

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМ КРАЕМ

**И. В. ЯНЧЕВСКИЙ**

*Институт механики НАНУ, ул. Нестерова, 3, 03057, г. Киев, Украина  
e-mail: khnahu@ukr.net*

Axisymmetric vibration of piezoceramic transducer in the form of open spherical shell with rigidly clamped edge under combined electromechanical impulse loading have been investigated. Modeling of transient processes is executed within the classical Kirchhoff-Love hypotheses generalized on a case of electromechanics. The problem is reduced to the system of Volterra integral equations which is constructed in view of mechanical boundary conditions satisfaction.

### ВВЕДЕНИЕ

Среди всего разнообразия конфигураций пьезокерамических элементов, используемых на практике в качестве эффективных электромеханических преобразователей энергии, к весьма распространенным относятся элементы в виде тонких незамкнутых сферических оболочек. Изучению закономерностей динамического поведения таких оболочек при электромеханическом нагружении посвящены единичные публикации. В частности, в работе [1] получено общее решение задачи об установившихся колебаниях пьезокерамической оболочки со свободным отверстием, возбуждаемых электрическим путем. Результаты экспериментальных исследований по оценке адекватности применения существующей математической модели замкнутой сферической оболочки для описания поведения реальных сферических пьезоизлучателей (с конструктивными особенностями) представлены в публикации [2].

В настоящей работе изучаются нестационарные осесимметричные деформации жестко защемленной вдоль края сферической оболочки, возникающие в случае совместного механического и электрического ее нагружения. При этом рассмотрено биморфное исполнение пьезопреобразователя, подразумевающее наличие дополнительного слоя из пьезоэлектрически пассивного упругого материала. Следует отметить, что использование слоев с различными функциональными свойствами позволяет существенно расширить перечень практических приложений преобразователей за счет многообразия геометрических и физических характеристик, высоким эксплуатационным параметрам, проч.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

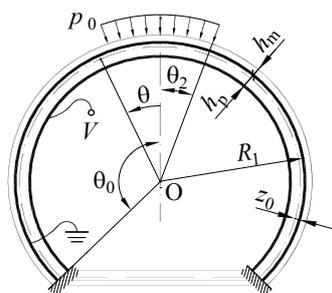


Рис. 1

Рассматривается незамкнутая в нижнем полюсе сферическая оболочка, которая состоит из тонких жестко соединенных между собой электроупругого и упругого слоев с толщинами  $h_p$  и  $h_m$ . Радиус поверхности соединения слоев обозначен как  $R_1$ , а размер кругового отверстия определяется сферическим углом раствора  $\theta = \theta_0$ , отсчитываемого от оси симметрии (рис. 1). На поляризованный по толщине электроупругий слой нанесены сплошные бесконечно тонкие электроды, к которым подводится разность

потенциалов  $V$ . Помимо этого, на круговой области с углом раствора  $\theta_2$  действует импульс давления интенсивностью  $p_0$ . Механические граничные условия соответствуют условиям жесткого защемления, начальные условия – нулевые.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

С использованием классических гипотез Кирхгофа-Лява, дополненных адекватными им допущениями относительно характеристик электрического поля [3], рассматриваемая задача о деформации двухслойного преобразователя сводится к задаче о колебаниях поверхности приведения [4], уравнения движения которой по форме не отличаются от соответствующих уравнений движения однослойной электроупругой оболочки [5] с приведенными жесткостями на растяжение и изгиб:

$$\begin{aligned} D_1 u_0 + D_2 w + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= q_\theta; \\ D_3 u_0 + D_4 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q_z - 2V. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $w$  и  $u_0$  – соответственно нормальное и тангенциальное перемещения точек поверхности приведения;  $q_\theta$  и  $q_z$  – меридиональная и нормальная составляющие внешней нагрузки, отнесенные к  $c_F/R^2$ ;  $V$  – разность потенциалов между электродами электроупругого слоя, отнесенная к  $-c_F/e_{31}R$ ;  $t$  – безразмерное время (время отнесено к  $R\sqrt{\rho_F/c_F}$ );  $R=R_1-z_0$  – радиус кривизны поверхности приведения;  $\delta=\beta_0^{-4}$  – нормирующий коэффициент. Отметим, что расчетные выражения для  $z_0$ ,  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$ ,  $c_F$ ,  $\beta_0$ ,  $e_{31}$  и  $\rho_F$  совпадают с принятыми в публикации [6], поэтому в настоящей работе не приводятся.

Систему уравнений (1), в которой используются дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} D_1 &= -(1+\delta) \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - (\operatorname{ctg}^2 \theta + \nu) \right]; \\ D_2 &= \delta \left[ \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (\operatorname{ctg}^2 \theta + \nu) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] - (1+\nu) \frac{\partial}{\partial \theta}; \\ D_3 &= -\delta \left[ \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta + \bar{\nu}) \frac{\partial}{\partial \theta} + (2 + \operatorname{ctg}^2 \theta - \bar{\nu}) \operatorname{ctg} \theta \right] + (1+\nu) \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \right]; \\ D_4 &= \delta \left[ \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} - (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta + \bar{\nu}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (2 + \operatorname{ctg}^2 \theta - \bar{\nu}) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + 2(1+\nu), \end{aligned}$$

дополним нулевыми начальными условиями и механическими граничными условиями следующего вида:

$$w|_{\theta=\theta_0} = 0; \quad u_0|_{\theta=\theta_0} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0. \quad (2)$$

Форма электрических граничных условий зависит от вида электродирования и способа подвода (съема) электрической энергии. В рассматриваемом случае функция  $V$  является заданной функцией времени.

### 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение задачи ищется операционным методом (с применением интегрального преобразования Лапласа по времени,  $s$  – параметр преобразования). Тогда с учетом симметрии по окружной координате искомые величины описываются рядами по полиномам Лежандра

$$w^L = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^L(s) P_k(y); \quad u_0^L = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^L(s) P_k^1(y). \quad (3)$$

Здесь  $y = \cos\theta$ , а  $c_k$ ,  $b_k$  – коэффициенты, подлежащие определению.

Для удовлетворения граничных условий (2), которые в пространстве изображений запишутся в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^L(s) P_k(y_0) = 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^L(s) P_k^1(y_0) = 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^L(s) P_k^1(y_0) = 0, \quad (4)$$

где  $y_0 = \cos\theta_0$ , вводится дополнительная система механических нагрузок (нормальной  $q_0$  и меридиональной  $q_1$ ), равномерно распределенных на узкой полосе шириной  $R\Delta\theta$  ( $\Delta\theta \rightarrow 0$ ) в окрестности параллели  $\theta = \theta_0 - \Theta$ , близкой к месту заземления оболочки ( $\Theta \rightarrow 0$ ).

В результате изображения функций  $q_z$  и  $q_\theta$  (1) могут быть записаны в виде рядов, аналогичных (3):

$$q_\theta^L(y, s) = \sum_{k=1}^{\infty} N_0^L(s) \xi_k^{(7)} P_k^1(y); \quad (5)$$

$$q_z^L(y, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ P_0^L(s) \Delta_k^{(0)} + Q_0^L(s) \xi_k^{(8)} + M_0^L(s) \xi_k^{(9)} \right] P_k(y),$$

где  $Q_0$ ,  $M_0$  и  $N_0$  – сосредоточенные в точке  $\theta = \theta_0$  ( $y = y_0$ ) радиальная, тангенциальная и моментная нагрузки, связанные с  $q_0$  и  $q_1$  соотношениями предельного перехода:

$$q_0 R \Delta\theta \xrightarrow{\Delta\theta \rightarrow 0} Q_0, \quad Q_0 R \Theta \xrightarrow{\Theta \rightarrow 0} M_0 \quad \text{и} \quad q_1 R \Delta\theta \xrightarrow{\Delta\theta \rightarrow 0} N_0;$$

а постоянные коэффициенты таковы:

$$\xi_k^{(7)} = -\frac{P_k^1(y_0)}{RK} \frac{2k+1}{2(k^2+k)}; \quad \xi_k^{(8)} = -\frac{1}{RK} P_k(y_0) \frac{2k+1}{2}; \quad \xi_k^{(9)} = -\frac{1}{R^2 K^2} \frac{P_k^1(y_0)}{\sqrt{1-y_0^2}} \frac{2k+1}{2};$$

$$\Delta_k^{(0)} = -\frac{P_{k-1}(y_2) - P_{k+1}(y_2)}{2}; \quad K = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_0^{2n} \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}; \quad y_2 = \cos\theta_2.$$

После подстановки в систему (1) представлений (3) и (5) и ее решения относительно трансформант  $b_k^L$  и  $c_k^L$  будем иметь

$$c_0^L(s) = \frac{D_0^c(s)}{s^2 + \xi_0^{(4)}}; \quad c_k^L(s) = \frac{D_k^c(s)}{D_k(s)}; \quad b_k^L(s) = \frac{D_k^b(s)}{D_k(s)} \quad (k \geq 1), \quad (6)$$

где используются обозначения

$$\begin{aligned} D_k(s) &= s^4 + \lambda_k^{(1)}s^2 + \lambda_k^{(2)}; \quad D_0^c = p_0^L \Delta_0^{(0)} + Q_0^L \xi_0^{(8)} - 2V^L; \\ D_k^c(s) &= (p_0^L \Delta_k^{(0)} + Q_0^L \xi_k^{(8)} + M_0^L \xi_k^{(9)})(s^2 + \xi_k^{(1)}) - N_0^L \xi_k^{(3)} \xi_k^{(7)}; \\ D_k^b(s) &= -\xi_k^{(2)}(p_0^L \Delta_k^{(0)} + Q_0^L \xi_k^{(8)} + M_0^L \xi_k^{(9)}) + N_0^L \xi_k^{(7)}(s^2 + \xi_k^{(4)}), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(1)} &= \xi_k^{(1)} + \xi_k^{(4)}; \quad \lambda_k^{(2)} = \xi_k^{(1)} \xi_k^{(4)} - \xi_k^{(2)} \xi_k^{(3)}; \\ \xi_k^{(1)} &= (1 + \delta)[k^2 + k - 1 + \nu]; \quad \xi_k^{(3)} = -[\delta(k^2 + k)(k^2 + k - 1 + \bar{\nu}) + (k^2 + k)(1 + \nu)] \\ \xi_k^{(2)} &= -[\delta(k^2 + k - 1 + \nu) + (1 + \nu)]; \quad \xi_k^{(4)} = \delta(k^2 + k)(k^2 + k - 1 + \bar{\nu}) + 2(1 + \nu). \end{aligned}$$

Корни уравнения  $D_k(s) = 0$  являются чисто мнимыми, поэтому для удобства последующего обращения выражение для  $D_k(s)$  представим в форме

$$D_k(s) = (s^2 + \alpha_k^{(1)2})(s^2 + \alpha_k^{(2)2}),$$

где  $\alpha_k^{(j)}$  – модули упомянутых корней.

В результате переход в пространство оригиналов для (14) не вызывает принципиальных затруднений. И для коэффициентов разложений радиальных  $w$  и тангенциальных  $u_0$  перемещений (7) получим:

$$\begin{aligned} c_0(t) &= \int_0^t [\Delta_0^{(0)} p_0(\tau) + \xi_0^{(8)} Q_0(\tau) - 2V(\tau)] I_0^{(1)}(t - \tau) d\tau; \quad (7) \\ c_k(t) &= \int_0^t [\Delta_k^{(0)} p_0(\tau) + \xi_k^{(8)} Q_0(\tau) + \xi_k^{(9)} M_0(\tau)] I_k^{(1)}(t - \tau) d\tau - \xi_k^{(3)} \int_0^t \xi_k^{(7)} N_0(\tau) I_k^{(2)}(t - \tau) d\tau; \\ b_k(t) &= \int_0^t \xi_k^{(7)} N_0(\tau) I_k^{(4)}(t - \tau) d\tau - \xi_k^{(2)} \int_0^t [\Delta_k^{(0)} p_0(\tau) + \xi_k^{(8)} Q_0(\tau) + \xi_k^{(9)} M_0(\tau)] I_k^{(2)}(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь подынтегральные функции  $I_k^{(r)}(t)$  определяются формулами

$$I_0^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\xi_0^{(4)}}} \sin(\sqrt{\xi_0^{(4)}} t); \quad I_k^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^2 \frac{\beta_k^{(r,j)}}{\alpha_k^{(j)}} \sin(\alpha_k^{(j)} t) \quad (k \geq 1; \quad r = 1, 2, 4),$$

в которых приняты обозначения

$$\beta_k^{(2,j)} = \frac{1}{\alpha_k^{(1)2} - \alpha_k^{(j)2}}; \quad \beta_k^{(r,j)} = \frac{\xi_k^{(r)} - \alpha_k^{(j)2}}{\alpha_k^{(1)2} - \alpha_k^{(j)2}}; \quad (j, \iota = 1, 2; \iota \neq j; r = 1, 4).$$

Входящие в (7) неизвестные функции  $Q_0$ ,  $M_0$  и  $N_0$  подбираются таким образом, чтобы были удовлетворены механические граничные условия. В результате подстановки соотношений (7) в условия (4) получим систему интегральных уравнений Вольтерра с ядрами типа свертка относительно указанных неизвестных, которая для сокращения изложения материала в настоящей работе не приводится. При ее решении к эффективным следует отнести прием, позволяющий на основании квадратурных формул заменить исходную систему интегральных уравнений конечно-мерным аналогом в виде системы линейных алгебраических уравнений, матричное представление которой следующее:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{N}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{15} & \mathbf{M}_{14} \\ \mathbf{M}_{25} & \mathbf{M}_{24} \\ \mathbf{M}_{35} & \mathbf{M}_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Здесь блоки  $\mathbf{M}_{ij}$  являются нижними треугольными матрицами, а в вектор-столбцы входят коэффициенты кусочно-постоянной аппроксимации известных ( $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{V}$ ) и иско- мых ( $\mathbf{Q}_0$ ,  $\mathbf{M}_0$  и  $\mathbf{N}_0$ ) функций. Для построения устойчивого к вычислительным погреш- ностям решения (8) используются обобщенный метод Гаусса и метод регуляризации А.Н. Тихонова, численную сторону реализации которого можно найти в монографии [7]. Ре- шив систему (8) и располагая значениями  $Q_0$ ,  $M_0$  и  $N_0$ , нетрудно определить прогиб оболочки и другие, представляющие интерес, характеристики переходного процесса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисейко В.А., Улитко А.Ф.* Осесимметричные колебания тонкой пьезокерамической сферической оболочки // Прикл. механика. – 1974. – Т. **X**, вып. 10. – С. 3–10.
2. *Моргун И.О., Савин В.Г.* Экспериментальные исследования переходных режимов рабо- ты одномодовых сферических пьезокерамических преобразователей // Электроника и связь. – 2009. – № 1. – С. 54–57.
3. Механика связанных полей в элементах, конструкций: В 5-ти томах / Под общ. ред. *А.Н. Гузя*. Т. **5**. Электроупругость / *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* – К.: На- ук. думка, 1989. – 280 с.
4. *Рудницкий С.И., Шаранов В.М., Шульга Н.А.* Колебания дискового биморфного преоб- разователя типа металл-пьезокерамика // Прикл. механика. – 1990. – Т. **26**, № 10. – С. 64–72.
5. *Савин В.Г., Моргун И.О.* Уравнения колебаний пьезокерамических сферических и ци- линдрических оболочек // Наук.-техн. зб. «Інформаційні системи, механіка та керування». – 2009. – Вип. 5. – С. 85–96.
6. *Янчевский И.В.* Нестационарные колебания асимметричного дискового биморфа в ре- жиме прямого пьезоэлектрического эффекта // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т. **13**, № 6. – С. 42–52.
7. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. – 229 с.