ЕФЕКТ МЕЖОВОГО ШАРУ В НЕСТАЦІОНАРНІЙ ПЛОСКІЙ ДЕФОРМАЦІЇ ЦИЛІНДРА ЗА НЕНУЛЬОВИХ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

В. А. ГАЛАЗЮК, Г. Т. СУЛИМ, А. І. ПРОКОПІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка

В класичній постановці нестаціонарних задач теорії пружності у переміщеннях, як правило, початкові умови приймаються нульовими для уникнення потреби виконання узгодженості крайових умов з початковими, як того вимагає коректна [1] постановка задач математичної фізики. Зазначимо, що початкові умови на переміщення і швидкості задаються у всьому тілі, а тому однозначно визначають початкові напруження у ньому, включаючи і його межу. При цьому початковий розподіл переміщень і швидкостей обумовлюють початкову механічну енергію тіла, а тому є великою мірою визначальним для його подальшого руху. Подальша зміна енергії у кожній точці тіла буде визначатися його фізико-механічними властивостями, геометрією та крайовими умовами, які разом забезпечуватимуть напрям та інтенсивність енергетичних потоків.

У запропонованій постановці нестаціонарної задачі межа циліндра у відповідності з відомим [2] ефектом реставрації поверхні, який полягає у тому, що поверхню тіла моделюємо межовим шаром (наноплівкою). Введений в розгляд межовий шар реалізує початковий розподіл нормального напруження на поверхні циліндра і створює слідкуюче в часі нормальне довантаження, що забезпечує існування заникаючого в часі (дисипативного) нестаціонарного процесу.

1. Тіло циліндричної форми віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha,\beta,R\gamma)$, де R - радіус циліндра, і будемо вважати, що вектор пружного переміщення $\vec{\mathbf{u}}$ має тільки одну не рівну нулю радіальну складову $Ru_\alpha(\alpha,\tau)$. У цьому випадку рівняння руху пружного тіла в переміщеннях

$$c_1^2 \mathrm{graddiv}\vec{u} - c_2^2 rotrot\vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

зводиться до одного хвильового рівняння

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha\theta) = \partial_\tau^2\theta,\ 0 \le \alpha \le 1 \tag{1}$$

відносно об'ємної деформації $\theta(\alpha,\tau) = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\alpha)$. В рівнянні (1) ∂_α і ∂_τ - оператори диференціювання за α і τ відповідно, $\tau = c_1 t R^{-2}$ - безрозмірний час, $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu$ - швидкість поширення поздовжніх хвиль.

Розв'язок рівняння в частинних похідних (1) подамо інтегралом Фур'є за часовою змінною

$$\theta(\alpha,\tau) = \int_0^\infty \xi A(\xi,q) J_0(\xi\alpha)\sin\xi\tau d\xi + \int_0^\infty \xi B(\xi,q) J_0(\xi\alpha)\cos\xi\tau d\xi \tag{2}$$

де $A(\xi,q)$ і $B(\xi,q)$ - довільні функції, які визначаються початковими умовами задачі, $q > 0$ - параметр, $J_0(\xi\alpha)$ - функція Бесселя нульового порядку. Якщо функція $\theta(\alpha,\tau)$ (2) знайдена, то відповідно до її означення шляхом інтегрування знайдемо, що

$$u_\alpha(\alpha,\tau)=\int_0^\infty A(\xi,q)J_1(\xi\alpha)\sin\xi\tau d\xi+\int_0^\infty B(\xi,q)J_1(\xi\alpha)\cos\xi\tau d\xi\,. \qquad (3)$$

За відомим радіальним переміщенням $u_\alpha(\alpha,\tau)$ (3) та об'ємною деформацією $\theta(\alpha,\tau)$ (2) і законом Гука знайдемо радіальне напруження через функції $A(\xi,q)$ і $B(\xi,q)$:

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\tau)=\mu\left\{\int_0^\infty \xi A(\xi,q)\left[k^2J_0(\xi\alpha)-J_2(\xi\alpha)\right]\sin\xi\tau d\xi+\right.$$

$$\left.\int_0^\infty \xi B(\xi,q)\left[k^2J_0(\xi\alpha)-J_2(\xi\alpha)\right]\cos\xi\tau d\xi\right\}. \qquad (4)$$

2. Розглянемо рух циліндра при заданому початковому розподілі переміщення

$$u_\alpha(\alpha,0)=u_\alpha^0\alpha f\left(\alpha^2\right) \quad 0\le\alpha\le1$$

у площині його перерізу і відсутності початкової швидкості $\partial_\tau u_\alpha(\alpha,0)=0$. Тоді у поданні (3) $A(\xi,q)=0$, а для визначення функції $B(\xi,q)$ одержимо інтегральне рівняння першого роду

$$\int_0^\infty B(\xi,q)J_1(\xi\alpha)d\xi=u_\alpha^0\alpha f\left(\alpha^2\right) \quad 0\le\alpha\le1\,, \qquad (5)$$

розв'язок якого подамо узагальненим рядом [3] Неймана

$$B(\xi,q)=\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{J_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^q},\quad q>0 \qquad (6)$$

з невідомими коефіцієнтами a_n .

Якщо ряд (6) підставити в інтегральне рівняння (5) і обчислити інтеграл Вебера-Шафгейтліна [4], то одержимо рівняння

$$\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{\Gamma(n-q+2)\alpha F\left(n-q+2;-n;2;\alpha^2\right)}{2^q\Gamma(n+1)}=u_\alpha^0\alpha f\left(\alpha^2\right) \qquad 0\le\alpha\le1\,, \qquad (7)$$

де гіпергеометрична функція Гаусса $F\left(n-q+2;-n;2;\alpha^2\right)$ є поліномом степеня $2n$. Відповідно до апроксимаційної теореми Вейєрштрасса про наближення неперервної функції поліномом існує єдиний набір коефіцієнтів a_n, які забезпечують виконання рівняння (7).

За відомими коефіцієнтами a_n і функцією $B(\xi,q)$ (6) визначимо переміщення у часі точок площини перерізу циліндра

$$u_\alpha(\alpha,\tau)=\sum_{n=0}^\infty a_n\int_0^\infty\frac{J_1(\xi\alpha)J_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^q}\cos\xi\tau d\xi \qquad (8)$$

а також нормальні напруження

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\tau)=\mu\sum_{n=0}^\infty a_n\int_0^\infty\frac{J_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^{q-1}}\left[k^2J_0(\xi\alpha)-J_2(\xi\alpha)\right]\cos\xi\tau d\xi \quad , \qquad (9)$$

які виникають в результаті руху за законом (8) і створюють слідкуюче в часі нормальне довантаження поверхні циліндра. В результаті цього динамічний процес в циліндрі є завжди заникаючим в часі (дисипативний), хоча у рівнянні руху (1) дисипативні члени відсутні.

Інтеграли у поданнях (8) і (9) обчислюються числовими методами, проте на осі циліндра $\alpha = 0$ нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(0,\tau)$ обчислюється точно. За формулою (9) при $\alpha = 0$ для напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(0,\tau)$ одержимо розривний інтеграл Фур'є

$$\sigma_{\alpha\alpha}(0,\tau) = \mu k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^{q-1}} \cos\xi\tau d\xi \quad ,$$

а тому в інтервалі $0 \le \tau \le 1$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(0,\tau) = \mu k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+2) F\left(n-q+2;-n;0,5;\tau^2\right)}{2^{q-1}\Gamma(n+1)}, \tag{10}$$

а в інтервалі $1 \le \tau < \infty$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(0,\tau) = \mu k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\sqrt{n}\Gamma(n-q+2) F\left(n-q+2;n-q+2,5;2n-q+3;\tau^{-2}\right)}{2^{q-1}\Gamma(2n-q+3)\Gamma(-n+q-1,5)\tau^{2n-2q+4}}. \tag{11}$$

Таким чином, нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(0,\tau)$ на осі циліндра має різні аналітичні вирази в інтервалі $0 \le \tau \le 1$ і $1 \le \tau < \infty$. Оскільки процес руху циліндра в часі повинен бути неперервним і обмеженим, то будемо вимагати виконання таких граничних умов:

$$\lim_{\tau \to 1-0} \sigma_{\alpha\alpha}(0,\tau) = \lim_{\tau \to 1+0} \sigma_{\alpha\alpha}(0,\tau), \quad \lim_{\tau \to \infty} \sigma_{\alpha\alpha}(0,\tau) = 0. \tag{12}$$

Так як гіпергеометрична функція Гаусса $F\left(a;b;c;x^2\right)$ існує і обмежена в точці $x = 1$ за умови $c - a - b > 0$, то рівності (12) будуть виконуватися $\forall n \in N_0$, якщо

$$1,5 < q < 2. \tag{13}$$

Проте, відповідно до закону розподілу переміщень інтеграл у поданні (8) існує за умови $0,5 \le q \le 1,5$. Тому перекриття цих множин є таким

$$0,5 \le q \le 1,5.$$

Отже, розподіл переміщень і напружень в циліндрі зокрема і на його рухомій межі визначається поданнями (8) та (9) і залежить від параметра q, значення якого обмежені нерівністю (13).

3. Як приклад розглянемо випадок, коли початковий розподіл радіального переміщення $u_\alpha(\alpha,0)$ є лінійним за змінною α. Тоді в інтегральному рівнянні (5) $f\left(\alpha^2\right) = 1$ і з рівняння (7) одержимо, що

$$a_0 = \frac{2^q u_\alpha^0}{\Gamma(2-q)}, \; a_n = 0 \quad \forall n \in N.$$

Тому за поданнями (8) та (9) у цьому випадку знайдемо:

$$u_\alpha(\alpha,\tau) = \frac{2^q u_\alpha^0}{\Gamma(2-q)} \int_0^{\infty} \frac{J_1(\xi\alpha) J_{-q+2}(\xi)}{\xi^q} \cos\xi\tau d\xi \quad , \tag{14}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\tau) = \frac{2^q u_\alpha^0 \mu k^2}{\Gamma(2-q)} \int_0^{\infty} \left[k^2 J_0(\xi\alpha) - J_2(\xi\alpha)\right] \frac{J_{-q+2}(\xi)}{\xi^{q-1}} \cos\xi\tau d\xi \quad . \tag{15}$$

Отже, радіальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}\left(\alpha,\tau\right)$ формулою (15) визначене у всіх точках поперечного перерізу циліндра включаючи і його межу $\alpha=1$, яка рухається за законом (14), а тому не може бути задане довільним чином.

За поданням (15) обчислимо поведінку в часі напруження $\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right)$ на осі циліндра. Відповідно до виразів (10) та (11) матимемо, що в інтервалі часу $0\le\tau\le1$

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right)=2\mu k^2u_\alpha^0 \qquad (16)$$

і є сталим, а в інтервалі часу $1\le\tau<\infty$

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right)=2\mu k^2u_\alpha^0\frac{\sqrt{n}F\left(2-q;2,5-q;3-q;\tau^{-2}\right)}{\Gamma\left(3-q\right)\Gamma\left(q-1,5\right)\tau^{4-2q}}. \qquad 1,5<q<2, \qquad (17)$$

причому мають особливість при $\tau=1$, якщо $0,5\le q\le1,5$

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right)=2\mu k^2u_\alpha^0\frac{\sqrt{n}F\left(1;0,5;3-q;\tau^{-2}\right)}{\Gamma\left(3-q\right)\Gamma\left(q-1,5\right)\left(\tau^2-1\right)^{1,5-q}\tau^{7-4q}}. \qquad (18)$$

Зокрема, при $q=1$

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\tau\right)=-\frac{2\mu k^2u_\alpha^0}{\tau^2\left(\tau+\sqrt{\tau^2-1}\right)\sqrt{\tau^2-1}}$$

і має кореневу особливість при $\tau=1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант – М. : Из-во «Мир», 1964. – 830 с.
2. Наумовец А.Г. Использование поверхностных фазовых переходов для управления свойствами поверхностей / А.Г. Наумовец // Прогресивні матеріали і технології: У 2-х т. – К. : Академперіодика, 2003. – Т.2. – С. 319-351.
3. Галазюк В.А. Ограниченное решение краевой задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого тела с абсолютно жестким дискообразным включением нулевой толщины / В.А. Галазюк // ДАН УССР, сер. А, **№12**, 1987.
4. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / Абрамовиц М., Стиган И. – М. : Наука, 1979. – 832 с.