О ПРОСТРАНСТВЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА НАКОПЛЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ С УЧЕТОМ ПРОЦЕССА РАЗГРУЗКИ МАТЕРИАЛА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В. Р. БОГДАНОВ[1], Г. Т. СУЛИМ[2]

[1]*Национальный транспортный университет, Киев*
[2]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов*

На основе решения пространственной задачи напряжено-деформированного состояния для материала с поперечным сечением в форме прямоугольника с пропилом-трещиной посредине (плоский прямоугольный образец с краевой трещиной - SENB) для определения вязкости разрушения при трехточечном изгибе в динамической упругопластической постановке с учетом процесса разгрузки материала определяются зоны пластических деформаций для разных металлов.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–7] для анализа процессов разрушения применяются расчетные методы с использованием динамической упругопластической модели материала. В публикациях [2, 3] решены соответственно задачи плоского деформированного и напряженного состояний. Пространственное напряженно-деформированное состояние материала определяется в работе [7]. В публикациях [4, 5] решены пространственные задачи с трещиной, подрастающей согласно условию отсутствия максимальных напряжений на острие трещины и локальному критерию хрупкого разрушения. В публикации [6] вязкость разрушения определяется на основе решения пространственной задачи в предположении, что трещина неподвижна. Предложенные модели дали возможность значительно повысить уровень адекватности полученных теоретических подходов.

В данной работе, в отличие от [1, 3], где анализируется развитие пластических деформаций в разных металлах на основе решения динамических упругопластических задач плоского, соответственно, деформированного и напряженного состояний с учетом процесса разгрузки материала, исследуется пространственная задача.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим деформирование бесконечного изотропного бруса $\{|x| \le L/2,\ 0 \le y \le B,\ 0 \le z \le H\}$ длины L, высоты B, толщины H, имеющего в плоскости поперечного сечения форму прямоугольника $\Sigma = L \times B$ с неподвижной пропилом-трещиной длины l вдоль вертикальной оси прямоугольника $\{x = 0,\ 0 \le y \le l,\ 0 \le z \le H\}$ посредине (плоский прямоугольный образец с краевой трещиной для определения вязкости разрушения при трехточечном изгибе – SENB). Брус контактирует с двумя неподвижными опорами по области $\{L_* \le |x| \le L_* + a,\ y = 0,\ 0 \le z \le H\}$. Сверху на брус падает абсолютно твердый ударник, контактирующий с брусом в области $\{|x| \le A,\ y = B,\ 0 \le z \le H\}$ на протяжении короткого промежутка времени. Его действие заменяем равномерно распределенной в области контакта нормальной нагрузкой $-P$, изменяющейся во времени по линейному закону. Вследствие симметрии задачи относительно плоскости $x=0$ рассматривается только правая часть поперечного сечения (рис. 1). На протяжении всего промежутка времени взаимодействия область контакта считается постоянной.

Пусть $\mathbf{u}=(u_x,u_y,u_z)$ – вектор смещений, связанный с компонентами тензора малых деформаций ε_{ij} соотношениями Коши.

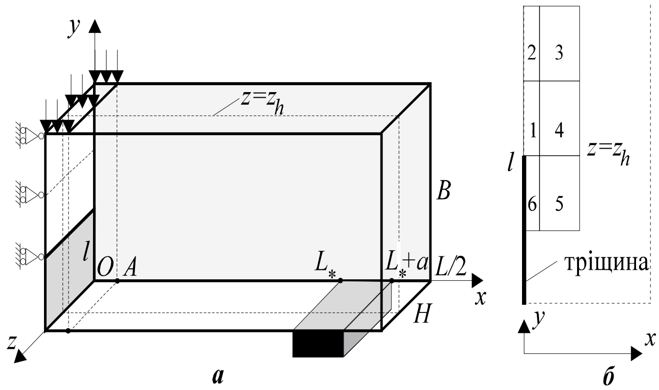

Рис.1. Геометрическая схема задачи (а) и сетка разбиения возле острия трещины (б)

Краевые и начальные условия задачи (в предположении о неизменяемости области приложения реакции опор, гладкости и безотрывности контакта образца с опорами):

$$
\begin{aligned}
&x=0,\ \ 0<y<l,\ \ 0<z<H:\ \ \sigma_{xx}=0,\ \ \sigma_{xy}=0,\ \ \sigma_{xz}=0,\\
&x=0,\ \ l<y<B,\ \ 0<z<H:\ \ u_x=0,\ \ \sigma_{xy}=0,\ \ \sigma_{xz}=0,\\
&x=L/2,\ \ 0<y<B,\ \ 0<z<H:\ \ \sigma_{xx}=0,\ \ \sigma_{xy}=0,\ \ \sigma_{xz}=0,\\
&y=0,\ \ 0<x<L_*,\ \ 0<z<H:\ \ \sigma_{yy}=0,\ \ \sigma_{xy}=0,\ \ \sigma_{yz}=0,\\
&y=0,\ \ L_*<x<L_*+a,\ \ 0<z<H:\ \ u_y=0,\ \ \sigma_{xy}=0,\ \ \sigma_{yz}=0,\\
&y=0,\ \ L_*+a<x<L/2,\ \ 0<z<H:\ \ \sigma_{yy}=0,\ \ \sigma_{xy}=0,\ \ \sigma_{yz}=0,\qquad (1)\\
&y=B,\ \ 0<x<A,\ \ 0<z<H:\ \ \sigma_{yy}=-P,\ \ \sigma_{xy}=0,\ \ \sigma_{yz}=0,\\
&y=B,\ \ A<x<L/2,\ \ 0<z<H:\ \ \sigma_{yy}=0,\ \ \sigma_{xy}=0,\ \ \sigma_{yz}=0,\\
&z=0,\ \ 0<x<L/2,\ \ 0<y<B:\ \ \sigma_{zz}=0,\ \ \sigma_{xz}=0,\ \ \sigma_{yz}=0,\\
&z=H,\ \ 0<x<L/2,\ \ 0<y<B:\ \ \sigma_{zz}=0,\ \ \sigma_{xz}=0,\ \ \sigma_{yz}=0,\\
&t=0:\ \ u_x=0,\ \ u_y=0,\ \ u_z=0,\ \ \dot{u}_x=0,\ \ \dot{u}_y=0,\ \ \dot{u}_z=0,
\end{aligned}
$$

где t – время, точка над символом означает производную по времени.

Соотношения динамики в напряжениях имеют вид (ρ – плотность материала):

$$
\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2u_y}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}.\ (2)
$$

В качестве физической модели материала принята модель, основанная на теории неизотермического пластического течения для среды с упрочнением и условием текучести Губера - Мизеса в сочетании с гипотезой кратковременной ползучести [8].

Уравнения связи между напряжениями и деформациями в соответствии с этой моделью имеют вид [9]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij} + K\sigma + \varphi, \quad d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda, \tag{3}$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – девиатор тензора напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль сдвига; $K = 3K_1$, $K_1 = (1-2\nu)/(3E)$ – модуль объемного сжатия, связывающий объемное расширение 3ε, среднее напряжение $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ и φ – температурное удлинение в соотношении $\varepsilon = K\sigma + \varphi$ (в данном случае считается, что $\varphi \equiv 0$); ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $d\lambda$ – некоторая скалярная функция, определяемая формой поверхности нагружения. Предполагаем, что эта скалярная функция является квадратичной функцией компонент девиатора напряжений s_{ij} [8], причем:

$$d\lambda = \left\{ 0 \ \ (f \equiv \sigma_i^2 - \sigma_S^2(T) < 0), \ \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} \ \ (f = 0, \ df = 0) \right\}, \quad d\varepsilon_{zz}^p = -d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p,$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}\right)^2 + \left(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}\right)^2 + 6\left(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2\right)}, \tag{4}$$

$$d\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p\right)^2 + 6\left(\left(d\varepsilon_{xy}^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_{xz}^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_{yz}^p\right)^2\right)},$$

где σ_i, ε_i^p, $d\varepsilon_i^p$ – интенсивность напряжений, пластических деформаций и приращения последних.

Предполагаем, что в результате пластической деформации происходит упрочнение материала по следующей температурной зависимости [10]:

$$\sigma_S(T) = \sigma_{02}(T_0)\left(1 + \frac{\kappa(T)}{\varepsilon_0}\right)^{\eta*}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}, \tag{5}$$

где T – температура; $\kappa = \int d\varepsilon_i^p$ – параметр Одквиста; $T_0 = 20^\circ C$, $\eta*$ – коэффициент упрочнения; $\sigma_S(T)$ - предел текучести после упрочнения материала при температуре T.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Пусть нестационарное взаимодействие исследуется на промежутке времени $[0, \ t_*]$.

Как и в [1–7] для численного интегрирования по времени использовалась квадратурная формула Грегори с равноотстоящими узлами порядка $m_1 = 3$ с коэффициентами D_n [11] при равномерной дискретизации по времени с узлами $t_k = k\Delta t \in [0, t_*]$ $(k = \overline{0, \mathrm{K}})$. Применялся метод конечных разностей при переменном шаге разбиения вдоль осей *Ox* (N_1 элементов), *Oy* (N_2 элементов) и *Oz* (N_3 элементов). Проводя такие же самые выкладки, как и в [4–7], получим выражения для напряжений и приращений деформаций.

Для учета физической нелинейности, содержащейся в зависимостях (4), применяется метод последовательных приближений, который дает возможность нелинейную задачу свести к последовательности линейных задач [1–7, 10]:

$$\psi^{(n+1)} = \left\{ \psi^{(n)} p + \frac{1-p}{2G} \ (Q_i < -Q); \ \psi^{(n)} \ (|Q_i| < Q); \ \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_S(T)} \ (Q_i > Q) \right\}, \tag{6}$$

$$Q_i = \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(T), \quad \psi = 1/(2G) + \Delta\lambda.$$

(Q–величина наибольшего отклонения интенсивности напряжений от предела текучести, параметр p выбирается из интервала [0; 1] из соображений сходимости).

Независимым параметром, характеризующим процесс нагружения, есть время t (его дискретный аналог). Поскольку в механике разрушения вязкость разрушения (трещиностойкость) в большинстве случаев получают в квазистатических экспериментах и сопоставляют ее с предельным значением коэффициента интенсивности напряжений (КИН) K_{I}^{e}, полученным из упругого решения, то для описания изменения отдельных характеристик в роли независимого параметра (переменной) выберем приближенное значение КИН K_{I}^{e} (ниже будем называть его упругим КИН) для упругой задачи трехточечного изгиба балки с центральной трещиной [12]:

$$K_{\mathrm{I}}^{e} = 12F \frac{\sqrt{l}}{BH} \left(1,93 - 3,07 \frac{l}{B} + 14,53 \left(\frac{l}{B} \right)^2 - 25,11 \left(\frac{l}{B} \right)^3 + 25,8 \left(\frac{l}{B} \right)^4 \right), \tag{7}$$

где $F = 2APH$ – контактная сила ($P = p_{01} + p_{02}k$); $4B$ – расстояние между опорами.

Для расчетов были выбраны реакторная сталь 15Х2НМФА, титан, алюминий и серебро.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ АНАЛИЗ

Шаг между точками разбиения был наименьшим в области вершины трещины и на границах расчетной области. Характерный размер ячеек на удалении не более 1 мм от вершины трещины равен среднему размеру зерна металла (0,05 мм). Использование метода конечных разностей обосновывается в [13], причем обеспечивается точность расчетов с погрешностью не больше чем $O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta t)^2)$.

Таблица 1
Отношение модулей сдвига и объемного сжатия

Металл	G_K=G/K
Сталь	0,535714
Титан	0,409091
Аллюминий	0,358209
Серебро	0,284672

На рис. 2, 3 приведены результаты расчетов для брусков длиной L=60 мм, высотой B=10 мм и шириной H=50 мм, с начальной глубиной пропила в центре образца l=3 мм и коэффициентом упрочнения $\eta^* = 0,05$. Расстояние между опорными точками составляло 40 мм. Шаг по времени $\Delta t = 0,0005$ с. Половина длины зоны контакта составляла A=2,5 мм; N_1=22; N_2=22; N_3=21; коэффициенты $p_{01} = 8$ МПа; $p_{02} = 10$ МПа; температура T=50°.

Учет разгрузки материала происходил по такому алгоритму. Если в какой-нибудь ячейке абсолютное значение напряжения ставало меньшим, чем уже достигнутое там максимальное значение, тогда считалось, что пластические деформации прекращают увеличиваться, материал перестает упрочняться и возобновляется линейная зависимость напряжений от деформаций. Пластические деформации снова начинали увеличиваться и упрочнение материала продолжалось, когда абсолютное значение напряжений превышало ранее достигнутое максимальное значение.

На рис. 2 приведены графики средних напряжений σ трехмерного образца в плоскости $z = 41,3$ мм: сплошная, сплошная с квадратом, штриховая с треугольником и штриховая линии соответствуют реакторной стали, титану, алюминию и серебру. Пока упругий КИН не достиг значения $K_{\mathrm{I}}^{e} = K_{\mathrm{I}*}^{e} = 72,3$ МПа$\sqrt{\text{м}}$, средние напряжения σ тем больше, чем меньше коэффициент G_K. Когда упругий КИН превышает значения $K_{\mathrm{I}*}^{e}$, средние напряжения начинают осциллировать.

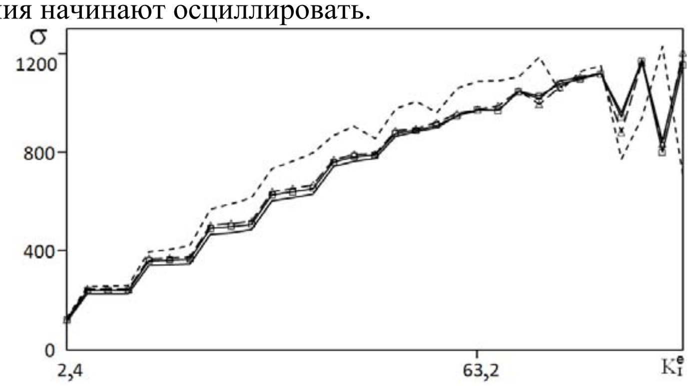

Рис.2. Средние напряжения

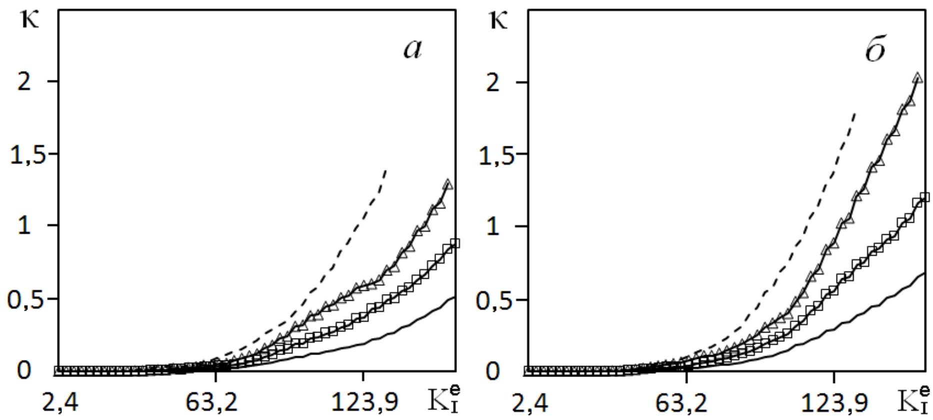

Рис. 3. Параметр Одквиста в зоне вершины трещины в плоскости:
а). $z = 41,3$ мм, б). $z = 49,88$ мм

В случае, когда $z = 49,88$ мм, осцилляции начинаются, когда упругий КИН достигает значения $K_{\mathrm{I}}^{e} = 54$ МПа$\sqrt{\text{м}}$, средние напряжения σ при этом на 23 % меньше, чем в плоскости $z = 41,3$ мм. На рис. 3 приведены графики параметра Одквиста, характеризующего накопленную в элементе перед острием трещины пластическую деформацию в случае реакторной стали, титана, алюминия и серебра (соответственно сплошная, сплошная с квадратом, сплошная с треугольником и пунктирная линии). Чем меньше параметр G_K, тем больше параметр Одквиста, а, значит, и пластические деформации.

Сравнивая рис. 3а и 3б, видим, что пластические деформации больше в сечениях $z = 49,88$ мм и $z = 0,12$ мм, расположенных ближе к боковым поверхностям компактного образца.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе решения пространственной задачи накопления пластических деформаций в компактном образце для определения вязкости разрушения при трехточечном изгибе в динамической упругопластической постановке с учетом процесса разгрузки материала показано, что чем меньше отношение модулей сдвига и объемного сжатия, тем больше пластические деформации. Причем пластические деформации больше в сечениях, расположенных непосредственно под боковыми поверхностями компактного образца.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богданов В. Р.* Моделювання накопичення пластичних деформацій на основі числового розв'язування плоскої задачі із урахуванням процесу розвантаження матеріалу // Вісник Київського нац. ун-ту. Серія фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 85–88.
2. *Богданов В. Р., Сулим Г. Т.* Плоская деформация упругопластического материала с профилем формы компактного образца (динамическое нагружение) // Известия РАН: Механика твердого тела, Москва, 2013, № 3. – С. 111–120.
3. *Богданов В. Р., Сулим Г. Т.* Моделирование роста пластических деформаций при ударе на основе численного решения задачи плоского напряженного состояния // Вестник МАИ, Москва. – 2013. – т. 20. – № 3. – С. 196–201.
4. *Богданов В. Р., Сулим Г. Т.* Моделювання руху тріщини у компактному зразку на основі числового розв'язування просторової задачі // Зб. наукових праць «Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла», Дніпропетровськ . – 2012. – № 13. – С. 60–68.
5. *Богданов В. Р., Сулым Г. Т.* Просторове моделювання процесу підростання тріщини на основі числового розв'язування // Зб. наукових праць «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій», Дніпропетровськ. – 2012. – № 19. – С. 10–19.
6. *Богданов В. Р., Сулим Г. Т.* Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Международный научно-технический сборник «Надежность и долговечность машин и сооружений». – 2010. – № 33. – С. 153–166.
7. *Богданов В. Р.* Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісник Київського національного ун-ту. Серія фіз.-мат. науки. – 2009. – № 9. – С. 45–50.
8. *Теория* пластичности: Сборник статей. – М.: ИЛ, 1948. – 460 с.
9. *Аркулис Г. Э., Дорогобид В. Г.* Теория пластичности. – М.: Металлургия, 1987. – 352 с.
10. *Махненко В. И.* Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – К.: Наук. думка, 1976. – 320 с.
11. *Хемминг Р. В.* Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 399 с.
12. *Саврук М. П.* Механика разрушения и прочность материалов: В – Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.
13. *Зюкина Е. Л.* Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного волнового уравнения.// Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, – Казань, – т.26. – 2004 – С. 151–160.