ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ – ОСНОВА ОДНОЗНАЧНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ И ФУНКЦИЙ УПРАВЛЕНИЯ

В. С. КРУТИКОВ

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев
E-mail: iipt@iipt.com.ua

Получены точные аналитические решения волнового уравнения в областях с подвижными границами. Впервые предложены способы преодоления некорректности определения волновых полей во всем объеме, включая функции управления, по заданной форме функциям воздействия.

1. Успешная реализация многих технологий (в том числе химических и т.д.) на основе волновых импульсных процессов требует обеспечения необходимых, заранее заданных, оптимальных форм функций воздействия: давления P, скорости v частиц, температуры и т.д. в точке среды или во всём объёме. Они могут быть обеспечены при различных (бесконечного множества) значениях начального радиуса r_0 и расстояний r_1 дополнительных условий от начала координат, расширяющегося плазменного поршня. Но при этом гидродинамические поля давления и скорости в других точках, на подвижных границах поршня и законы ввода энергии будут различаться существенно. Решение задачи методом подбора – т.е. решая серию прямых задач о расширении полости в жидкости, фиксируя давление в заданной точке r_1 жидкости – возможно численными методами. Но это только в том случае, когда известны (заданы) значения постоянных $r_0,$ r_1, хотя и требуют значительного времени. Понятно, что получение значений методом подбора, нельзя назвать решением обратной гидродинамической задачи с подвижными границами (в физико-математическом понимании). В общем случае, когда известна, задана только форма функции воздействия (давления или скорости) в точке, а значение постоянных $r_0,$ r_1 неизвестны и подлежат определению, задача становится существенно некорректной, многозначной. Перебор бесчисленных значений и комбинаций упомянутых постоянных для нахождения однозначного, единственного волнового поля во всём объёме и единственного закона ввода энергии невозможен даже численно. Он невозможен ещё и потому, что мы не знаем этого однозначного волнового поля во всём объёме. Мы знаем значение только в точке (r_1), где задана форма функции воздействия. При этом значение r_1 также неизвестно и подлежит определению.

Ранее, что следует отметить, как правило, при решении подобных задач [1-3] величина r_1 задавалась, а r_0 выбирали исходя из практических соображений. В этом случае местоположение заданного вида $v(r_1, t)$ или $P(r_1, t)$ относительно источника неизвестно. Его следует определить. Это значительно усложняет задачу.

Понятно, что «задача определения звуковых тонов, излучаемых колеблющейся системой, иногда разрешима в явном виде, а иногда нет, но обратная задача определения формы колокола по звуку, который он способен издавать, просто ставит в тупик самых искусных математиков, физиков, исследователей…. Сейчас мы должны с восхищением приветствовать каждый, даже небольшой шаг, в этом направлении» [1, стр. 285]. В работе делается попытка сделать шаг в этом направлении. А именно, решить сложные задачи, в областях с подвижными границами – определить начальные размеры сферы по значениям функций воздействия (нелинейные условия (3), (4)) в точке волновой зоны и на подвижной границе. При этом величины начального радиуса, перемещений и законы изменения скорости подвижных границ могут быть произвольными. А законы изменения скорости и радиуса подвижной границы неизвестны, подлежат определению и, как правило, нелинейны. Подобные задачи в математической физике не рассматривались. Рассмотрим задачу:

$$\varphi_{tt} - a^2\varphi_{rr} - (\nu - 1)\varphi_r a^2 r^{-1} = 0, \qquad r \ge R(t), \tag{1}$$

$$\varphi_t(r,0) = \varphi(r,0) = 0, \qquad R(0) = r_0, \tag{2}$$

$$P - P_0\big|_{r=R(t)} = -\rho\varphi_t - 0{,}5\rho\varphi_r^{\,2}, \tag{3}$$

$$P - P_0\big|_{r=r_1} = -\rho\varphi_t - 0{,}5\rho\varphi_r^{\,2}, \tag{4}$$

$$v(R(t),t) \ne dR(t)/t \tag{5}$$

здесь φ – потенциал скорости; ν – показатель симметрии; t – время; $R(t), r_0, r, r_1$ – координаты: подвижных границ, начальная, текущая, точки волновой зоны соответственно; P_0, ρ, a – давление, плотность, скорость распространения возмущений в невозмущенной жидкости; v – скорость, (5) – условие проницаемости (излучения) подвижной границы. В теории волн уравнение (1) имеет фундаментальное значение [2]. В рамках рассматриваемой математической модели под управлением понимается: 1 – функция скорости (движения и проницаемости подвижных границ) или 2 – функция давления (на подвижной границе). Известны аналитические соотношения (74.6), (74.8) и т.д. (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Теор. физика», 1986. Т.6), которые не учитывают влияния r_0, применить их к обратным задачам затруднительно.

Как известно, некорректными считаются задачи, для которых не удовлетворяется хотя бы одно из условий: а) решение задачи существует; б) решение определяется однозначно; в) задача устойчива (А.Н. Тихонов, М.М. Лаврентьев). Ранее точные аналитические решения обратных и прямых волновых задач в областях с подвижными (ПГ) и подвижными проницаемыми границами (ППГ) получены [3-7] (условие 1). Решения устойчивы [4, стр. 18] (условие 3); второе условие не выполнено – решения неоднозначны. Говорилось, например, в [7], что функции воздействия можно получить (обеспечить) с различных (бесконечного множества) величин начального радиуса r_0, но при этом законы движения границ будут существенно различными, также различными будут волновые поля, кроме значений в одной точке r_1. Это не позволяло: корректно (однозначно) определить никакими способами (ни численно, ни аналитически и т.д.) функции управления; однозначно восстановить волновые поля в полном объеме от следствия (функции воздействия) до причины (функции управления); однозначно, корректно решить вопросы управления волновыми процессами в областях с ПГ и ППГ (определить вводимую в плазменный канал мощность [8,9] $N(t)$ (15) [7]). Предложен и разработан способ реализации: однозначного, корректного волнового поля в областях с подвижными границами и импульсного источника по заданной форме функции воздействия. Местоположение этой формы (P или v) неизвестно и подлежит определению.

Преодоление некорректности функций управления волновыми процессами имеет большое научное, прикладное и принципиальное значение. Без решения вопросов многозначности обратных, прямых, дважды нелинейных (с ПГ и нелинейными дополнительными условиями) волновых задач решения проблем подвижных границ не может считаться полным и окончательно завершенным.

2. Определять функции управления волновыми процессами будет методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [3,5]. Для определенности рассмотрим случай сферической симметрии $\nu = 3$. В соответствии с этими методами получим решение уравнения (1), которое удовлетворяет начальным условиям (2) и условию $P - P_0\big|_{r=r_1} = -\rho\varphi_t = f\left[t - (r_1 - r_0)/a\right]$ – обратная задача; функции управления при этом имеют вид (6-8) [4]. Для общего случая произвольных законов движения границ и видов функции f последнюю можно аппроксимировать полиномом Лагранжа в степени m. Число m характеризует количество точных значений функции и может быть сколь угодно большим.

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi_1^m \, , \; A_m = const \, . \tag{6}$$

Тогда, с учетом (6)-(8) [4] и (6) функции управления имеют вид:

$$P\big(R(t),t\big) = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2}\rho v^2\big(R(t),t\big), \qquad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}, \tag{7}$$

$$v\big(R(t),t\big)\rho R^2(t)/r_1 = \frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1}, \tag{8}$$

$$\frac{\left[R^3(t) - r_0^3\right] \cdot \rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \cdot m!}{(m+2)!} \xi^{m+2} . \tag{9}$$

<u>Для ступенчатой функции в точке</u> r_1 функции управления 1 и 2 имеют вид:

$$P\big(R(t),t\big) = \frac{r_1}{R(t)} A_0 \sigma_0(\xi) - \frac{1}{2}\rho v^2\big(R(t),t\big);$$

$$v\big(R(t),t\big) = \frac{r_1}{R^2(t)\rho}\left[\frac{R(t)}{a} A_0 + A_0 \xi\right], \tag{10}$$

$$\frac{\left[R^3(t) - r_0^3\right] \cdot \rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{a} A_0 \xi + \frac{A_0}{2}\xi^2, \qquad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}, \qquad \sigma_0(t-\tau) = \begin{cases} 0, \, t < \tau \\ 1, \, t \ge \tau \end{cases} . \tag{11}$$

Это точное аналитическое решение обратной задачи с ПГ имеет важное значение. С учетом (7), (8) и (9) запишем:

$$P\left(R(t),t\right)=\frac{r_1}{R(t)}\sum_{m=0}^{\infty}A_m\xi^m-\frac{1}{2}\rho\left\{\frac{r_1}{R^2(t)\rho}\left[\frac{R(t)}{a}\sum_{m=0}^{\infty}A_m\xi^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{m+1}\xi^{m+1}\right]\right\}^2.$$
(12)

Здесь $P\left(R(t),t\right)$ известно по условию (3). Это соотношение пригодно для любых точек $R(t)=r=r_1$. Соотношения для определения A_m в общем случае произвольных величин начального радиуса, законов движения границ и вида $P\left(R(t),t\right)$ имеют вид (метод последовательного определения коэффициентов Лагранжа A_m [10]):

$$A_m=N\pm\left(N^2-M\right)^{1/2};\ N=-\frac{1}{2}\frac{2C_1C_2{}^2C_3C_4-\frac{r_1}{R(t)}\xi^m}{C_1C_2{}^2C_4{}^2};\ M=\frac{C_1C_2{}^2C_3-C_0}{C_1C_2{}^2C_4},$$
(13)

где $C_0=-P\left(R(t),t\right)+\frac{r_1}{R(t)}\sum_{m=0}^{m-1}A_m\xi^m$; $C_1=\frac{1}{2}\rho$; $C_2=\frac{r_1}{R^2(t)\rho}$;

$C_3=\frac{r_1}{R(t)}\sum_{n=0}^{m-1}A_n\xi^n+\sum_{n=0}^{m-1}\frac{A_n}{n-1}\xi^{n-1}$; $C_4=\frac{r_1}{R(t)}\xi^m+\frac{1}{m+1}\xi^{m+1}$,

при $R(t)=r_1$ (12), (13) переходят в полученные ранее (2.4), (2.7) [10].

Решение проводим методом последовательных приближений. Следует отметить, что в работе Баева А.В. (Доклады РАН. 1986. Т.287. №6) рассматривается другая разновидность обратных волновых задач методом последовательных приближений, без учета ПГ и нелинейных условий на подвижных границах.

3. <u>Преодоление некорректности (многозначности), связанной с величиной r_0 для случая заданного нелинейного условия на ПГ</u> $P-P_0\big|_{r=R(t)}=-\rho\varphi_t-0,5\rho\varphi_r{}^2$.

Пусть необходимо на ПГ обеспечить функцию воздействия $P\left(R(t),t\right)$ в виде кривой (1) Рис. 1 [5]. Воспользуемся физическим фактом: функция $P\left(R(t),t\right)$ несет информацию о том, с какого начального радиуса начиналось движение, с какой скоростью расширялся поршень, и что на ПГ при $t\to0$ и одинаковом r_0 значение $P\left(R(t),t\right)$ кривая 1 Рис. 1 [5] и ступенчатой (10) равны. Формулы (10) действительны при любом $r=R(t)=r_1$. Определяем A_0, для чего выбираем такое r_1, близкое к r_0, чтобы при малом t ($0,1; 0,001\cdot10^{-6}$ с и т.д.) с большой точностью равнялось $P\left(R(t),t\right)\approx P\left(r_1,t^0\right)$.

<u>Определяем</u> A_0. При $R(t)=r_1$ из (10), $\rho=102\ \hat{e}\tilde{a}\cdot\tilde{n}^2/\grave{i}^{\ 4}$, $\grave{a}=1500\ \grave{i}/\tilde{n}$, $t\to0$, $A_0\left(t-\frac{r_1=R(t)-r_0}{a}\right)=0$, имеем

$$\underset{\hat{e}\eth\grave{e}\hat{a}\grave{a}\ddot{y}1}{P_{\max}}=4730=A_0-0,5\frac{1}{\rho a^2}A_0{}^2=A_0-21,7864924\cdot10^{-6}A_0{}^2.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем $A_0=5354,67389$.

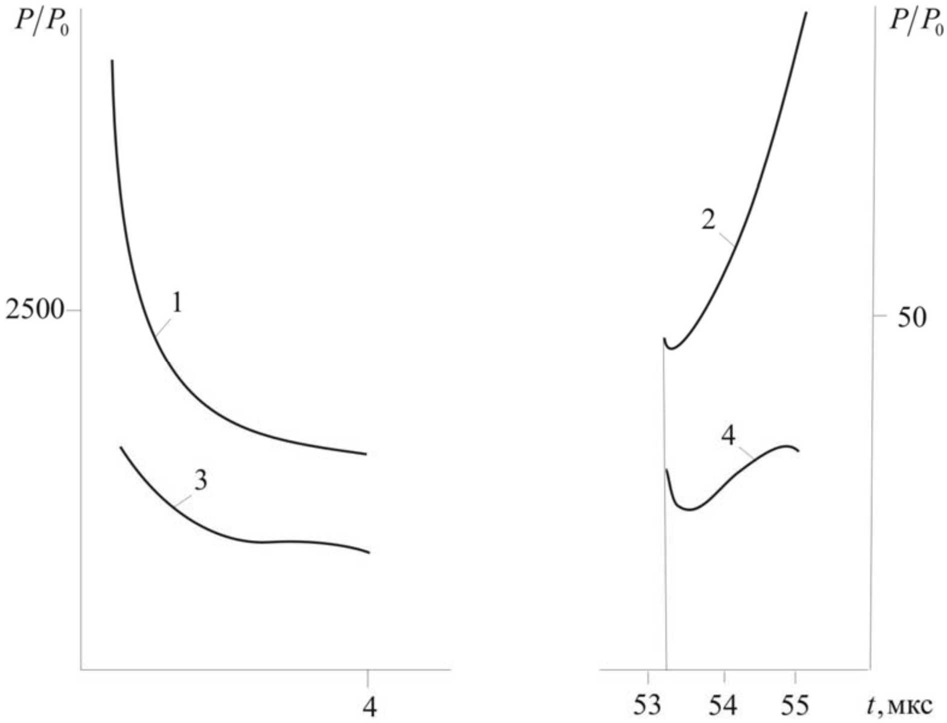

Рис. 1.

Определяем $v\left(R\left(t\right), t=0\right)$, из (10), учитывая $\xi = 0$ при $t \to 0$, $r_1 \approx r_0$

$$v\left(R\left(t\right), t=0\right) = \frac{A_0}{\rho a} = \frac{5354,67389 \cdot 10^4}{102 \cdot 1500} = 349,978685\ ì\ /ñ\ .$$

Определяем r_1. Приближенно зависимость $\left(r_1/r_0\right)$ можно определить из (10) при $t \to 0$;

$R\left(0\right) = r_0$, $\quad A_0\left(t - \frac{r_0 - r_0}{a}\right) = 0$; $\quad A_0 = 349,978685$; $\quad v\left(R\left(t\right), t=0\right) = \frac{r_1}{r_0^2 \rho}\left[\frac{r_0}{a} A_0\right]$;

$349,978685 = \frac{r_1 \cdot 10^4 A_0}{102 \cdot r_0 \cdot a}$; $\frac{r_1}{r_0} = 1$.

Определяем r_0 (выбираем r_1 как можно ближе к r_0, при этом время – сотые, тысячные доли *мкс*). С учетом найденных значений и (7) имеем соотношение для $t = 0,001 \cdot 10^{-6}$:

$$4730 = 5354,67389 -$$

$$-\frac{0,5 \cdot 102}{10^4}\left\{\frac{10^4}{\left(r_0 \cdot 1\right)102}\left[\frac{\left(r_0 \cdot 1\right)}{1500} 5354,67389 + 5354,67389\left(0,001 \cdot 10^{-6} - \frac{\left(r_0 \cdot 1\right) - r_0}{1500}\right)\right]\right\}^2$$

решаемое известными методами, $r_0 = 1 \cdot 10^{-3}\ ì$, что точно соответствует решению прямой задачи методом характеристик полной системы (10) работы [5] уравнений движения, сплошности и состояния для изоэнтропических процессов в форме Тэта, см. Рис. 1.: где показано изменение давления на подвижных границах (с учетом нелинейного члена интеграла Коши-Лагранжа) и в точке r_1: непроницаемой (1,2), проницаемой (3 – реконструкция, 4) [5]. Определив r_0, по (13) методом последовательного определения коэффициентов Лагранжа вычисляем A_m, а по (7)-(9) и другие однозначные значения функций управления. За первое приближение берутся значения, вычисленные по (13) при $r_1 \approx R(t)$ (см. [10]).

4. Преодоление некорректности (многозначности), связанной с величиной r_0 для случая заданного нелинейного условия $P - P_0\big|_{r=r_1} = -\rho\varphi_t - 0,5\rho\varphi_r{}^2 = F_1 - F_2$.

Пусть необходимо в точке волновой зоны r_1 обеспечить функцию воздействия в виде кривой 2 Рис. 1 [5]. Приближенно аппроксимируем эту кривую полиномом

Лагранжа $f = \sum\limits_{m=0}^{\infty} A_m \xi_1^{\,m}$, где

$A_4 = 0,342831 \cdot 10^{24}$; $A_3 = -4,06966 \cdot 10^{18}$; $A_2 = 16,7101 \cdot 10^{12}$; $A_1 = -12,953 \cdot 10^{6}$;
(14)
$A_0 = 49,40999$; $m = 0 \div 4$; $P\left(t = 0,(3) \cdot 10^{-6}\right) = 46,8025056$.

Определим значение $v(r_1, t)$ в момент прихода волны.

Воспользуемся физическим фактом: (см. п.п. 3)

функции $v\left(R(t), t\right)$ (решение методом характеристик системы (10) [5]) на ПГ при $t \to 0$ и ступенчатой (10) равны;

функции $v(r_1, t)$ в точке r_1 (решение методом характеристик системы (10) [5]) в момент прихода волны $t^0 = (r_1 - r_0)/a$ и ступенчатой (10) при $R(t) = r_1$ равны.

$$A_0 = 49,40999;\ r_1 = 80 \cdot 10^{-3}\,\text{ì};\ a = 1500\,\text{ì}/\text{ñ};\ \rho = 102\,\text{êãñ} \cdot \text{ñ}^2/\text{ì}^4;$$

$$v(r_1, t) = \frac{r_1}{\left(R^2(t) = r_1^2\right)\rho}\left[\frac{R(t) = r_1}{a} A_0 + A_0\left(\xi = t^0 - \frac{r_1 - r_0}{a} = 0\right)\right] = 3,22941113\,\text{ì}/\text{ñ},$$

$$F_2 = 0,5\rho v^2 = 0,0531883906\,\text{êãñ}/\text{ñì}^2.$$

Из (7) при $R(t) = r_1$, $t = 53 \cdot 10^{-6}$ – время выбираем такое, чтобы F_2 и погрешности были наименьшими, и F_2 мало отличались от произведенной оценки, получаем соотношение, A_m из (14):

$$46,8025056 = 49,40999 + A_1\xi^1 + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + A_4\xi^4 - (F_2 \approx 0);\ \xi = \left(53 \cdot 10^{-6} - \frac{r_1 - r_0}{a}\right),$$

в котором одно неизвестное r_0, решаемое известными методами: $r_0 = 1 \cdot 10^{-3}\,\text{ì}$, что точно соответствует решению методом характеристик прямой задачи полной системы (10) [5]. Зная r_0, по (6)-(9) можно однозначно восстановить волновые поля в полном объеме, во всех точках, включая ПГ, а также восстановить функции управления и вводимую в канал мощность N(t) (15) [7].

5. В отличие от областей, направлений или объектов физических исследований «физическая проблема» имеет место, когда содержание ответа не ясно, когда имеет место непредсказуемость результатов и неопределенность границ применимости (В.Л. Гинзбург) [11, 3]. Все это в полной мере относится к проблемам ПГ, ППГ и вопросам управления. Необходимо добавить еще невозможность до настоящего времени

корректного, однозначного определения функций управления волновыми процессами. Для сферических и особенно цилиндрических волн эти проблемы однозначно характеризуются как сложнейшие, фундаментальные «физические проблемы» [3, 11]. Полученные результаты позволяют использовать их для обоснованного выбора импульсных источников и решения вопроса управления волновыми процессами при решении практических задач промышленности медицины, экологии [3, 15]

Анализ результатов показывает, что впервые удовлетворены все три условия корректности проблемы управления волновыми процессами в областях с подвижными границами для сферических волн: решения существуют, единственны и устойчивы. Без точных аналитических решений (6)-(13) решить эти проблемы нельзя, метод [12] применить для обратных задач затруднительно. Границы применимости волнового уравнения и его точных аналитических решений в областях с ПГ и ППГ [5,6] определены впервые и нетрадиционно в [13].

В заключение необходимо сказать следующее. Как известно, удивительны необычайное число приложений волнового уравнения, в той или иной степени описывающего все богатство явлений Природы, как и непостижимая эффективность математики в естественных науках [2, 3, 14], которые многократно возрастают теперь еще и наличием однозначных аналитических соотношений функций управления волновыми процессами в областях с ПГ и ППГ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики 1-4. Предисловие Н.Н. Боголюбова. М.: Мир. 1982. Т.4. 428 с.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.Н. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
3. Krutikov V.S. // Natural Science. 2010. 2(4). pp.298-306
4. Крутиков В.С. // ДАН. 1999. Т.364. №1. С.17-20 (Krutikov V.S. // Doklady Mathematics. vol.59, no.1. 1999. pp.10-13)
5. Крутиков В.С. // ДАН. 1993. Т.333. №4. С.512-514
6. Крутиков В.С. // ДАН. 1999. Т.368. №6. С.755-758 (Krutikov V.S. // Doklady Physics. vol.44. no.10, 1999, pp.674-677)
7. Крутиков В.С. // ДАН. 2006. Т.406. №1. С.1-5 (Krutikov V.S. // Doklady Physics. vol.51. no.1. 2006. pp.1-5)
8. Лямшев Л.М. // УФН. 1987. Т.151. №3. С.479-527
9. Наугольных К.А., Рой Н.А. Электрические разряды в воде. М.: Наука. 1971. 151 с.
10. Крутиков В.С. // Прикл. матем. и механ. 1991. Т.6. С.1058-1062
11. Гинзбург В.Л. // УФН. 1971. Т.103. №1. С.87-119
12. Гринберг Г.А. // ПММ. 1967. Т.31. №2. С.193-203
13. Крутиков В.С. // Акуст. журн. 1996. Т.42. №4. С.534-540 (Krutikov V.S. // Acoustical Physics. vol.42. no.4. 1996. pp.471-477)
14. Вигнер Е. // УФН. 1968. Т.94. Вып. 3. С.535-546
15. Крутиков В.С. // Труды Акустического симпозиума «Консонанс-2009». Киев, ИГМ НАНУ. 2009. С.218-222