# ДИСПЕРСІЯ І ЗАГАСАННЯ SH-ХВИЛЬ У КОМПОЗИТІ ІЗ ЧАСТКОВО ВІДШАРОВАНИМИ ПРУЖНИМИ ВОЛОКНАМИ

**Я. І. КУНЕЦЬ, В. В. МАТУС**
*Інститут прикладних проблем механіки і математики*
*ім. Я.С. Підстригача НАН України,*
*вул. Наукова, 3б, 79060, Львів, Україна*
*e-mail: kunets@iapmm.lviv.ua*

Plane time-harmonic SH-wave propagation through an elastic medium containing fibers with interface cracks is investigated. The effective field approach based on Foldy's approximation is applied to estimate the average dynamic parameters of such composites. The effects of the fibre shape, debonding (interface crack) size and direction of wave incidence on the effective SH-wave velocity and attenuation coefficient are analysed.

## ВСТУП

Часто причиною руйнування волокнистих композитів є відшарування волокон від матриці. Цей факт потрібно враховувати при розробці сучасних методів неруйнівного контролю таких матеріалів [1]. Додатковий інтерес полягає в розгляді волокон некругової форми, використання яких покращує міцністні характеристики композитних матеріалів [2].

Дослідженню ефективних динамічних характеристик волокнистих композитів з відшаруваннями між матрицею і наповнювачами присвячена порівняно невелика кількість публікацій. Зокрема, фазова швидкість та коефіцієнт загасання SH-хвиль в композитах з круговими волокнами аналізувались в [1]. В [3, 4] досліджено ефективні характеристики поздовжніх хвиль в пружному композиті з волокнами неканонічної форми. Складовою частиною вище згаданих проблем є дослідження задач розсіяння пружних хвиль відповідними локальними неоднорідностями. Так, розсіяння SH-хвиль відшарованим круговим включенням досліджувалось в [5]. Дифракція поперечних хвиль горизонтальної поляризації на частково відшарованих тунельних включеннях більш складних форм вивчалась в [6].

У даній роботі досліджуються ефективні динамічні характеристики матричних композитів з волокнами неканонічної форми при наявності міжфазних тріщин та за умов антиплоскої деформації. Розв'язок відповідної задачі розсіяння для локальної неоднорідності шукаємо за допомогою модифікованого методу нульового поля [6]. Усереднені властивості розглянутих композитів визначаються із апроксимаційних співвідношень Фолді [7]. При такому підході нехтується явище багатократного розсіяння і вважається, що концентрація волокон в композиті незначна.

## РОЗСІЯННЯ SH-ХВИЛЬ ЛОКАЛЬНИМ ВІДШАРОВАНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Нехай у безмежному ізотропному пружному тілі з модулем зсуву $\mu_1$ та густиною $\rho_1$ міститься пружне включення з відповідними параметрами $\mu_2, \rho_2$, що займає область $W_2$. На частині $S_0$ міжфазної поверхні $\partial W_2$ наявна тріщина, на $S_1 = \partial W_2 \setminus S_0$ включення ідеально контактує з матрицею. В умовах антиплоского зсуву та гармонічного режиму переміщення у матриці $u_1(\mathbf{x})$ та включенні $u_2(\mathbf{x})$ задовольняють рівняння Гельмгольца ($W_1 = R^2 \setminus W_2$)

$$\left(\Delta + k_j^2\right)u_j\left(\mathbf{x}\right) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_j, \quad j = 1,2 \tag{1}$$

та граничні умови

$$u_1\left(\mathbf{x}\right) = u_2\left(\mathbf{x}\right), \quad \gamma\frac{\partial u_1\left(\mathbf{x}\right)}{\partial n} = \frac{\partial u_2\left(\mathbf{x}\right)}{\partial n}, \quad \gamma = \mu_1 / \mu_2, \quad \mathbf{x} \in S_1; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_j\left(\mathbf{x}\right)}{\partial n} = 0, \quad j = 1,2, \quad \mathbf{x} \in S_0. \tag{3}$$

Тут $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2\right)$ – декартові координати з початком всередині включення; $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до $\partial W_2$; $k_1$ та $k_2$ – хвильові числа поперечних хвиль у матриці та включенні відповідно.

На безмежності розсіяне поле $u^s(\mathbf{x})$ задовольняє умові випромінювання Зоммерфельда, яку можна записати так

$$u^s\left(\mathbf{x}\right) = \frac{e^{ik_1 r + i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k_1 r}} f\left(\omega,\theta\right), \; r \to \infty, \quad \mathbf{x} = \left(r\cos\theta, \, r\sin\theta\right); \tag{4}$$

$$u^s(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u^{in}(\mathbf{x}).$$

Тут $f\left(\omega,\theta\right)$ – комплексна амплітуда розсіяння; $u^{in}(\mathbf{x})$ – набігаюча на включення гармонічна SH-хвиля; $\left(r,\theta\right)$ – полярні координати; $\omega$ – кругова частота гармонічних коливань.

Розв'язок задачі (1)-(4) знайдено в [6] за допомогою модифікованого методу нульового поля [6, 8]. При цьому невідомі зміщення та напруження на контурі неоднорідності подавались у вигляді тригонометричних рядів Фур'є з ваговими множниками, що відображають сингулярний характер поведінки шуканих функцій в околі точок зміни граничних умов. Підставляючи ці ряди у рівняння методу нульового поля та враховуючи граничні умови (2), (3), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь безмежного порядку відносно коефіцієнтів розкладів. Розв'язок цієї системи шукаємо методом редукції.

## ЕФЕКТИВНІ ДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ КОМПОЗИТІВ

Розглянемо тепер поширення плоскої SH хвилі у пружному композиті з масивом частково відшарованих випадково розподілених взаємно паралельних волокон. Припускається, що форма їх поперечного перерізу однакова, а довжини міжфазних тріщин – рівні. Орієнтація волокон у площині перерізу є або випадковою або впорядкованою. Усереднена реакція такого композитного тіла на динамічні збурення характеризується дисперсією хвиль та їх загасанням спричиненими процесом розсіяння [1, 9]. Таку властивість можна описати за допомогою наближеного методу ефективного хвильового поля з комплексним, залежним від частоти хвильовим числом $K(\omega)$, поданим як [7]

$$K(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)} + i\,\alpha(\omega), \tag{5}$$

де $c(\omega)$ – ефективна фазова швидкість поперечних хвиль, $\alpha(\omega)$ – коефіцієнт їх загасання.

При невеликій концентрації волокон можна знехтувати їх взаємодією. В такому випадку ефективне хвильове число $K(\omega)$ можна обчислити із дисперсійного співвідношення Фолді [7, 9] у формі

$$K^2 = k_1^2 + \frac{\varepsilon}{\pi a^2} F . \qquad (6)$$

В рівнянні (6) $\varepsilon$ – концентрація включень у матриці; $\pi a^2$ площа поперечного перерізу волокна; $F$ – усереднена амплітуда SH-хвилі, розсіяної «вперед» локальним включенням. Для випадково орієнтованих волокон однакової форми та однакової величини міжфазної тріщини осереднення проводиться по всіх можливих орієнтаціях, що еквівалентно усередненню по куту падіння плоскої хвилі. Тому

$$F = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta_{in})d\theta_{in}, & \text{для випадково орієнтованих включень;} \\ f(\theta_{in}), & \text{для впорядковано орієнтованих включень.} \end{cases} \qquad (7)$$

Знаючи ефективне хвильове число $K(\omega)$, із рівняння (6) знаходимо нормалізовану ефективну фазову швидкість $\bar{c}(\omega) = c(\omega)/c_{s1}$ ($c_{s1} = \omega / k_1$) та нормалізований коефіцієнт затухання $\bar{\alpha} = 2\pi a\alpha/\varepsilon$ поперечних хвиль в композитному матеріалі з частково відшарованими волокнами

$$\bar{c}(\omega) = \frac{k_1}{\mathrm{Re}\left[K(\omega)\right]}, \qquad \bar{\alpha}(\omega) = \frac{2\pi a}{\varepsilon}\mathrm{Im}\left[K(\omega)\right]. \qquad (8)$$

**ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ**

Як приклад, розглянемо випадок поперечного перерізу волокон, контур яких задається параметричним рівнянням

$$r(\beta) = a\sqrt{\frac{1+\gamma^2 - 2\gamma\cos\left(N+1\right)\beta}{1-\gamma^2 N}}, \qquad \theta(\beta) = \mathrm{arctg}\frac{\sin\beta + \gamma\sin N\beta}{\cos\beta - \gamma\cos N\beta},$$

де $0 \le \beta \le 2\pi$, $a$ – характерний розмір включення. При цьому волокно може мати форму еліпса ($N = 1,\ 0 \le \gamma < 1$), рівностороннього трикутника із заокругленими кутами ($N = 2$, $\gamma = 1/4$) і квадрата із заокругленими кутами ($N = 3$, $\gamma = 1/9$).

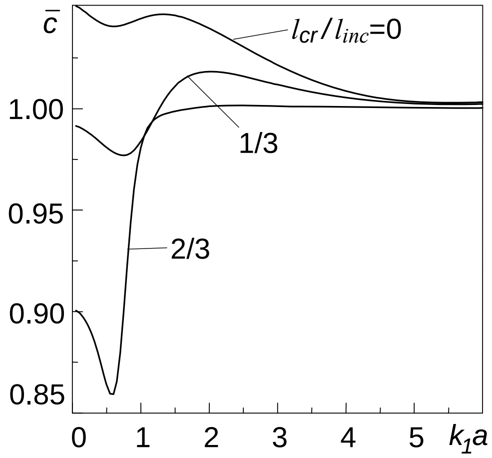

Рис.1.

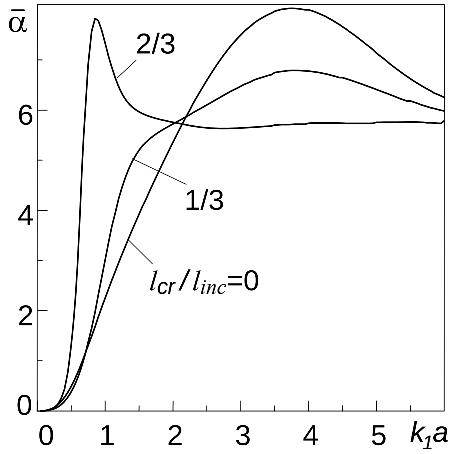

Рис.2.

Рисунки 1, 2 ілюструють частотні залежності нормалізованих значень фазової швидкості $\bar{c}$ та коефіцієнта поглинання $\bar{\alpha}$ поперечних хвиль у епоксидної матриці ($\mu_1 = 1.28$ ГПа, $\rho_1 = 1250$ кг/м$^3$) із скляними волокнами ($\mu_2 = 29.9$ ГПа, $\rho_2 = 2550$ кг/м$^3$) трикутної форми. Приймалось, що відношення довжини тріщини до периметру поперечного перерізу волокна дорівнює: $l_{cr}/l_{inc} = 0$ для ідеально контактуючих волокон, $l_{cr}/l_{inc} = 1/3$ та $l_{cr}/l_{inc} = 2/3$ для частково відшарованих волокон. Видно, що в діапазоні частот $0 < k_1 a < 2$ із збільшенням відшарування коефіцієнт загасання хвиль збільшується, а в діапазоні $2 < k_1 a < 6$ – зменшується. Фазова швидкість хвиль зменшується із ростом відшарування у всьому розглянутому частотному діапазоні. У випадку кругових волокон результати, отримані при допомозі запропонованого методу добре узгоджуються з результатами, отриманими іншим методом у роботі [1].

## ВИСНОВКИ

1. Запропоновано методику визначення ефективних динамічних характеристик волокнистих композитів при наявності відшарування волокон від матриці. Методика базується на поєднанні апроксимаційних дисперсійних співвідношень Фолді і методу нульового поля. Використання методики придатне для матричних композитів з невеликою концентрацією волокон.
2. Числовий аналіз демонструє значний вплив відшарування на величину ефективної фазової швидкості поперечних хвиль та коефіцієнта їх загасання. Із зростанням зони відшарування швидкість хвиль в діапазоні малих хвильових розмірів волокон зменшується, а загасання їх збільшується при різних формах волокон.

Робота підтримана ДФФД України (проект Ф40.1/018).

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Zhang Ch., Gross D.* On Wave Propagation in Elastic Solids with Cracks. − Computational Mechanics Publications, Southampton. − 1998. − 248 p.
2. *Bond I, Hucker M., Weaver P., Haq S.* Mechanical behaviour of circular and triangular glass fibers and their composites // Compos. Sci. Technol. − 2002. − Vol. 62. − P. 1051-1061.
3. *Sato H., Shindo Y.* Influence of microstructure on scattering of plane elastic waves by a distribution of partially debonded elliptical inclusions // Mech. Materials. – 2002. – Vol. 34. − P. 401–409.
4. *Matus V., KunetsY., Mykhas’kiv V., Boström A., Zhang Ch.* Wave propagation in 2-D elastic composites with partially debonded fibers by the null field approach // Waves in Random and Complex Media. – 2009. – Vol. 19, No. 4. – P. 654–669.
5. *Yang Y., Norris A.N.* Shear wave scattering from a debonded fiber // J. Mech. Phys. Solids. − 1991. Vol. 39. − P. 273-294.
6. *Kunets Y.I., Matus V.V., Mykhas'kiv V.V., Boström A., Zhang Ch.* Scattering of a SH-wave by an elastic fiber of nonclassical cross section with an interface crack // Mech. Composite Materials. − 2008. − Vol. 44. − P. 165-172.

7. *Foldy L.L.* Multiple scattering theory of waves // Phys. Rev. − 1945. − Vol. 67. − P. 107-119.
8. *Boström A.* Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation // Appl. Mech. Rev. − 2003. − Vol. 56. − P. 383-405.
9. *Martin P.A.* Multiple Scattering Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles. – Cambridge University Press, Cambridge. – 2006. – 437 p.