МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ПУАССОНОВСКИХ СПЕКТРОВ

О. В. ГАРМАШ

Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев

Разработаны теоретически обоснованные методы нахождения пуассоновской спектральной функции, которые позволяют практически применять метод пуассоновских спектров для исследования законов распределения акустических флуктуационных процессов и их линейных преобразований.

ВВЕДЕНИЕ

Акустические флуктуационные процессы возникают в результате естественного функционирования разнообразных технических, физических или биологических объектов вследствие различных физических явлений – гидродинамических, механических и др.

К акустическим флуктуационным процессам, которые являются результатом наложения импульсов со случайными параметрами [1, 2], относятся сигналы акустической эмиссии, шумы кавитации, сигналы утечки жидкости в трубопроводах, виброакустические шумы, биомедицинские шумы и др.[3–5]. В общем случае, для их описания применяют модель линейных случайных процессов [2, 6]

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\,d\eta(\tau), \tag{1}$$

у которого порождающий процесс $\eta(\tau)$ является стохастически непрерывным случайным процессом с независимыми приращениями, а неслучайная функция $h(t,\tau)$ называется ядром процессов (1) и характеризует форму элементарного импульса.

Важной особенностью линейных случайных процессов является их замкнутость относительно линейных преобразований, что позволяет применять единый подход, как при анализе самих процессов, так и их линейных преобразований.

Законы распределения процессов (1) являются безгранично делимыми, и исследуются в рамках характеристических функций, которые в этом случае могут быть представлены в одной из канонических форм

$$f_{\xi}(u,t)=\exp\left\{ium_{\xi}(t)+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iux}-1-iux\right)x^{-2}dK_{\xi}(x,t)\right\}, \tag{2}$$

где $m_{\xi}(t)=\mathbf{M}\{\xi(t)\}$, $K_{\xi}(x,t)$ – пуассоновская спектральная функция. Параметры $\{m_{\xi}(t),K_{\xi}(x,t)\}$ однозначно определяют характеристическую функцию (2).

Для нахождения и исследования законов распределения акустических флуктуационных процессов и их линейных преобразований применяют метод пуассоновских спектров [2], основанный на каноническом представлении (2). Пуассоновская спектральная функция процессов (1) равна

$$K_{\xi}(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K_{h}(x,y,t)\,dK_{\eta}(y), \tag{3}$$

где $K_\eta(y)$ – пуассоновская спектральная функция порождающего процесса $\eta(\tau)$, $K_h(x,y,t)$ – ядро преобразования, равное

$$K_h(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t,\tau) E\left[x - yh(t,\tau)\right] d\tau\,, \tag{4}$$

где $E(t)$ – функция Хевисайда.

Анализ известных работ показал, что для практического применения метода пуассоновских спектров требуется его дальнейшее развитие. Потому актуальной является задача разработки теоретически обоснованных методов нахождения пуассоновской спектральной функции, которые позволят практически применять метод пуассоновских спектров для исследования законов распределения акустических флуктуационных процессов и их линейных преобразований.

1. ИССЛЕДОВАНИЯ ПУАССОНОВСКОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Исследования физического смысла пуассоновской спектральной функции показали, что задача нахождения ядра преобразования (4) сводится к нахождению амплитудного распределения энергии $W_A(x)$ одиночного импульса $h(t)$ по формуле

$$W_A(x) = \int_{h(t)<x} h^2(t)\,dt \tag{5}$$

и использованию затем выражения

$$K_h(x,y) = \begin{cases} K_h\left(\dfrac{x}{y},1\right) = W_A\left(\dfrac{x}{y}\right), & y>0; \\[2ex] W - K_h\left(\dfrac{x}{y},1\right) = W - W_A\left(\dfrac{x}{y}\right), & y<0, \end{cases}$$

где $W = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\,dt$ – полная энергия импульса $h(t)$.

Анализ свойств амплитудного распределения энергии (5) импульсных процессов, позволил установить новые свойства ядра преобразования (4), в частности, условие его непрерывности.

В результате исследований аналитических свойств пуассоновской спектральной функции, установлены условия ее точного нахождения. Кроме того установлен важный для приложения вывод, о том, что пуассоновская спектральная функция является непрерывной, если хотя бы одна из функций $K_h(x,y)$ или $K_\eta(y)$ будет непрерывной, что позволяет утверждать о существовании пуассоновской спектральной плотности $k_\xi(x) = K_\xi'(x)$.

Метод пуассоновских спектров применен для исследования ошибки гауссовской аппроксимации на примере пуассоновской последовательности прямоугольных импульсов. Полученные выражения для нормированной пуассоновской спектральной плотности $\mathring{k}_\xi(x)$ и плотности вероятностей $p_{\xi\text{ст}}(x)$ пуассоновской последовательности прямоугольных импульсов равны

$$\mathring{k}_\xi(x) = \sqrt{2(\lambda\tau_0)^3}\, x^2 e^{-\sqrt{2\lambda\tau_0}x} E(x),$$

$$p_{\xi\text{ст}}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda\tau_0)^k\,\beta\left(x\sqrt{2\lambda\tau_0}+\lambda\tau_0\right)^{k-1}}{k!(k-1)!}e^{-x\sqrt{2\lambda\tau_0}-2\lambda\tau_0}E\left(\frac{x\sqrt{2\lambda\tau_0}}{\beta}-\frac{\lambda\tau_0}{\beta}\right).$$

Ошибки гауссовской аппроксимации оценим с помощью равномерной $\Delta_\text{г}(x)$ и интегральной $\delta_\text{г}$ метрик, где индекс «г» соответствует гауссовскому распределению

$$\Delta_\text{г}(x)=\left|p_{\xi\text{ст}}(x)-p_\text{г}(x)\right|, \quad \delta_\text{г}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|p_{\xi\text{ст}}(x)-p_\text{г}(x)\right|dx.$$

Расстояние между произвольной $\overset{\circ}{K}_\xi(x)$ и гауссовской $\overset{\circ}{K}_\text{г}(x)$ пуассоновскими спектральными функциями выражается через коэффициент асимметрии, т. е.

$$d\left(\overset{\circ}{K}_\text{г},\overset{\circ}{K}_\xi\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|E(x)-\overset{\circ}{K}_\xi(x)\right|dx=\gamma_3.$$

В табл. 1. приведены значения ошибок гауссовской аппроксимации нормированной плотности вероятностей и пуассоновской спектральной функции для различного соотношения $\lambda\tau_0$.

Табл. 1

$\lambda\tau_0$	5	10	50	100
$\max\Delta_\text{г}(x)$	0,124	0,076	0,03	0,021
$\delta_\text{г}$	0,275	0,177	0,075	0,053
γ_3	0,949	0,67	0,3	0,212

Анализ результатов табл. 1 показывает, что наибольшую чувствительность (на порядок) к отличию закона распределения от гауссовского имеет метрика пуассоновских спектральных функций.

2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ПУАССОНОВСКОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Из полученных результатов исследования пуассоновской спектральной функции (3) с ядром преобразования (4) следует, что нахождение их аналитических выражений сопряжено со следующими проблемами: в общем случае не вычисляется интеграл (4), если не существует обратная функция от $h(t)$; в случае существования обратной функции от $h(t)$, возникают проблемы вычисления интеграла (3). Таким образом, для нахождения в этих случаях пуассоновской спектральной функции (плотности), необходимо применять приближенные методы.

Численное нахождение пуассоновской спектральной плотности. Задача численного нахождения пуассоновской спектральной плотности может быть решена на основе аппроксимации линейного случайного процесса $\xi(t)$ процессом $\xi_N(t)$

$$\xi(t)=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\xi_N(t), \tag{6}$$

что следует из определения стохастического интеграла (1). Представление стационарного линейного случайного процесса в виде (6) можно осуществить несколькими способами, например,

$$\xi(t) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\infty}^{\infty} h_N(t-\tau)\,d\eta(\tau). \tag{7}$$

С учетом представления (7) и установленных свойств пуассоновской спектральной функции, а также на основании результатов работы [7], получена формула прямоугольников, которая базируется на кусочно-постоянной аппроксимации ядра линейного случайного процесса и имеет вид

$$k_\xi(x)_N = \sum_{i=0}^{N-1} |a_i|\,\Delta\tau_i k_\eta\left(\frac{x}{|a_i|}\right), \quad a_i \neq 0, \tag{8}$$

где $a_i, \tau_{0i}, \Delta\tau_i$ – параметры аппроксимации, $k_\eta(y)$ – пуассоновская спектральная плотность порождающего процесса.

Относительные ошибки приближения случайного процесса $\delta_\xi(N)$ и нормированной пуассоновской спектральной плотности $\delta_k(N)$ в зависимости от числа N определены выражениями

$$\delta_k(N) = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\overset{\circ}{k}_\xi(x) - \overset{\circ}{k}_{\xi_N}(x)\right| dx}, \quad \delta_\xi(N) = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)-h_N(t)\right|^2 dt\right) \Big/ \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)\right|^2 dt\right)}. \tag{9}$$

Таким образом, применение формулы (8) позволяет находить пуассоновскую спектральную плотность для произвольных ядер линейных случайных процессов, с наперед заданной точностью.

Аппроксимативное нахождение пуассоновской спектральной функции $K_\xi(x)$ линейных случайных процессов (1) с заданным ядром $h(t)$ и пуассоновской спектральной функцией $K_\eta(y)$ порождающего процесса $\eta(t)$ может быть реализовано на основе существования пуассоновской спектральной плотности $k_\xi(x)$. Так, в работе [8] определено семейство пирсоновских пуассоновских спектральных плотностей, которое состоит из 13 четырехпараметрических функций $k_\Pi(x) = k_\Pi(x; a_0, b_0, b_1, b_2)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{dk_\Pi(x)}{dx} = \frac{a_0 + x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} k_\Pi(x),$$

где a_0, b_0, b_1, b_2 – некоторые действительные числа.

Разработан метод аппроксимации пуассоновской спектральной плотности с помощью пирсоновского семейства, который основан на использовании начальных ν_s и центральных ρ_s пуассоновских спектральных моментах, определенных и исследованных в работе [9].

Метод статистического нахождения пуассоновской спектральной плотности. Для статистического нахождения пуассоновской спектральной плотности предложен метод, основанный на пирсоновской аппроксимации и оценках первых шести кумулянтных коэффициентов. Общая методика статистического нахождения пуассоновской спектральной плотности следующая:

1. Находим оценки центральных моментов $\overline{\mu}_s$.
2. Находим оценки кумулянтных коэффициентов $\overline{\gamma}_s$.

3. Вычисляем оценки пуассоновских спектральных моментов $\overline{\nu_1}$, $\overline{\rho_s}, s=\overline{2,4}$.
4. Получаем оценки коэффициентов $\overline{A_0}$, $\overline{B_0}$, $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$ уравнения Пирсона.
5. Находим оценку пирсоновской пуассоновской спектральной плотности $\overline{\overset{\circ}{k}_{\Pi}}(x)$.
6. Получаем оценку пуассоновской спектральной плотности $\overline{k_\xi}(x)=\overline{\kappa_2}\,\overline{\overset{\circ}{k}_{\Pi}}\left(x-\overline{\nu_1}\right)$.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПУАССОНОВСКОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ СИГНАЛОВ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ

Рассмотрим линейный случайный процесс (1), ядро которого удовлетворяет условию $h(t,\tau)=h(t-\tau)$ и имеет вида

$$h(t)=Ae^{-t/\tau_0}E(t),\quad A>0,\tau_0>0. \tag{10}$$

Акустический флуктуационный процесс, форма импульсов которых описывается выражением (10) – сигналы акустической эмиссии [3, 4].

Для применения численного метода нахождения пуассоновской спектральной плотности перейдем от формулы (10) к виду

$$h_\varepsilon(t)=Ae^{-t/\tau_0}E(t)E(t_\varepsilon-t). \tag{11}$$

где t_ε выбираем из условия $\lim\limits_{t_\varepsilon\to\infty}h(t_\varepsilon)=0$.

Пуассоновская спектральная плотность в этом случае при условии показательного закона распределения порождающего процесса с параметром β, равна

$$k_{\xi_N}(x)=\frac{2\lambda t_\varepsilon\beta}{AN}\left[1+e^{-\frac{t_\varepsilon}{\tau_0 N}}\right]^{-1}x^2E(x)\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left\{\frac{kt_\varepsilon}{\tau_0 N}-\frac{2\beta}{A}e^{\frac{kt_\varepsilon}{\tau_0 N}}\left(1+e^{-\frac{t_\varepsilon}{\tau_0 N}}\right)^{-1}x\right\}.$$

Относительные ошибки приближения случайного процесса $\delta_\xi(N)$ и нормированной пуассоновской спектральной плотности $\delta_k(N)$ определены выражениями (9) и равны (табл. 2)

Таблица 2

N		10	20	30	40
$\lambda\tau_0=5$	$\delta_\xi(N)$	0,144	0,072	0,049	0,037
	$\delta_k(N)$	0,118	0,059	0,040	0,030

Пуассоновская спектральная плотность процессов (1) с ядром (10), полученная в результате пирсоновской аппроксимации, имеет вид

$$k_\xi(x)=\lambda\tau_0 xe^{-\frac{\beta}{A}x}E(x) \tag{12}$$

и соответствует гамма-распределению.

Выражение (12) совпало с результатами работы [10], где данная характеристика найдена непосредственно с применением формул (3) и (4).

Для реализации статистического метода нахождения пуассоновской спектральной плотности сигналов акустической эмиссии, проведено математическое моделирование с помощью программной среды Matlab 6.5. Смоделированы ансамбли из 50 реализаций

$\xi_i(t)$, $i=\overline{1,50}$ сигналов акустической эмиссии, объем выборки для каждой реализации составляет 10^5 отсчетов. В результате статистической оценки пуассоновской спектральной плотности относительные ошибки оценивания кумулянт $\kappa_s, s=\overline{1,6}$, кумулянтных коэффициентов $\gamma_s, s=\overline{3,6}$, пуассоновских моментов $\rho_s, s=\overline{2,4}$ и параметров дифференциального уравнения Пирсона D, A_0, B_0, B_1, B_2 не превысили 7%, в то время как относительная ошибка оценивания пуассоновской спектральной плотности по формуле (9) при замене $k_{\xi N}(x)$ на $\overline{k}_{\xi}(x)$ составила $\delta_k=0,0345$ (3,45%).

ВЫВОДЫ

Разработанные в работе методы и методики позволяют практически применять метод пуассоновских спектров для исследования законов распределения акустических флуктуационных процессов и их линейных преобразований, что показано на примере моделирования сигналов акустической эмиссии. Ошибки приближения пуассоновских спектральных плотностей сигналов акустической эмиссии по сравнению с результатами, полученными при непосредственном расчете, не превысили 5 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
2. *Горовецкая Т. А., Красильников А. И., Чан Х. Д.*. Модели и законы распределения флуктуационных сигналов // Электроника и связь. – № 9. – 2000. – С. 5–14.
3. *Буйло С. И.* Физико-механические и статистические аспекты акустико-эмиссионной диагностики предразрушающего состояния: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.07, 01.02.04; защищена 29.06.10. – Ростов-на-Дону, 2010. – 279 с.
4. *Технические* средства диагностирования: справочник / В.В. Клюев, П. П. Пархоменко, В.Е. Абрамчук и др., под общ. ред. В.В. Клюева. – М.: Машиностроение, 1989. – 672 с.
5. *Левковский Ю. Л.* Структура кавитационных течений. – Л.: Судостроение, 1978. – 224 с.
6. *Марченко Б. Г.* Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. – К.: Наук. думка, 1973. – 192 с.
7. *Красильников А. И., Савчук О. Ю.* Формула прямоугольников для численного нахождения пуассоновской спектральной функции флуктуационных сигналов // Электроника и связь. – 2002. – № 17. – С. 83–88.
8. Гармаш *О. В., Красильников А. И.* Применение функций Пирсона для аппроксимации пуассоновской спектральной плотности Колмогорова линейных случайных процессов // Електроніка та системи управління. – 2011. – № 3 (29). – С. 28–35.
9. *Красильников А. И.* Пуассоновские моменты безгранично делимых распределений // Электроника и связь. – 2002. – № 15. – С. 84–88.
10. *Горовецкая Т. А., Красильников А. И., Тимофеенко Б. В.* Вероятностные характеристики кавитационного шума // Электроника и связь. – 2001. – № 11. – С. 91–94.