УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ С ОКРУЖНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

В.Г.САВИН, Ю.А.ДИДУСЕНКО

Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев

In this paper, using the theory of thin shells, the differential equations, allowing to describe the vibration of thin-walled cylindrical converters made by gluing piezoceramic prisms, followed by the polarization of the whole structure are obtained.

ВВЕДЕНИЕ

Развивающийся рынок подводных технологий требует наличия различных типов гидроакустических преобразователей, работающих в условиях излучения и приема акустических волн.

При формулировании «сквозных» задач гидроакустики (гидроэлектроупругости) необходимо привлекать уравнения, описывающие электроупругие колебания таких преобразователей. В настоящей работе получены дифференциальные уравнения, позволяющие описывать колебания цилиндрических тонкостенных преобразователей, выполненных путем склеивания пьезокерамических призм, с последующей поляризацией всей конструкции.

1. ФИЗИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

Рассмотрим пьезокерамический цилиндрический преобразователь выполненный путем склеивания N пьезокерамических призм, радиусом $r_0^{(j)}$ и толщиной $h^{(j)}$. Преобразователь работает на продольном пьезоэффекте. Для этого на боковые поверхности этих призм нанесены токопроводящие электроды, к которым подведено напряжение $U_0^{(j)}e^{-i\omega t}$. При таком возбуждающем воздействии возникают колебания и в среду излучаются звуковые волны. Будем полагать, что излучатель имеет бесконечную длину и произвольные размеры, при условии $h^{(j)} / r_0^{(j)} << 1$.

Учитывалось, что для оболочки такого типа компоненты тензора механических напряжений и деформаций в радиальном направлении равны нулю, и кроме этого составляющие вектора напряженности и индукции электрического поля вдоль осевой и радиальной координат также полагаются равными нулю. В свою очередь, в окружном направлении составляющая электрической напряженности в поперечном размере каждой из призм изменяется по линейному закону, а составляющая индукции постоянна.

Для цилиндрических элементов с окружной поляризацией в соответствии с обобщенной теорией Кирхгофа-Лява получаем следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0\\
&\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{r\theta} = 0\\
&E_z = E_r = 0\\
&\mathfrak{D}_r = \mathfrak{D}_z = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}$ - компоненты тензора механических напряжений, $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta}$ - компоненты тензора механических деформаций, E_z, E_r, $\mathfrak{D}_r, \mathfrak{D}_z$ - составные вектора напряженности $\vec{E}$ и индукции $\vec{\mathfrak{D}}$ электрического поля.

Исходными соотношениями при выводе уравнений принимаются уравнения движения упругой цилиндрической оболочки в усилиях и моментах, которые получены из статических условий равновесия после того как к ним были добавлены инерционные члены

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_1}{\partial \theta} + R\frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial z} + Rq_\theta = R\gamma h\frac{\partial^2 U}{\partial t^2};\\
&R\frac{\partial N_2}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial \theta} + Rq_z = R\gamma h\frac{\partial^2 V}{\partial t^2};\\
&\frac{1}{R}\frac{\partial^2 M_1}{\partial \theta^2} + R\frac{\partial^2 M_2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial \theta \partial z} - N_1 + Rq_r = R\gamma h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2};
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где γ - плотность оболочки, q_θ, q_z, q_r - составные нагрузки, t - время,

выражения для нормальных компонент напряженности электрического поля и электрической индукции

$$
\begin{aligned}
&E_\theta = E_\theta^{(0)} + \eta E_\theta^{(1)}, \left(-\frac{\Delta}{2} \le \eta \le \frac{\Delta}{2}\right),\\
&\mathfrak{D}_\theta = const;
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где Δ - ширина призмы по серединной линии,

соотношения Коши

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{W}{R}, \varepsilon_{zz}^{(0)} = \frac{\partial V}{\partial z};\\
&æ_1 = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right), æ_2 = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2};
\end{aligned}
\tag{4}
$$

интегральные силовые характеристики оболочки, а именно нормальные усилия

$$
\begin{aligned}
&N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} d\eta,\\
&N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zz} d\eta;
\end{aligned}
\tag{5a}
$$

и изгибающие моменты

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta}\eta d\eta,$$
$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zz}\eta d\eta; \qquad (5б)$$

где h - толщина оболочки,

уравнения пьезоэффекта

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + \eta æ_1, \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^{(0)} + \eta æ_2. \qquad (6)$$

В этих соотношениях W,U,V - смещения серединной поверхности оболочки соответственно в радиальном, касательном и осевом направлении, η - переменная по ширине призмы оболочки, Δ - координата, R - радиус оболочки.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Запишем уравнения пьезоэффекта для окружной поляризации с учетом (1), они принимают следующий вид:

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{13}^E \varepsilon_{zz} + C_{33}^E \varepsilon_{\theta\theta} - e_{33} E_\theta;$$
$$\sigma_{zz} = C_{13}^E \varepsilon_{\theta\theta} + C_{11}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_\theta; \qquad (7)$$
$$\mathfrak{D}_\theta = \varepsilon_{33}^S E_\theta + e_{31}\varepsilon_{zz} + e_{33}\varepsilon_{\theta\theta}.$$

где $C_{11}^E, C_{13}^E, C_{33}^E$ - модули упругости при нулевой электрической напряженности, e_{33}, e_{31} - пьезомодули и ε_{33}^S - диэлектрическая проницаемость при нулевой деформации.

Далее (3, 6) подставляем в (7), получаем выражения, которые связывают механические напряженности и индукцию с деформацией и электрической напряженностью:

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{13}^E \varepsilon_{zz}^{(0)} + C_{33}^E \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} - e_{33} E_\theta^{(0)} + \eta\left(C_{13}^E æ_2 + C_{33}^E æ_1 - e_{33} E_\theta^{(1)}\right);$$
$$\sigma_{zz} = C_{13}^E \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + C_{11}^E \varepsilon_{zz}^{(0)} - e_{31} E_\theta^{(0)} + \eta\left(C_{13}^E æ_1 + C_{11}^E æ_2 - e_{31} E_\theta^{(1)}\right); \qquad (8)$$
$$\mathfrak{D}_\theta = \varepsilon_{33}^S E_\theta^{(0)} + e_{31}\varepsilon_{zz}^{(0)} + e_{33}\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + \eta\left(e_{31} æ_2 + e_{33} æ_1 + \varepsilon_{33}^S E_\theta^{(1)}\right).$$

Учитывая, что $\mathfrak{D}_\theta = const$, из последнего уравнения (8) найдем выражение для $E_\theta^{(1)}$:

$$e_{31}æ_2 + e_{33}æ_1 + \varepsilon_{33}^{S} E_\theta^{(1)} = 0 \Rightarrow E_\theta^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon_{33}^{S}}\left(e_{31}æ_2 + e_{33}æ_1\right).$$

С учетом (4) выражение для $E_\theta^{(1)}$ принимает следующий вид:

$$E_\theta^{(1)} = -\frac{e_{31}}{\varepsilon_{33}^{S}}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^{S}}\frac{1}{R^2}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^{S}}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}.$$

Далее находим интегральные характеристики для тонких оболочек. Подставляем (8) в (5а) и (5б)

$$\begin{aligned}
N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2}\left[C_{13}^E \varepsilon_{zz}^{(0)} + C_{33}^E \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} - e_{33}E_\theta^{(0)} + \eta\left(C_{13}^E æ_2 + C_{33}^E æ_1 - e_{33}E_\theta^{(1)}\right)\right]d\eta = \\
&= \left(C_{13}^E \varepsilon_{zz}^{(0)} + C_{33}^E \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} - e_{33}E_\theta^{(0)}\right)h; \\
N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2}\left[C_{13}^E \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + C_{11}^E \varepsilon_{zz}^{(0)} - e_{31}E_\theta^{(0)} + \eta\left(C_{13}^E æ_1 + C_{11}^E æ_2 - e_{31}E_\theta^{(1)}\right)\right]d\eta = \\
&= \left(C_{13}^E \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + C_{11}^E \varepsilon_{zz}^{(0)} - e_{31}E_\theta^{(0)}\right)h; \\
M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2}\left[C_{13}^E \varepsilon_{zz}^{(0)} + C_{33}^E \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} - e_{33}E_\theta^{(0)} + \eta\left(C_{13}^E æ_2 + C_{33}^E æ_1 - e_{33}E_\theta^{(1)}\right)\right]\eta d\eta = \\
&= \left(C_{13}^E æ_2 + C_{33}^E æ_1 - e_{33}E_\theta^{(1)}\right)\frac{h^3}{12}; \\
M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2}\left[C_{13}^E \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + C_{11}^E \varepsilon_{zz}^{(0)} - e_{31}E_\theta^{(0)} + \eta\left(C_{13}^E æ_1 + C_{11}^E æ_2 - e_{31}E_\theta^{(1)}\right)\right]\eta d\eta = \\
&= \left(C_{13}^E æ_1 + C_{11}^E æ_2 - e_{31}E_\theta^{(1)}\right)\frac{h^3}{12}.
\end{aligned} \qquad (9)$$

Подставляем (4) в (9):

$$\begin{aligned}
N_1 &= C_{13}^E h\frac{\partial V}{\partial z} + C_{33}^E h\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial \theta} + C_{33}^E h\frac{W}{R} - e_{33}hE_\theta^{(0)}; \\
N_2 &= C_{13}^E h\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial \theta} + C_{13}^E h\frac{W}{R} + C_{11}^E h\frac{\partial V}{\partial z} - e_{31}hE_\theta^{(0)}; \\
M_1 &= \left(\frac{h^3 C_{13}^E}{12} + \frac{h^3 e_{33}e_{31}}{12\varepsilon_{33}^S}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \left(\frac{h^3}{12}\frac{C_{33}^E}{R^2} + \frac{h^3 e^2{}_{33}}{12R^2\varepsilon_{33}^S}\right)\frac{\partial U}{\partial \theta} - \left(\frac{h^3}{12}\frac{C_{33}^E}{R^2} + \frac{h^3 e^2{}_{33}}{12R^2\varepsilon_{33}^S}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}; \qquad (10) \\
M_2 &= \left(\frac{h^3 C_{13}^E}{12R^2} + \frac{h^3 e_{31}e_{33}}{12R^2\varepsilon_{33}^S}\right)\frac{\partial U}{\partial \theta} - \left(\frac{h^3 C_{13}^E}{12R^2} + \frac{h^3 e_{31}e_{33}}{12R^2\varepsilon_{33}^S}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \left(\frac{h^3 C_{11}^E}{12} + \frac{h^3 e^2{}_{31}}{12\varepsilon_{33}^S}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

Далее (10) подставляем в (2):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\theta}\left(C_{13}^{E}h\frac{\partial V}{\partial z}+C_{33}^{E}h\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial\theta}+C_{33}^{E}h\frac{W}{R}-e_{33}hE_{\theta}^{(0)}\right)+\\
&+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{h^{3}C_{13}^{E}}{12}+\frac{h^{3}e_{33}e_{31}}{12\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial^{2}W}{\partial z^{2}}+\left(\frac{h^{3}}{12}\frac{C_{33}^{E}}{R^{2}}+\frac{h^{3}e^{2}{}_{33}}{12R^{2}\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial U}{\partial\theta}-\left(\frac{h^{3}}{12}\frac{C_{33}^{E}}{R^{2}}+\frac{h^{3}e^{2}{}_{33}}{12R^{2}\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial^{2}W}{\partial\theta^{2}}\right]+\\
&+Rq_{\theta}=R\gamma h\frac{\partial^{2}U}{\partial t^{2}};\\
&R\frac{\partial}{\partial z}\left(C_{13}^{E}h\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial\theta}+C_{13}^{E}h\frac{W}{R}+C_{11}^{E}h\frac{\partial V}{\partial z}-e_{31}hE_{\theta}^{(0)}\right)+Rq_{z}=R\gamma h\frac{\partial^{2}V}{\partial t^{2}};\\
&\frac{1}{R}\frac{\partial^{2}}{\partial\theta^{2}}\left[\left(\frac{h^{3}C_{13}^{E}}{12}+\frac{h^{3}e_{33}e_{31}}{12\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial^{2}W}{\partial z^{2}}+\left(\frac{h^{3}}{12}\frac{C_{33}^{E}}{R^{2}}+\frac{h^{3}e^{2}{}_{33}}{12R^{2}\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial U}{\partial\theta}-\left(\frac{h^{3}}{12}\frac{C_{33}^{E}}{R^{2}}+\frac{h^{3}e^{2}{}_{33}}{12R^{2}\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial^{2}W}{\partial\theta^{2}}\right]+\\
&+R\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\left[\left(\frac{h^{3}C_{13}^{E}}{12R^{2}}+\frac{h^{3}e_{31}e_{33}}{12R^{2}\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial U}{\partial\theta}-\left(\frac{h^{3}C_{13}^{E}}{12R^{2}}+\frac{h^{3}e_{31}e_{33}}{12R^{2}\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial^{2}W}{\partial\theta^{2}}+\left(\frac{h^{3}C_{11}^{E}}{12}+\frac{h^{3}e^{2}{}_{31}}{12\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial^{2}W}{\partial z^{2}}\right]-\\
&-\left(C_{13}^{E}h\frac{\partial V}{\partial z}+C_{33}^{E}h\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial\theta}+C_{33}^{E}h\frac{W}{R}-e_{33}hE_{\theta}^{(0)}\right)+Rq_{r}=R\gamma h\frac{\partial^{2}W}{\partial t^{2}}.
\end{aligned}
$$

После выполнения ряда простых алгебраических преобразований получаем искомые уравнения движения:

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{h^{2}}{12R^{2}}+\frac{h^{2}e^{2}{}_{33}}{12R^{2}C_{33}^{E}\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial^{2}U}{\partial\theta^{2}}+R\frac{\partial^{2}V}{\partial\theta\partial z}+\frac{\partial W}{\partial\theta}-\frac{h^{2}}{12R^{2}}\left(1+\frac{e^{2}{}_{33}}{C_{33}^{E}\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial^{3}W}{\partial\theta^{3}}+\\
&+\frac{h^{2}C_{13}^{E}}{12C_{33}^{E}}\left(1+\frac{e_{33}e_{31}}{\varepsilon_{33}^{s}C_{13}^{E}}\right)\frac{\partial^{3}W}{\partial\theta\partial z^{2}}-\frac{e_{33}R}{C_{33}^{E}}\frac{\partial E_{\theta}^{(0)}}{\partial\theta}+\frac{R^{2}}{hC_{33}^{E}}q_{\theta}=\frac{R^{2}}{hC_{33}^{E}}\gamma h\frac{\partial^{2}U}{\partial t^{2}};\\
&\frac{\partial^{2}U}{\partial\theta\partial z}+\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{C_{11}^{E}R}{C_{13}^{E}}\frac{\partial^{2}V}{\partial z^{2}}-\frac{e_{31}R}{C_{11}^{E}}\frac{\partial E_{\theta}^{(0)}}{\partial z}+\frac{R}{C_{11}^{E}h}q_{z}=\frac{R\gamma h}{C_{11}^{E}h}\frac{\partial^{2}V}{\partial t^{2}};\\
&-\frac{\partial U}{\partial\theta}+\frac{h^{2}}{12R^{2}}\left(1+\frac{e^{2}{}_{33}}{C_{33}^{E}\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial^{3}U}{\partial\theta^{3}}+\frac{h^{2}C_{13}^{E}}{12C_{33}^{E}}\left(1+\frac{e_{31}e_{33}}{\varepsilon_{33}^{s}C_{13}^{E}}\right)\frac{\partial^{3}U}{\partial\theta\partial z^{2}}-\frac{C_{13}^{E}R}{C_{33}^{E}}\frac{\partial V}{\partial z}-\\
&-W-\frac{h^{2}}{12R^{2}}\left(1+\frac{e^{2}{}_{33}}{C_{33}^{E}\varepsilon_{33}^{s}}\right)\frac{\partial^{4}W}{\partial\theta^{4}}+\frac{h^{2}R^{2}C_{11}^{E}}{12C_{33}^{E}}\left(1+\frac{e^{2}{}_{31}}{\varepsilon_{33}^{s}C_{11}^{E}}\right)\frac{\partial^{4}W}{\partial z^{4}}+\frac{e_{33}R}{C_{33}^{E}}E_{\theta}^{(0)}+\\
&+\frac{R^{2}}{hC_{33}^{E}}q_{r}=\frac{R^{2}\gamma h}{hC_{33}^{E}}\frac{\partial^{2}W}{\partial t^{2}}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Уравнения движения оболочек представляют собой систему трех линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка, записанные относительно перемещений в осевом, окружном и радиальном направлениях.

Далее приведены уравнения движения пьезокерамических оболочек для ряда частных случаев, когда они совершают двумерные, а также одномерные (пульсирующие) колебания. Что бы получить систему уравнений для двухмерного случая, необходимо учесть, что нет смещений в осевом направлении и $q_{\theta}=0$, $q_{z}=0$, $q_{r}=(P_{2}-P_{1})\big|_{r=R}=\left(-\rho_{2}\Phi_{2}\left(r_{2},\varphi\right)-\left(-\rho_{1}\Phi_{1}\left(r_{1},\varphi\right)\right)\right)=\rho_{1}\Phi_{1}\left(r_{1},\varphi\right)-\rho_{2}\Phi_{2}\left(r_{2},\varphi\right)\big|_{r=R}$, где Φ_1 и Φ_2 -

акустические потенциалы для жидкости снаружи и внутри оболочки соответственно, ρ_1 и ρ_2 плотность среды снаружи и внутри оболочки:

$$\left(1+\frac{h^2}{12R^2}+\frac{h^2e^2_{33}}{12R^2C^E_{33}\varepsilon^s_{33}}\right)\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}+\frac{\partial W}{\partial\theta}-\frac{h^2}{12R^2}\left(1+\frac{e^2_{33}}{C^E_{33}\varepsilon^s_{33}}\right)\frac{\partial^3W}{\partial\theta^3}-\frac{e_{33}R}{C^E_{33}}\frac{\partial E^{(0)}_\theta}{\partial\theta}=\frac{R^2\gamma}{C^E_{33}}\frac{\partial^2U}{\partial t^2};$$

$$-\frac{\partial U}{\partial\theta}+\frac{h^2}{12R^2}\left(1+\frac{e^2_{33}}{C^E_{33}\varepsilon^s_{33}}\right)\left(\frac{\partial^3U}{\partial\theta^3}-\frac{\partial^4W}{\partial\theta^4}\right)-W+\frac{e_{33}R}{C^E_{33}}E^{(0)}_\theta+\frac{R^2}{hC^E_{33}}\left(\rho_1\Phi_1\left(r_1,\varphi\right)-\rho_2\Phi_2\left(r_2,\varphi\right)\right)=\frac{R^2\gamma}{C^E_{33}}\frac{\partial^2W}{\partial t^2}.$$

Учитывая, что $E^{(0)}_\theta=-\frac{n}{2\pi}\frac{\Psi}{R}$, где Ψ - разница напряжений подводимых к обкладкам электродов:

$$(1+\beta)\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}+\frac{\partial W}{\partial\theta}-\beta\frac{\partial^3W}{\partial\theta^3}=\alpha\gamma\frac{\partial^2U}{\partial t^2};$$

$$-\frac{\partial U}{\partial\theta}+\beta\left(\frac{\partial^3U}{\partial\theta^3}-\frac{\partial^4W}{\partial\theta^4}\right)-W-\frac{e_{33}R}{C^E_{33}}\frac{n}{2\pi}\frac{\Psi}{R}+\frac{\alpha}{h}\left(\rho_1\Phi_1\left(r_1,\varphi\right)-\rho_2\Phi_2\left(r_2,\varphi\right)\right)=\alpha\gamma\frac{\partial^2W}{\partial t^2}. \qquad (12)$$

где $\beta=\frac{h^2}{12R^2}\left(1+\frac{e^2_{33}}{C^E_{33}\varepsilon^s_{33}}\right)$, $\alpha=\frac{R^2}{C^E_{33}}$.

В случае одномерной модели аналогичным образом опускаем смещения и в касательном направлении.

$$-\beta\frac{\partial^4W}{\partial\theta^4}-W-\frac{e_{33}R}{C^E_{33}}\frac{n}{2\pi}\frac{\Psi}{R}+\frac{\alpha}{h}\left(\rho_1\Phi_1\left(r_1,\varphi\right)-\rho_2\Phi_2\left(r_2,\varphi\right)\right)=\alpha\gamma\frac{\partial^2W}{\partial t^2}. \qquad (13)$$

где $\beta=\frac{h^2}{12R^2}\left(1+\frac{e^2_{33}}{C^E_{33}\varepsilon^s_{33}}\right)$, $\alpha=\frac{R^2}{C^E_{33}}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные уравнения можно использовать при формулировании задач излучения и приема акустических волн. Однако, в последнем случае для нахождения электрической напряженности, входящей в эти уравнения дополнительно необходимо привлекать выражения связывающие индукцию с током смещения в керамике (электрические граничные условия).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дідковський В.С., Лейко О.Г., Савін В.Г. Електроакустичні п'єзокерамічні перетворювачі. Навчальний посібник. – Кіровоград: «Імекс-ЛТД», 2006. -448 с.
2. Механика связных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. - Киев: Наук. Думка, 1989. - 280 с.