БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ МОДЕЛИ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В АКУСТИЧЕСКИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

А. И. КРАСИЛЬНИКОВ

Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев

Рассмотрены основные конструктивные модели акустических флуктуационных процессов, отражающие физику их возникновения и имеющие безгранично делимые распределения. Приведены формулы для нахождения параметров канонического представления характеристических функций безгранично делимых моделей акустических флуктуационных процессов

ВВЕДЕНИЕ

Источниками информации в пассивных акустических системах являются флуктуационные процессы, возникающие в результате естественного функционирования исследуемых физических или технических объектов. К флуктуационным процессам, которые являются результатом наложения импульсов со случайными параметрами, относятся шумы, возникающие при рассеивании на неоднородностях среды, сигналы акустической эмиссии, шумы кавитации, виброакустические шумы, биомедицинские шумы и др.

В качестве основных информативных характеристик флуктуационных процессов в настоящее время используются корреляционные и спектральные функции, поскольку распределение их мгновенных значений обычно считается гауссовским. Анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований показал, что распределение флуктуационных процессов может существенно отличаться от гауссовского и согласно современной теории суммирования независимых случайных величин относится к классу безгранично делимых законов распределения, частным случаем которого является гауссовское распределение.

В данной работе рассмотрены основные безгранично делимые модели акустических флуктуационных процессов и приведены формулы для нахождения параметров канонического представления их характеристических функций.

1. БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1 [1, 2]**.** Функция распределения $F(x)$ и соответствующая ей характеристическая функция (ХФ) $f(u)$ называются безгранично делимыми, если для любого положительного целого числа n существует такая ХФ $f_n(u)$, что

$$f(u) = \left[f_n(u)\right]^n .$$

К безгранично делимым относятся вырожденное, нормальное распределения, гамма–распределение, распределения Пуассона и Коши. Отметим основные свойства безгранично делимых ХФ [1, 2].

Теорема 1. Безгранично делимая ХФ не имеет нулей на действительной оси.

Критерием безграничной делимости ХФ являются следующие теоремы.

Теорема 2. ХФ является безгранично делимой тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$f(u) = \lim_{m \to \infty} \exp\{p_m [g_m(u) - 1]\}, \tag{1}$$

где p_m – положительные числа, а $g_m(u)$ – некоторые ХФ.

Теорема 3. Предел последовательности произведений конечного числа ХФ пуассоновского типа (1) безгранично делим.

Полное описание класса безгранично делимых законов распределения дается каноническими представлениями их ХФ – Колмогорова, Леви и Леви–Хинчина, которые связаны между собой взаимно однозначно.

Теорема 4. *Каноническое представление А.Н. Колмогорова.* Для того чтобы функция $f(u)$ была ХФ безгранично делимого распределения с конечным вторым моментом, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(u) = \exp\left[ium + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - iux\right) x^{-2}\, dK(x) \right],$$

где $m = \mathbf{M}[\xi]$ – действительное число, $\mathbf{M}$ – оператор математического ожидания, а $K(x)$ – пуассоновская спектральная функция, которая является неубывающей непрерывной слева функцией, причем $K(-\infty) = 0$, $K(\infty) = \mathbf{D}[\xi] = \sigma^2$. Соответствие между $f(u)$ и парой $\{m, K(x)\}$ взаимно однозначное.

Теорема 5. Класс предельных законов распределения для сумм независимых случайных величин совпадает с классом безгранично делимых распределений.

При исследовании безгранично делимых распределений удобно использовать кумулянтные коэффициенты, которые равны

$$\gamma_s = \sigma^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{s-2}\, dK(\sigma x), \quad s \geq 2 .$$

Для безгранично делимых распределений нахождение функции распределения является в общем случае неразрешимой задачей, за исключением некоторых частных случаев – гауссовского, Коши, гамма, Пуассона. В связи с этим для исследования безгранично делимых распределений целесообразно использовать параметры канонического представления $\{m, K(x)\}$ их ХФ.

.

2. МОДЕЛИ АКУСТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Определение 2. Случайный процесс $\xi(t)$ с конечной дисперсией называется безгранично делимым, если его ХФ может быть представлена в следующем виде:

$$f_\xi(u,t) = \exp\left\{ ium_\xi(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - iux\right) x^{-2}\, dK_\xi(x,t) \right\}, \tag{2}$$

где $m_\xi(t) = \mathbf{M}[\xi(t)]$, а $K_\xi(x,t)$ – пуассоновская спектральная функция, которая является непрерывной слева неубывающей по x при каждом t функцией, причем $K_\xi(-\infty, t) = 0$, $K_\xi(\infty, t) = \mathbf{D}[\xi(t)]$.

Для практического применения моделей безгранично делимых случайных процессов необходимо уметь находить параметры $\{m_\xi(t), K_\xi(x,t)\}$ представления ХФ (2). Рассмотрим основные безгранично делимые модели акустических флуктуационных процессов, построение которых основано на ряде физических и математических предположений.

1. Процессы Бунимовича-Райса [3, 4]. Наиболее распространенной моделью флуктуационных процессов являются процессы Бунимовича-Райса:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\nu_t} \eta_k \, h(t - t_k). \tag{3}$$

В формуле (3) ν_t – однородный процесс Пуассона с интенсивностью λ; моменты возникновения импульсов t_k являются однородным пуассоновским потоком событий; неслучайная функция $h(t)$ описывает форму элементарных импульсов; амплитуды импульсов η_k – независимые случайные величины, которые не зависят от t_k и имеют одинаковые функции распределения $F_\eta(y)$.

Процессы (3) стационарны в узком смысле, являются безгранично делимыми [5], параметры канонического представления их ХФ равны:

$$m_\xi = \lambda \, m_\eta \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt \,,$$

$$K_\xi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K_h(x,y)\, dF_\eta(y)\,,$$

$$K_h(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\, E[x - y\, h(t)]\, dt\,,$$

где $E(t)$ – единичная функция.

Модель (3) нашла широкое применение в радиофизике, статистической радиотехнике, электронике, в исследованиях ферромагнетизма, акустической эмиссии, кавитационного шума, морской реверберации, биомедицинских сигналов.

2. Пуассоновские импульсные процессы [6]. Одним из обобщений процессов Бунимовича–Райса являются пуассоновские импульсные случайные процессы

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\nu_t} h(t, t_k, \boldsymbol{\eta}_k)\,, \tag{4}$$

где ν_t – неоднородный процесс Пуассона с математическим ожиданием $\Lambda(t)$; t_k – моменты возникновения импульсов, $t_k \in [0, \infty)$; $h(t, \tau, \boldsymbol{\eta})$ – детерминированная функция переменных t и τ, $t \in (-\infty; \infty)$, $\tau \in (-\infty; \infty)$, зависящая от вектора случайных параметров $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots \eta_n)$; $\boldsymbol{\eta}_k$ – последовательность независимых n-мерных одинаково распределенных случайных векторов, не зависящих от t_k.

Процессы (4) являются безгранично делимыми [7], параметры канонического представления их ХФ равны:

$$m_\xi(t) = \int_0^{\infty} \lambda(\tau) \mathbf{M}\{h(t, \tau, \boldsymbol{\eta})\}\, d\tau\,,$$

$$K_\xi(x,t) = \int_{R_n} K_h(x, \mathbf{y}, t)\, dF_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{y})\,,$$

$$K_h(x,\mathbf{y},t)=\int_0^\infty h^2(t,\tau,\mathbf{y})E[x-h(t,\tau,\mathbf{y})]\lambda(\tau)\,d\tau,$$

где $\lambda(\tau)\geq 0$ – интенсивность процесса v_t, $\lambda(\tau)=\Lambda'(\tau)$; $\boldsymbol{\eta}$ – случайный вектор, имеющий такое же распределение, что и $\boldsymbol{\eta}_k$ в формуле (4); $F_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$, – функция распределения случайного вектора $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\ldots\eta_n)$.

Практическое использование модели пуассоновских импульсных процессов наталкивается на вычислительные трудности даже при нахождении математического ожидания, поэтому известны лишь некоторые случаи использования упрощенных вариантов модели (4).

3. Линейные случайные процессы [8, 9]. Другим обобщением модели Бунимовича–Райса являются линейные случайные процессы

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)\,d\eta(\tau), \tag{5}$$

у которых ядро $h(t,\tau)$ – неслучайная функция, которая удовлетворяет условию $h(t,\tau)\in L_2(-\infty,\infty)$, а порождающий процесс $\eta(\tau)$ – стохастически непрерывный однородный случайный процесс с независимыми приращениями.

Если выполняется условие $h(t,\tau)=h(t-\tau)$, то линейные случайные процессы являются стационарными в узком смысле. Процессы (5) являются безгранично делимыми [10], параметры канонического представления их ХФ равны:

$$m_\xi(t)=m_\eta\int_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)d\tau,$$

$$K_\xi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K_h(x,y,t)dK_\eta(y),$$

$$K_h(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t,\tau)E[x-y\,h(t,\tau)]\,d\tau.$$

где $K_\eta(y)$ – пуассоновская спектральная функция порождающего процесса.

Модель (5) использовалась при исследованиях гидроакустических шумов, кавитационного шума, сигналов акустической эмиссии, виброакустических шумов подшипников, биомедицинских сигналов. Отметим некоторые свойства пуассоновской спектральной функции линейных случайных процессов [11, 12].

Свойство 1. Линейный случайный процесс является гауссовским тогда и только тогда, когда порождающий процесс $\eta(\tau)$ является гауссовским.

Свойство 2. Если пуассоновская спектральная функция $K_\eta(y)$ порождающего процесса непрерывна в точке $y=0$, то линейный случайный процесс не содержит гауссовской составляющей.

Свойство 3. Если порождающим является процесс Пуассона с параметром λ, то

$$K_\xi(x,t)=\lambda\,K_h(x,1,t)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t,\tau)E[x-h(t,\tau)]d\tau.$$

Свойство 4. Если процесс (5) является стационарным с ядром $h(t)$, то

$$K_h(x,y,t)=K_h(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)E[x-y\,h(t)]\,dt.$$

Свойство 5. Если ядро $h(t)$ является строго монотонной функцией, то

$$K_h(x,y)=\int_{x_1}^{x_2} z^2 \left| \left[h^{-1}(z)\right]' \right| E(x-yz)\,dz,$$

где $x_1 = \inf[h(t)]$; $x_2 = \sup[h(t)]$; $h^{-1}(z)$ – функция, обратная к $h(t)$.

3. ПУАССОНОВСКАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ШУМА КАВИТАЦИИ

Кавитационный шум является источником информации в системах акустического контроля и диагностики некоторых элементов теплоэнергетического оборудования [13]. В частности, для акустического контактного течеискания основную роль играет кавитационный режим течения жидкости из течи, который сопровождается мощными шумами кавитации, превышающими на порядок все остальные шумы.

В работе [14] для описания шумов кавитации предложена модель линейных случайных процессов (5) с экспоненциальным ядром

$$h(t) = p_m \exp(-t/\tau_0) E(t),$$

где величина p_m пропорциональна статическому давлению, а постоянная τ_0 принимает значения в пределах $10^{-8} - 10^{-5}$ с, $E(t)$ – единичная функция.

В этом случае пуассоновская спектральная функция шума кавитации равна [14]

$$K_\xi(x) = \frac{p_m^{\,2}\tau_0}{2}\left[K_\eta\left(\frac{x}{p_m}\right) - \left(\frac{x}{p_m}\right)^2 L_\eta\left(\frac{x}{p_m}\right)\right],$$

где $L_\eta(x)$ – пуассоновская спектральная функция Леви порождающего процесса.

Кумулянтные коэффициенты кавитационного шума равны

$$\gamma_s = \frac{2^{\frac{s}{2}}}{s}\tau_0^{1-\frac{s}{2}}\gamma_s(\eta),$$

где $\gamma_s(\eta)$ – кумулянтные коэффициенты порождающего процесса, содержащие информацию о среднем числе кавитирующих пузырьков и их радиусах.

Упрощенной моделью шумов кавитации являются процессы Бунимовича-Райса (3). Если в этой модели амплитуды η_k имеют показательное распределение с параметром β, то пуассоновская спектральная функция и кумулянтные коэффициенты равны

$$K_\xi(x) = \lambda\,\tau_0 \int_0^x z\, e^{-\frac{\beta}{p_m}z}\, dz, \qquad \gamma_s = (s-1)!\left(\lambda\tau_0\right)^{1-\frac{s}{2}}.$$

В таблице приведены значения коэффициентов асимметрии γ_3 и эксцесса γ_4 кавитационного шума для различных значений параметра λ ($\tau_0 = 10^{-6}$).

Таблица

$\lambda \cdot 10^{-6}$	0,01	0,1	1	10	100
γ_3	20	6,325	2	0,632	0,2
γ_4	600	60	6	0,6	0,006

Из представленной таблицы видно, что даже при интенсивности импульсов $\lambda \geq 10^7$ закон распределения кавитационного шума существенно отличается от гауссовского.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для описания акустических флуктуационных процессов целесообразно применять модели безгранично делимых случайных процессов. В настоящее время наиболее полной моделью являются линейные случайные процессы, вероятностные характеристики которых достаточно хорошо изучены. Использование в качестве информативных характеристик флуктуационных процессов пуассоновских спектральных функций и кумулянтных функций наряду с корреляционно-спектральными функциями позволит расширить возможности акустических информационных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
2. *Лукач Е.* Характеристические функции: Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
3. *Бунимович В. И.* Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. – М.: Сов. радио, 1951. – 360 с.
4. *Rice S. O.* Mathematical analysis of random noise. – Bell Syst. Techn. Journ; 23(3), 1944, P. 282–332; 24(1), 1945, P. 282–332.
5. *Красильников А. И., Горовецкая Т. А.* Каноническое представление характеристической функции импульсного случайного процесса // Вестн. Киев. политехн. ин-та. Электроакустика и звукотехника. – 1984. – Вып.8. – С. 34–37.
6. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
7. *Красильников А. И.* Каноническое представление характеристической функции пуассоновских импульсных процессов // Электроника и связь. – 2005. – № 25. – С. 33–37.
8. *Марченко Б. Г.* Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. – К.: Наук. думка, 1973. – 192 с.
9. *Марченко Б. Г., Щербак Л. Н.* Линейные случайные процессы и их приложения. – К.: Наук. думка, 1975. – 144 с.
10. *Красильников А. И.* Представление одномерной характеристической функции линейных случайных процессов в форме А.Н. Колмогорова, Киев политехн. ин-т – К., 1985. – 15 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 15.10.85, № 2540 Ук-85 Деп.
11. *Красильников А. И.* Особенности вычисления спектральной функции скачков линейных случайных процессов // Вестн. Киев. политехн. ин-та. Электроакустика и звукотехника. – 1987. – Вып. 11. – С. 29–32.
12. *Красильников А. И.* Некоторые свойства пуассоновской спектральной функции Колмогорова линейных случайных процессов // Электроника и связь. – 2005. – № 26. – С. 23–28.
13. *Неразрушающий* контроль: Справочник: В 8 т. / Под общ. ред. В.В. Клюева. Т. 7: В 2 кн. Кн. 1: В.И. Иванов, И.Э. Власов. Метод акустической эмиссии. Кн. 2: Ф.Я. Балицкий, А.В. Барков, Н.А. Баркова и др. Вибродиагностика. – 2-е изд., испр. – М.: Машиностроение, 2006. – 829 с.: ил.
14. *Горовецкая Т. А., Красильников А. И., Тимофеенко Б. В.* Вероятностные характеристики кавитационного шума // Электроника и связь. – 2001.– № 11. – С. 91–94.