КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛН, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПРОДОЛЬНО-СДВИГОВОЙ И КРУТИЛЬНОЙ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРЕ

А. В. ЕЛАГИН

Донецкий национальный университет, Донецк

В статье представлены теоретические численно-аналитические исследования нелинейных вторых гармоник, генерируемых в изотропном цилиндре кругового сечения с закрепленной боковой поверхностью при одновременном распространении вдоль его осевого направления осесимметричных нормальных упругих волн продольно-сдвигового и крутильного типа. Для цилиндра из дюралюминия проведен анализ форм волновых движений в нелинейной волне, генерируемой в результате взаимодействия нормальных волн указанного типа с варьируемыми относительными длинами.

ВВЕДЕНИЕ

Результаты исследований эффектов нелинейного взаимодействия при распространении нескольких упругих волн в деформируемых волноводах используются при разработке принципиальных схем работы ряда акустоэлектронных устройств [1]. Теоретический анализ данных эффектов в полях нормальных упругих волн осуществлен применительно к сдвиговым и продольно-сдвиговым нормальным волнам в кристаллическом упругом слое [2-3].

В ограниченном числе работ в различных вариантах анализировалась проблема распространения нелинейных упругих волн в волноводах цилиндрической формы. В частности, в пространственной постановке отдельные вопросы о нелинейных эффектах при распространении волн вдоль изотропного упругого цилиндра рассматривались в работах [4-8]. При этом в работе [7] исследованы эффекты нелинейного ангармонического взаимодействия двух одновременно распространяющихся осесимметричных нормальных продольно-сдвиговых волн с различными частотами и относительными длинами. Вопрос о нелинейном ангармоническом взаимодействии осесимметричной продольно-сдвиговой волны и волны кручения в закрепленном цилиндре в рамках пространственной модели на основе представления упругого потенциала Мурнагана и теории конечных деформаций ранее не рассматривался и представлен в данной работе.

1. ПОСТАНОВКА РАССМАТРИВАЕМОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается задача исследования нелинейных вторых гармоник двух монохроматических нормальных волн продольно-сдвигового и крутильного типа, распространяющихся вдоль осевого направления в изотропном цилиндре кругового сечения с радиусом R, который в нормированных цилиндрических координатах $Or\theta z$ и прямоугольных декартовых координатах $Ox_1x_2x_3$ занимает область

$$V = \{0 \le r \le R, 0 \le \theta \le 2\pi, -\infty < z < \infty\} = \{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \le R, -\infty < x_3 < \infty\} \qquad (1)$$

Используемая в работе модель нелинейного динамического деформирования изотропных упругих сред с учетом эффектов геометрической и физической нелинейности основывается на тензорном представлении функции упругого потенциала U с квадратичными и кубическими членами по деформациям ε_{ij}, а коэффициенты этого представления выражаются через компоненты тензоров упругих постоянных второго и третьего порядка.

В качестве представления U рассматривается упругий потенциал Мурнагана [8] в форме

$$U = \frac{\lambda + 2\mu}{2} E_1^2 - 2\mu E_2 + \frac{l + 2m}{3} E_1^3 - 2m E_1 F_2 + n E_3 . \qquad (2)$$

Здесь $\lambda, \mu -$ параметры Ламе линейной модели деформирования материала цилиндра; $l, m, n -$ упругие постоянные третьего порядка соответствующей модели нелинейного деформирования; $E_i\,(i = 1,2,3)$ - главные инварианты тензора деформаций Грина, которые связаны формулами

$$E_1 = I_1 ,\;\; E_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2) ,\;\; E_3 = \frac{1}{6}(I_1^3 - 3I_1 I_2 + 2I_3) \qquad (3)$$

с алгебраическими инвариантами

$$I_1 = E_{rr} + E_{\theta\theta} + E_{zz} ,\;\; I_2 = E_{\theta\theta}E_{zz} - E_{\theta z}E_{z\theta} + E_{zz}E_{rr} - E_{rz}E_{zr} + E_{rr}E_{\theta\theta} - E_{r\theta}E_{\theta r} ,$$

$$I_3 = E_{rr}E_{\theta\theta}E_{zz} - E_{rz}E_{\theta\theta}E_{zr} . \qquad (4)$$

Для изотропного материала рассматриваемого цилиндрического волновода представления нормированных отнесенных к μ компонент второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа на основных площадках цилиндрической системы координат имеют вид

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(l)} + \sigma_{ij}^{(n)} ,$$

$$\sigma_{ij}^{(l)} = \frac{2\sigma}{1 - 2\sigma} I \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij} ,$$

$$\sigma_{ij}^{(n)} = [\frac{l}{\mu} I_1^2 - (2\frac{m}{\mu} - \frac{n}{\mu}) I_2]\delta_{ij} + (2\frac{m}{\mu} - \frac{n}{\mu}) I_1 \varepsilon_{ij} + \frac{n}{\mu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} ,\; (i, j = r, \theta, z) . \qquad (5)$$

Представления для компонент тензора напряжений Лагранжа (первого тензора напряжений Пиола-Кирхгофа) на основных площадках цилиндрической системы координат следуют из соотношения

$$\begin{bmatrix} S_{rr} & S_{r\theta} & S_{rz} \\ S_{\theta r} & S_{\theta\theta} & S_{\theta z} \\ S_{zr} & S_{z\theta} & S_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & 1 + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

и, соответственно, могут быть представлены в форме

$$S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^{(l)} + S_{\alpha\beta}^{(n)} \qquad (\alpha, \beta = r, \theta, z) . \qquad (7)$$

Краевые условия жесткого закрепления боковой поверхности волновода имеют вид

$$(u_r)_{r=R} = (u_\theta)_{r=R} = (u_z)_{r=R} = 0 . \qquad (8)$$

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ АНАЛИЗА РАССМАТРИВАЕМОЙ ЗАДАЧИ

В работе используется методика [2-8], основанная на представлении компонент вектора упругих волновых перемещений u_j в виде суммы линейных составляющих $u_j^{(l)}$ и соответствующих нелинейных ангармонических возмущений (вторых гармоник) $u_j^{(n)}$:

$$u_j = u_j^{(l)} + u_j^{(n)}, \quad \left|u_j^{(n)}\right| \sim \delta \left|u_j^{(l)}\right|, \tag{9}$$

где малый параметр δ характеризует отношение амплитуды рассматриваемой упругой волны к ее длине. Характеристики $u_j^{(l)}$ определяются из линейных краевых задач о спектре нормальных волн, а функции волновых перемещений $u_j^{(n)}$ во вторых гармониках являются решениями неоднородных краевых задач, правые части которых выражаются через характеристики $u_j^{(l)}$. При этом [2-8] в случае, когда линейное волновое поле представлено суммой двух нормальных волн с различными частотами и относительными длинами, соответствующие ангармонические возмущения $u_j^{(n)}$ являются суммами трех слагаемых – вторых гармоник для каждой из входящих в сумму линейных нормальных волн и возникающей вследствие нелинейного ангармонического взаимодействия второй гармоники "комбинационного типа" в виде волны с частотой, равной сумме частот линейных волн.

В рассматриваемой задаче о вторых гармониках осесимметричных волн в суммарном поле двух волн – волны продольно-сдвигового и волны крутильного типа в рассматриваемом цилиндре, поле линейных волновых перемещений в продольно-сдвиговой осесимметричной нормальной волне имеет представление $u_r^{(l)} = u_r^{(0,l)}(r)e^{-i(w_1 t - k_1 z)}$, $u_z^{(l)} = u_z^{(0,l)}(r)e^{-i(w_1 t - k_1 z)}$, а поле осесимметричных линейных нормальных волн кручения – представление $u_\theta^{(l)}(r,z,t) = u_\theta^{(0,l)} e^{-i(w_2 t - k_2 z)}$. Решения линейных волновых уравнений относительно комплексных амплитудных функций $u_\theta^{(0,l)}$ и $u_r^{(0,l)}, u_z^{(0,l)}$, которые описывают первые гармоники нормальных осесимметричных волн кручения и нормальных продольно-сдвиговых волн в цилиндре, могут быть представлены в виде

$$u_\theta^{(0,l)} = AJ_1(\beta r);$$

$$u_r = -A_1 \alpha J_1(\alpha R) + A_2 ik\alpha \beta J_1(\beta R) = 0, \; u_z = A_1 ik J_0(\alpha R) - A_2 \beta J_0(\beta R) = 0, \tag{10}$$

Здесь A, A_1, A_2 - произвольные амплитудные множители; J_n – цилиндрические функции Бесселя индекса n. Дисперсионные уравнения, которые описывают полные спектры линейных осесимметричных волн кручения и осесимметричных продольно-сдвиговых волн в закрепленном цилиндре соответственно имеют вид

$$\omega = ((\xi_p^2 / R^2 + k^2) v_s^2)^{1/2},$$

$$k^2 J_0(\beta R) J_1(\alpha R) + \alpha \beta J_0(\alpha R) J_1(\beta R) = 0, \; \beta = (-k^2 + \Omega^2/\zeta)^{1/2}, \;\; \alpha = (-k^2 + \Omega^2)^{1/2},$$

где $\xi_p \; (p = \overline{1,\infty})$ - корни уравнения $J_1(\xi) = 0$.

Проведенными в данной работе исследованиями в результате подстановки представлений (10) в правые части краевой задачи относительно вторых гармоник установлено, что соответствующие гармоники комбинационного типа являются осесимметричными волнами кручения с характеристиками, определяемыми из неоднородной граничной задачи

$$\rho\frac{\partial^2 u_\theta^{(n)}}{\partial t^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rS_{\theta r}^{(l)}(u_\theta^{(n)}))-\frac{\partial S_{\theta z}^{(l)}(u_\theta^{(n)})}{\partial z}-\frac{S_{\theta r}^{(l)}(u_\theta^{(n)})}{r}=$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rS_{\theta r}^{(n)}(u_r^{(l)},u_z^{(l)},u_\theta^{(l)}))+\frac{\partial S_{\theta z}^{(n)}(u_r^{(l)},u_z^{(l)},u_\theta^{(l)})}{\partial z}+\frac{S_{\theta r}^{(n)}(u_r^{(l)},u_z^{(l)},u_\theta^{(l)})}{r}, \qquad (11)$$

$$(u_\theta^{(n)})_{r=R}=0 .$$

Решение неоднородной граничной задачи (11) получено в виде:

$$u_\theta^{(0,n)}=BJ_1(2\beta r)+F_1(r)\ , \quad F_1(r)=\sum_{p=1}^{\infty}a_p r^p\ , \qquad (12)$$

где $F_1(r)$ является частным решением входящего в (11) неоднородного волнового уравнения. Коэффициенты a_p в представлении $F_1(r)$ рассчитываются на основе рекуррентных соотношений:

$$a_1=\frac{\alpha_1}{\Delta_{13}^{(n)}}\ ,\ a_2=\frac{\alpha_2-b_1\Delta_{14}^{(n)}}{\Delta_{12}^{(n)}+2\Delta_{13}^{(n)}+2\Delta_{15}^{(n)}}\ ,\ a_{p+2}=\frac{\alpha_{p+2}-\Delta_{11}^{(n)}a_p}{\Delta_{12}^{(n)}+\Delta_{13}^{(n)}(p+2)+\Delta_{14}^{(n)}(p+2)(p+1)} \quad (p=\overline{1,\infty}) .$$

Удовлетворяя граничному условию краевой задачи (11), находим $B=-F_1(R)/J_1(2\beta R)$ и окончательно получаем представление для комплексной амплитудной функции второй гармоники комбинационного типа.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В ходе численных исследованиях проведен анализ распределений по радиальной координате для безразмерных нормированных амплитуд волновых смещений в комбинационных вторых гармониках, генерируемых при одновременном распространении осесимметричной волны кручения 1 из первой моды и осесимметричных волн продольно-сдвигового типа 2, 3 из второй моды соответствующего дисперсионного спектра, имеющих одинаковые амплитудные множители $u^{(0)}$. Расчеты ангармонических эффектов были проведены для волновода из дюралюминия со следующими физико-механическими параметрами: ρ=2.79·10^3 kg/m^3; $\sigma=0.31$; $\mu=2.6\cdot10^{10}\ Pa$; $\lambda=2\sigma\mu/(1-2\sigma)=4.2\cdot10^{10}\ Pa$; $l=-26.46\cdot10^{10}\ Pa$; $m=38.22\cdot10^{10}\ Pa$; $n=36.26\cdot10^{10}\ Pa$.

Фрагменты дисперсионных спектров, на которых точками отмечены взаимодействующие волны, представлены на рис.1-2.

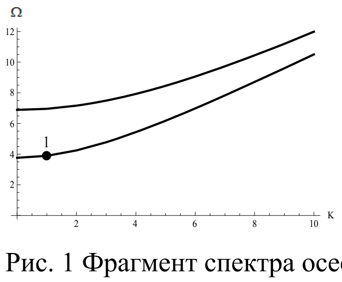

Рис. 1 Фрагмент спектра осесимметричных волн кручения

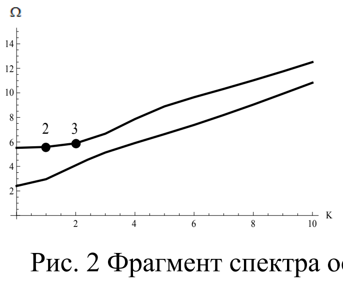

Рис. 2 Фрагмент спектра осесимметричных продольно-сдвиговых волн

Результаты расчетов, приведенных на рис.3-5, позволяют дать оценку уровней амплитуд в различных вторых гармониках монохроматического и комбинационного типа при взаимодействии крутильной волны 1 и продольно-сдвиговой волны

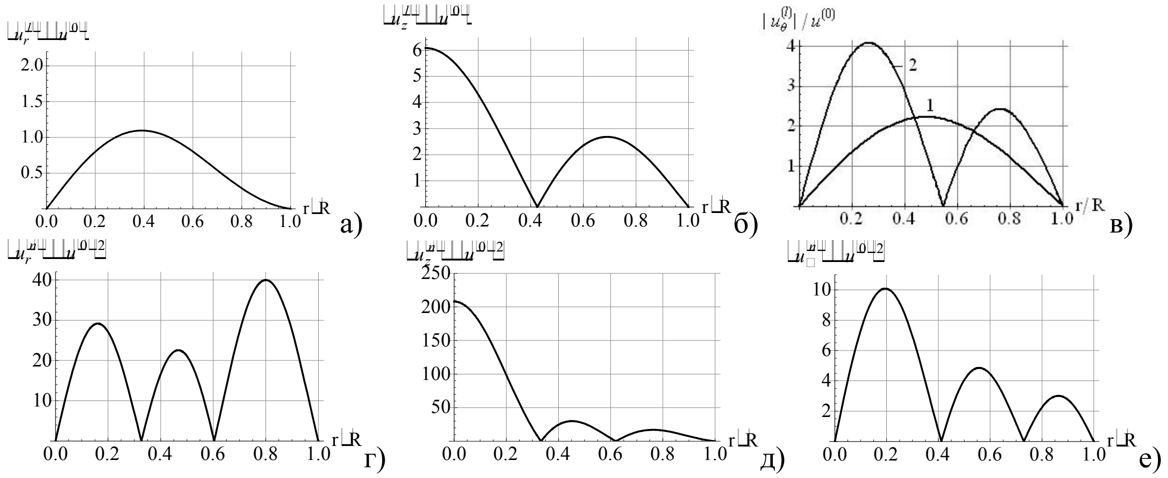

Рис.3 Радиальные распределения относительных амплитуд в линейных нормальных волнах 1 и 2, второй гармонике волны 2 и комбинационной второй гармонике.

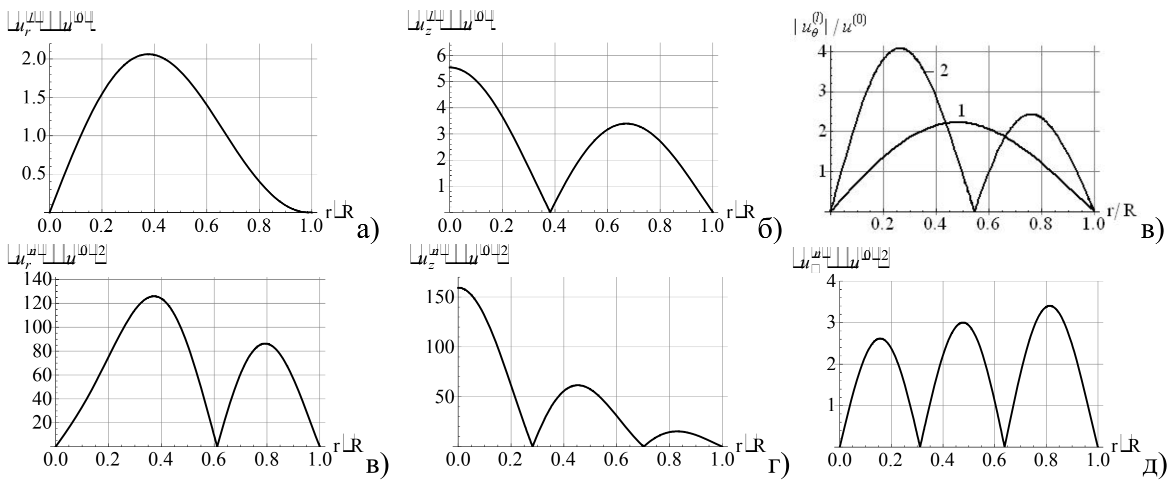

Рис. 4 Радиальные распределения относительных амплитуд в линейных нормальных волнах 1 и 3, второй гармонике волны 3 и комбинационной второй гармонике.

Приведенные результаты анализа кинематических характеристик линейных волн и их нелинейных вторых гармоник показывают, что в рассмотренных случаях мера нелинейного взаимодействия крутильной и продольно-сдвиговой нормальной волны является относительно невысокой. Так, максимум амплитуд нормированных волновых перемещений $|u_{\theta}^{(n)}|/(u^{(0)})^2$ во второй гармонике комбинационного типа составляет порядка 4.76 % от максимума амплитуд нормированных перемещений во второй гармонике монохроматического типа для волны 2 и 2.15 % от максимума амплитуд нормированных перемещений во второй гармонике монохроматического типа для волны 3. Вместе с тем, характер радиальных распределений интенсивности амплитуд

$|u_\theta^{(n)}|/(u^{(0)})^2$ в рассматриваемых случаях отличается. Если для случая одновременного распространения волн 1 и 2 указанная интенсивность затухает при удалении от центра волновода к границе (рис. 3-е), то при синхронном распространении волн 1 и 3 тенденция в изменениях максимумов амплитуд нормированных волновых перемещений вдоль радиальной координаты качественно изменяется на нарастающую при увеличении радиальной координаты (рис. 4-е). Сопоставление рис. 3-е с рис. 3-а, 3-б, 3-в, а также рис.4-е с рис. 4-а, 4-б, 4-в позволяет констатировать уменьшение величины максимума нормированных волновых перемещений в комбинационной второй гармонике по отношению к максимуму нормированных волновых перемещений в линейных волнах в случаях одновременного распространения волн 1 и 2 в сравнении со случаем одновременного распространения волн 1 и 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований предложена методика теоретического анализа степени нелинейного ангармонического взаимодействия пары осесимметричных нормальных волн продольно-сдвигового и крутильного типа, синхронно распространяющихся вдоль изотропного упругого цилиндра с жестко закрепленной боковой поверхностью. Дана количественная оценка для уровней и характера радиальных распределений функции нормированных амплитуд волновых перемещений в нелинейных вторых гармониках комбинационного типа, генерируемых в следствие нелинейного взаимодействия линейных нормальных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Речицкий В.И. Акустоэлектронные радиокомпоненты: схемы, типология, конструкции / В.И. Речицкий // М.: Радио и связь, 1987. – 192с.
2. Куренная К. И. Ангармонические эффекты при распространении нелинейных нормальных P-SV волн в анизотропном упругом слое / К. И. Куренная , В. И. Сторожев // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. С. 116-124.
3. Kurennaya K. I., Analyses of nonlinear ultraacoustic wave properties in germanium monocrystal layer / K. I. Kurennaya, V. I. Storozhev // Journal of Computational and Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 6, No. 1. – P. 67-82.
4. Kurennaya K. I. Nonlinear acoustic effects while spreading of the normal waves in anisotropic elastic layer / K. I. Kurennaya , V. I. Storozhev // Proceedings of the Tenth International Congress on Sound and Vibration (Stockholm, Sweden, 7-10 July 2003). – Stockholm, IIAV, 2003. – 5090 p. P. 3605-3612.
5. Sugimoto N. Nonlinear mode coupling of elastic waves / N. Sugimoto , M. Hirao // J. Acoust. Sos. Am. – 1977. – Vol. 62, N 1. – P. 23-32.
6. Sugimoto N. Numerical investigation of nonlinear mode coupling of elastic waves / N. Sugimoto // J. Acoust. Sos. Am. – 1978. – Vol. 64, N 4. – P. 1190-1195.
7. Елагин А.В. Нелинейное ангармоническое взаимодействие двух осесимметричных продольно-сдвиговых волн в закрепленном цилиндре / А.В. Елагин, В.И. Сторожев // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць Дніпропетровський національний університет. Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вип. 16. - С. 266 – 272.
8. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях/ А.Н. Гузь– К.: Наук. думка,1973. – 271 с.