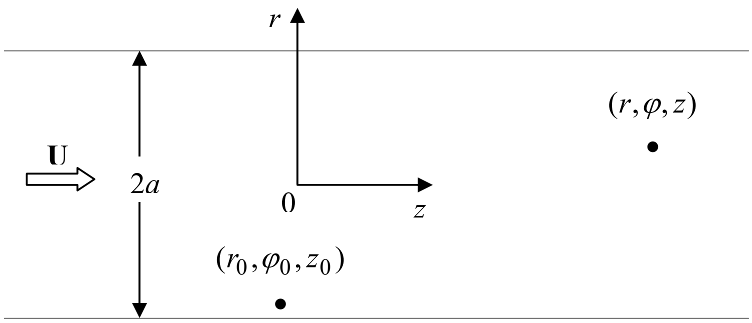

Рис. Геометрія задачі.

2. ФУНКЦІЯ ГРІНА КОНВЕКТИВНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Функція Гріна $G(\vec{r},t;\vec{r}_0,t_0)$ рівняння (1) задовольняє рівняння

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}t^2} - \nabla^2 G = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\delta(t-t_0),$$

(2)

і описує акустичний тиск у точці поля $\vec{r}$ в момент часу t, який генерується в каналі у момент часу t_0 одиничним точковим імпульсним джерелом, розташованим у точці $\vec{r}_0$ (див. рис.).

У циліндричній системі координат (r,φ,z), яка вводиться для розв'язування задачі, рівняння (2) має такий вигляд:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}t^2} - \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right] = \frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)\delta(t-t_0);$$

(3)

$$0 \le r, r_0 \le a;\ 0 \le \varphi, \varphi_0 \le 2\pi;\ |z| < \infty;\ |z_0| < \infty;\ |t| < \infty;\ |t_0| < \infty;$$

де $\delta(...)$ - дельта-функція Дірака, а

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + U^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$
(4)

Граничними умовами для функції G є рівність нулеві її радіальної похідної на нерухомій жорсткій стінці досліджуваного каналу:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$$
(5)

і умова випромінювання у нескінченність[1]. Крім цього, G має бути періодичною по координаті φ:

$$G\big|_{\varphi=\varphi_* + 2n\pi} = G\big|_{\varphi=\varphi_*}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
(6)

симетричною відносно площини $\varphi = \varphi_0$ розташування зазначеного джерела:

$$G\big|_{\varphi=\varphi_0 + \Delta\varphi} = G\big|_{\varphi=\varphi_0 - \Delta\varphi}, \qquad \Delta\varphi > 0$$
(7)

і задовольняти умову причинності [6-10]:

$$G\big|_{t<t_0} = 0,$$
(8)

Розв’язок задачі (3)-(8) шукаємо у вигляді ряду по акустичних модах каналу $\left\{\Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)}\right\}$:

$$G(r,\varphi,z,t;r_0,\varphi_0,z_0,t_0) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}^{(j)}(z,t;r_0,\varphi_0,z_0,t_0)\Psi_{nm}^{(j)}(r,\varphi),$$
(9)

$\Psi_{nm}^{(1)}(r,\varphi) = J_n(\alpha_{nm}r)\cos(n\varphi)$, $\Psi_{nm}^{(2)}(r,\varphi) = J_n(\alpha_{nm}r)\sin(n\varphi)$,

де J_n - циліндричні функції Бесселя першого роду порядку n; $\alpha_{nm} = \zeta_{nm}/a$ - радіальні хвильові числа; ζ_{nm} - корені рівняння $J_n^{/}(\zeta_{nm}) = 0$ ($m = 1,2,\ldots$); а $\Psi_{0m}^{(2)} \equiv 0$. Вибрана у такому вигляді функція G автоматично задовольняє умову (5).

У представленні (9) невідомими є коефіцієнти $G_{nm}^{(j)}$. Для їх визначення підставимо ряд (9) у розписане з урахуванням (4) рівняння (3), помножимо одержане при цьому спввідношення скалярно на функції $\Psi_{nm}^{(j)}$ і врахуємо ортогональність останніх:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^{(j)}\Psi_{sq}^{(j)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \begin{cases} \left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2, (s,q) = (n,m), \\ 0, (s,q) \neq (n,m), \end{cases} \qquad \int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^{(1)}\Psi_{sq}^{(2)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 0, \qquad j = 1,2,$$

$$\left\|\Psi_{nm}^{(1)}\right\|^2 = \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m}a), n = 0, \\ \dfrac{\pi a^2}{2} J_n^2(\alpha_{nm}a)\left[1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nm}^2 a^2}\right], n \ge 1, \end{cases} \qquad \left\|\Psi_{nm}^{(2)}\right\|^2 = \begin{cases} 0, n = 0, \\ \left\|\Psi_{nm}^{(1)}\right\|^2, n \ge 1. \end{cases}$$

(10)

У результаті одержимо диференціальне рівняння для $G_{nm}^{(j)}$:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial t^2} + 2\frac{M}{c_0}\frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial t \partial z} - \left(1 - M^2\right)\frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial z^2} + \alpha_{nm}^2 G_{nm}^{(j)} = \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2}\delta(z - z_0)\delta(t - t_0),$$

(11)

$$|z| < \infty;\ |z_0| < \infty;\ |t| < \infty;\ |t_0| < \infty; \quad j = 1,2;\ n \ge 0;\ m \ge 1;$$

в якому $M = U / c_0$ - число Маха осередненої течії в каналі, а квадрати норм його акустичних мод $\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2$ даються в (10).

Аналіз рівняння (11) показує, що воно, за вийнятком доданків, які містять число M, співпадає з одновимірним рівнянням Кляйна-Гордона[2], розв'язок якого для досліджуваного каналу відомий [6, 7]. Щоб позбутися цих доданків і перейти, таким чином, до зазначеного рівняння, введемо нові безрозмірні змінні:

$$Z = \frac{\lambda z}{a}, \quad Z_0 = \frac{\lambda z_0}{a}, \quad T = \lambda^{-1}\frac{c_0 t}{a} + M\frac{\lambda z}{a}, \quad T_0 = \lambda^{-1}\frac{c_0 t_0}{a} + M\frac{\lambda z_0}{a}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}.$$

(12)

У змінних (12) рівняння (11) стає класичним одновимірним рівнянням Кляйна-Гордона:

$$\frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial Z^2} + \alpha_{nm}^2 a^2 G_{nm}^{(j)} = a^2\frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2}\delta\left(\frac{a}{\lambda}(Z - Z_0)\right)\delta\left(\frac{\lambda a}{c_0}(T - T_0 - M(Z - Z_0))\right), \quad (13)$$

$$|Z| < \infty;\ |Z_0| < \infty;\ |T| < \infty;\ |T_0| < \infty; \quad j = 1,2;\ n \ge 0;\ m \ge 1,$$

розв'язок якого є суперпозицією прямої та зворотньої хвиль, які поширюються відповідно вправо та вліво від джерела, розташованого у точці $Z = Z_0$ [6, 7]:

$$G_{nm}^{(j)} = \frac{c_0}{2}\frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2}\left[H(Z_0 - Z)\cdot H(T - T_0 + Z - Z_0) + H(Z - Z_0)\cdot H(T - T_0 - (Z - Z_0))\right] \times$$
$$\times J_0\left(\alpha_{nm}a\sqrt{(T - T_0)^2 - (Z - Z_0)^2}\right).$$

(14)

Тут $H(...)$ є функцією Хевісайда, а також було взято до уваги умову випромінювання у нескінченність.

Врахування у формулі (14) співвідношень (12) дозволяє одержати остаточні вирази для коефіцієнтів $G_{nm}^{(j)}$ у представленні (9):

$$G_{nm}^{(j)} = \frac{c_0}{2} \cdot \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0,\varphi_0)}{\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2} \cdot \left[H\left(\frac{\lambda}{a}(z_0 - z)\right) \cdot H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M+1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) + \right.$$
$$\left. + H\left(\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) \cdot H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M-1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right)\right] \times$$
$$\times J_0\left(\alpha_{nm} a \sqrt{\frac{c_0^2}{\lambda^2 a^2}(t-t_0)^2 + 2\frac{c_0 M}{a^2}(t-t_0)(z-z_0) + (M^2-1)\frac{\lambda^2}{a^2}(z-z_0)^2}\right).$$

(15)

Тоді підстановка величин (15) у співвідношення (9) дає вираз для шуканої функції Гріна рівняння (1) для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу з осередненою течією:

---

1) Перша умова означає рівність нулеві радіальної компоненти акустичної швидкості на стінці каналу, тоді як друга - відсутність відбиття звуку на його кінцях (на нескінченності).

2) Оскільки зазначені доданки з’являються в (11) внаслідок існування в (3) та (4) відмінної від нуля конвективної похідної $U(\partial/\partial z)$, то їх можна назвати конвективними, а саме рівняння (11) – одновимірним конвективним рівнянням Кляйна-Гордона.

$$G(r,\varphi,z,t;r_0,\varphi_0,z_0,t_0) = \frac{c_0}{2} \cdot \left[H\left(\frac{\lambda}{a}(z_0 - z)\right) \cdot H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M+1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) + H\left(\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) \times \right.$$
$$\left. \times H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M-1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right)\right] \cdot \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0,\varphi_0)}{\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r,\varphi) \times$$
$$\times J_0\left(\alpha_{nm} a \sqrt{\frac{c_0^2}{\lambda^2 a^2}(t-t_0)^2 + 2\frac{c_0 M}{a^2}(t-t_0)(z-z_0) + (M^2-1)\frac{\lambda^2}{a^2}(z-z_0)^2}\right).$$

(16)

Бачимо, що функція Гріна (16) записується у вигляді ряду по акустичних модах зазначеного каналу $\Psi_{nm}^{(j)}$. Кожен член цього ряду являє собою суму прямої та зворотньої хвиль, які поширюються відповідно вниз та вгору за течією від одиничного точкового імпульсного джерела, розташованого у поперечному перерізі каналу $z = z_0$. При цьому, як і має бути (див. (6) - (8)), функція G є періодичною по кутовій координаті φ, симетричною відносно площини $\varphi = \varphi_0$ і задовольняє умову причинності.

Подальший аналіз співвідношення (16) показує, що в побудованій функції Гріна у явному вигляді відображені ефекти осередненої течії (через числа M і $\lambda = \lambda(M)$). Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа M, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції G відносно площини $z = z_0$ розташування зазначеного джерела. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу осередненої течії на функцію G зменшується, спричиняючи, окрім іншого, зменшення вказаної її асиметрії. У граничному ж випадку відсутності осередненої течії ($M = 0$, $\lambda = 1$) функція (16) стає симетричною відносно площини $z = z_0$ і співпадає з функцією Гріна хвильового рівняння для досліджуваного каналу, яка наведена в науковій літературі [6-10]:

$$G\big|_{M=0} = \frac{c_0}{2} \cdot \left[H\left(\frac{1}{a}(z_0 - z)\right) \cdot H\left(\frac{c_0}{a}(t - t_0) + \frac{1}{a}(z - z_0)\right) + H\left(\frac{1}{a}(z - z_0)\right) \cdot H\left(\frac{c_0}{a}(t - t_0) - \frac{1}{a}(z - z_0)\right)\right] \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) \cdot J_0\left(\alpha_{nm} \sqrt{c_0^2 (t - t_0)^2 - (z - z_0)^2}\right).$$

ВИСНОВКИ

1. Побудовано функцію Гріна тривимірного хвильового рівняння (див. вираз (16)) для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Ця функція записується у вигляді ряду по акустичних модах зазначеного каналу і є періодичною по азимутальній координаті φ та симетричною відносно площини $\varphi = \varphi_0$ розташування одиничного точкового імпульсного джерела.
2. У функції Гріна (16) кожен член ряду являє собою суму прямої та зворотньої хвиль, які поширюються на відповідній моді каналу вниз та вгору за течією від зазначеного джерела.
3. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти осередненої течії. Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції відносно поперечного перерізу $z = z_0$ розташування зазначеного джерела. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу осередненої течії на функцію Гріна (16) зменшується, спричиняючи, окрім іншого, зменшення зазначеної її асиметрії.
4. У граничному випадку відсутності осередненої течії побудована функція Гріна є симетричною відносно перерізу $z = z_0$ і співпадає з відповідною функцією Гріна для досліджуваного каналу, яка наведена в науковій літературі.
5. У процесі побудови функції Гріна запропоновано перетворення, котре дозволяє зводити одновимірне конвективне рівняння Кляйна-Гордона[2] (11) до його класичного одновимірного аналогу (13), і на основі відомого розв'язку останнього одержувати розв'язок першого рівняння.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Борисюк А. О.* Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 1. Загальна теорія // Акуст. вісн. – 2003. – 6, №3. – С.3-9.
2. *Вовк И. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С.* Особенности движения среды в каналах со стенозами // Прикл. гідромех. – 2009. – 11, №4. – С.17-30.
3. *Davies H. G., Ffowcs Williams J. E.* Aerodynamic sound generation in a pipe // J. Fluid Mech. – 1968. – 32, №4. – P. 765-778.
4. *Doak P. E.* Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length (1): the effects of duct cross-section geometry and source distribution space-time pattern // J. Sound Vib. – 1973. – 31, №1. – P.1-72.