К ТЕОРИИ ИЗЛУЧАЮЩИХ ИСТОЧНИКОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ (ПРОБЛЕМА В.Л. ГИНЗБУРГА)

В. С. КРУТИКОВ

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев
E-mail: iipt@iipt.com.ua

Получены точные аналитические решения волнового уравнения в областях с подвижными излучающими границами. Впервые предложены способы получения количественных результатов для обратных (задач управления) и прямых задач определения волновых полей, индуцированных движущейся границей, с поверхности которой происходит излучение среды.

ВВЕДЕНИЕ

Успешная реализация многих технологий на основе волновых импульсных процессов требует обеспечение необходимых, заранее заданных, оптимальных форм функций воздействия: давления P, скорости v частиц, температуры T и т.д. в точке среды или во всем объеме. Однако, зачастую, эксперимент и расчеты энергии и давлений показывают, что для совершения технологического процесса получаемые параметры функций воздействия (P, v, T) с помощью электрического взрыва [1], лазерного импульса [2] и т.д. недостаточны. В этих случаях, одним из возможных способов решения вопроса, может служить использование электродных систем ВЭХВ – высоковольтного электрохимического взрыва. Расчет энергии и давления с использованием электродных систем ВЭХВ связан с разрешением нескольких фундаментальных физических и математических проблем, которые до настоящего времени не нашли своего полного разрешения.

Отмечено, что при ВЭХВ канал разряда выполняет двойную роль. Во-первых, является источником для образования первоначальной волны давления, во-вторых, служит электрозапалом для зажигания экзотермической смеси. Вклад реакции экзотермической смеси в общее количество энергии, выделяющейся в расширяющейся полости (и создающей волны возмущения: волны давления и скорости частиц среды), когда неизвестны ни закон горения смеси (начало, конец и т.д.), ни количество прореагировавшей и оставшейся части, определить с достаточной степенью точности не удается ни экспериментально, ни численными методами. При этом на реакцию (горение) экзотермических добавок большое влияние оказывают такие факторы, например, как волновые поля давления и скорости, температуры, плотность среды, которая при повторных разрядах становится многокомпонентной (это непрореагировавшие части экзотермических добавок, микропузырьки, продукты взаимодействия волн давления с обрабатываемым материалом и т.д.). Оптимальная реакция происходит только при определенных значениях давления: при меньших давлениях она вообще может не происходить, при больших могут происходить нежелательные детонационные явления [3].

В данной работе сделана попытка оценить волновые поля давления и скорости в областях с подвижными излучающими границами, которые генерируются плазменным поршнем электрического разряда, с подвижной поверхности которого происходит излучение, вызванное реакцией экзотермической смеси.

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Как известно, волновое уравнение в теории волн имеет фундаментальное значение. Движение границы в сжимаемой среде является частным более общего случая движения излучающей (проницаемой) границы, когда скорость излучения (проницаемости) равна нулю. При этом для определения волнового поля нельзя решить ни обратную, по заданному закону изменения давления в точке волновой зоны, ни прямую задачу по известному закону изменения радиуса плазменного поршня. Известное определение «физическая проблема» дано в работе [4, стр. 13-16]. К физическим проблемам (по В.Л. Гинзбургу) особой сложности относятся: проблемы подвижных границ (ПГ), которые существенно нелинейны, метод суперпозиции неприменим (Г.А. Гринберг) [5]; подвижных проницаемых границ (ППГ) – более сложные, они были даже не поставлены [6,7]; вопросы управления волновыми процессами, обратные задачи управления некорректны, многозначны (А.Н. Тихонов, М.М. Лавреньтев) [8, стр. 930].

Они существовали и были неразрешимы длительное время с момента создания волнового уравнения (Тейлор Брук). Упомянутая проблематика чрезвычайно интересна, ею занимались выдающиеся физики [4,9]. «Действительно, и другие задачи могут оказаться трудными и очень интересными. Например, задачи, относящиеся к теории излучения источников, движущихся в сжимаемой среде. Мне лично (В.Л. Гинзбургу) этот круг вопросов **очень** дорог и близок, я им занимаюсь в течении всей своей научной жизни» [4, стр. 15]. Физически понятно, в этих задачах много общего с проблемами ПГ, ППГ, вопросами управления волновыми процессами, понятно, что без учета ПГ и ППГ они неразрешимы.

Автор поставил себе задачу учесть влияние того факта, что законы изменения радиуса подвижной границы и скорости частиц среды, соприкасающихся с нею, могут быть произвольны и различны. Подобные задачи в математической физике не рассматривались. Математически это означает, что на подвижной границе, изменяющейся по закону $R(t)$, скорость частиц среды, соприкасающихся с подвижной границей, не равна скорости изменения радиуса ПГ. Такую границу, для случая $v\big(R(t),t\big) < \mathrm{d}R(t)/\mathrm{d}t$ назовем проницаемой ПГ. Случай $v\big(R(t),t\big) > \mathrm{d}R(t)/\mathrm{d}t$ назовем излучающей подвижной границей. Примером ППГ может служить движение в среде поршня с отверстиями. Примером излучающей подвижной границы служит движение в среде поршня, с поверхности которого происходит истечение среды; таким образом, скорость частиц, соприкасающихся с подвижной границей, будет больше скорости движения границы. Физически понятно также, что ППГ может быть представлена системой отрицательных источников (стоков), а другая – системой излучающих источников, расположенных на движущихся поверхностях. Проницаемая подвижная граница рассмотрена ранее [6,7], представляет большой интерес случай движения границы, с поверхности которой происходит излучение.

2. ФИЗИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ. ПОДХОДЫ И РЕШЕНИЯ

Рассмотрим движение среды, вызванное перемещением сферической ($\nu = 3$) проницаемой границы в безграничной жидкости. Возмущение, возникшее в результате движения проницаемой границы, будет распространяться в среде, и ее распространение будет описываться волновым уравнением, среда не изменилась. При этом скорость распространения возмущений будет также равна $a = \text{const}$, включая точки вблизи подвижной границы. Волновое уравнение имеет вид [6]:

$$\varphi_{tt} - a^2\varphi_{rr} - (\nu - 1)a^2 r^{-1}\varphi_r = 0, \qquad r \ge R(t), \tag{1}$$

$$\varphi_t(r,0) = \varphi(r,0) = 0, \qquad R(0) = r_0, \tag{2}$$

$$\rho\varphi_r\Big|_{r=r_1} = P = f\left(t - \frac{r_1 - r_0}{a}\right), \tag{3}$$

$$-\varphi_r = v\Big|_{r=R(t)} = F_1(t), \qquad R(t) = F_2(t) \tag{4}$$

$$v(R(t),t) \ne dR(t)/t \quad \text{– проницаемая граница,} \tag{5}$$

здесь t – время; φ – потенциал скорости; $\nu = 1, 2, 3$ – показатель симметрии; $R(t), r_0, r, r_1$ – координаты: подвижных границ, начальная, текущая, точки волновой зоны соответственно; ρ, a – постоянные; v – скорость; P – давление; (5) – условие проницаемости (излучения) подвижной границы. Условия могут быть заданы на подвижной границе – этим определяется класс прямых задач, например, (4). Если условия заданы только в фиксированной точке волновой зоны, то этим определяется класс обратных задач, например, (3). При решении обратных задач необходимо реконструировать значения исследуемых функций в других точках, включая подвижные границы, при этом закон движения границы неизвестен, нелинеен и подлежит определению. Необходимое уточнение: зависимость между функциями управления ($P(R(t),t)$, $v(R(t),t)$) и воздействия ($P(r,t)$, $v(r,t)$) всегда существенно нелинейна, даже если они (первое или вторoе) линейны. Это традиционное определение прямых и обратных задач. Наличие проницаемости ПГ вносит коррективы в эти понятия, появляются смешанные дополнительные условия [6]. Пусть известно в какой-либо точке волновой зоны r_1 давление $P(r_1,t)$, которое может быть аппроксимировано разными способами: элементарными функциями, их комбинациями и т.д. [10]. Используя методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [6,7,10,11], получим давление и скорость частиц в любых точках. На подвижных границах они имеют вид:

$$P(R(t),t) = \frac{r_1}{R(t)} f\left(t - \frac{R(t) - r_0}{a}\right) - \frac{1}{2}\rho v^2(R(t),t), \tag{6}$$

$$v(R(t),t)\frac{R^2(t)\rho}{r_1} = \frac{R(t)}{a} f\left(t - \frac{R(t) - r_0}{a}\right) + \left[\int_0^t f(\xi)\,dt\right]_{r=R(t)}, \tag{7}$$

$$\varphi(R(t),t) = \frac{r_1}{R(t)\rho}\left[\int_0^t f(\xi)\,dt\right]_{r=R(t)}, \qquad \xi = t - \frac{r - r_0}{a}, \tag{8}$$

где $v(R(t),t)$ – изменение функции $[-\varphi_r]_{r=R(t)}$ в точках, соприкасающихся с проницаемой подвижной границей. Здесь вид функции f несет информацию о том, что распространяющиеся возмущения, описываемые волновым уравнением, индуцированы подвижной проницаемой границей (ППГ). Для вычисления по формулам (6), (7) при решении обратных задач необходимо знание величины $R(t)$. Изменение радиуса подвижной проницаемой границы можно произвести следующим образом. Изменение объема в единицу времени dV/dt по «наблюдаемому» изменению радиуса подвижной границы в рассматриваемом случае будет иметь две составляющие:

$$dV/dt = dV_1/dt + dV_2/dt\,, \tag{9}$$

где dV_1/dt – изменение объема, которое обуславливает изменение функции $[-\varphi_r]$, dV_2/dt – изменение объема, характеризующее проницаемость.

Придавая функции $[-\varphi_r]$ физический смысл скорости частиц среды, воспользуемся известным физическим свойством [9]. Объем среды, протекающей через замкнутую поверхность, равен изменению объема в единицу времени, т.е. $dV_1/dt = 4\pi r^2 v(r,t)$, где v – соотношение из (7).

Интегрируя от 0 до t (9) и переходя на подвижные границы, можно получить:

$$\frac{\left[R^3(t) - r_0^3\right]\rho}{3r_1} = \left[\int_0^t \frac{r}{a} f(\xi)\,dt + \int_0^t\int_0^t f(\xi)\,dtdt\right]_{r=R(t)} + \frac{V_2\rho}{4\pi r_1}. \tag{10}$$

Вычисление $R(t)$ из этого «кубического» уравнения (10) производится, как и в случае непроницаемых ПГ [11,12]. Оно может быть произведено различными способами, в том числе и для случаев, когда r_0 и r_1 неизвестны и подлежат определению [13].

Скорость проницаемости $R_2^{\bullet}(t)$ подвижной границы можно определить, зная $R(t)$ и функцию f, из соотношения (9) работы [6], где $R^{\bullet}(t)$ – скорость изменения радиуса подвижной границы. Решения (6)-(8) тождественны полученным ранее [10-12] для непроницаемых границ. Физический смысл функций (6)-(8) будет другой, соответствующий ППГ. Учет проницаемости добавляет к рассматриваемым еще одно неизвестную функцию – скорость , входящую в (9). Поэтому в случае $v(R(t),t) \neq dR(t)/dt$ для вычисления по (6)-(10) должны быть известны две функции, например, $R(t)$ и $v(R(t),t)$, либо f и $R(t)$. Тогда как при $v(R(t),t) = dR(t)/dt$ достаточно знать одну: f или $R(t)$. Как видим, при задании функций $R(t)$ и $v(R(t),t)$ определение прямой задачи остается неизменным: обе функции заданы на подвижной границе. А при задании f и $R(t)$ определение обратной задачи видоизменяется: одно из двух условий задано на подвижной границе. Это смешанное задание (условий) обусловлено наличием дополнительной неизвестной функции $R_2^{\bullet}(t)$ на подвижной границе. Полученные решения являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, при отсутствии проницаемости они переходят в полученные ранее для непроницаемых границ [10-12] и при $a \to \infty$ в известные решения [12]. Действительно, дифференцируя дважды уравнение (10) при $a \to \infty$ и $V_2 \to 0$, получим известную формулу:

$$P - P_0 = \rho r^{-1}\left(2RR^{\bullet 2} + R^2 R\right)$$

для точки r_1. Подобные рассуждения проведены и идентичны для случая излучающей подвижной границы.

Полученные соотношения позволяют решать задачи при различных вариантах задания дополнительных условий, при этом законы изменения радиуса подвижной границы и скорости частиц среды, соприкасающихся с нею, могут быть произвольными и различными, в том числе, например, уменьшение во времени радиуса и увеличение (уменьшение) скорости частиц на ПГ.

Границы применимости волнового уравнения и его точных решений в областях с ПГ и ППГ определены ранее в работах [11,14]. Они определены впервые нетрадиционно не по давлению, что вообще говоря, невозможно, а по скорости частиц на ПГ.

3. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На Рис. 1, 2 представлены результаты расчетов с единым законом изменения радиуса

$$R(t) = r_0 + \frac{350}{\alpha}\left[1 - \exp(-\alpha t)\right], \tag{11}$$

$r_0 = 1\ мм$, $\alpha = 1\cdot 10^3\ c^{-1}$, $\rho = 102\ кгс\cdot c^2/м^4$, $r_1 = 0.08\ м$ (кривая 3, Рис. 2), и двух вариантов подвижных границ:

а) излучающей, расчет по формулам (6)-(10) давления на ПГ (кривая 3, Рис. 1), аппроксимировано полиномом Лагранжа:

$$P(r_1, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m\left[t - (r_1 - r_0)/a\right]^m, \tag{12}$$

коэффициенты которого могут быть определены разными способами [12]. Для нашего случая $dR(t)/dt < v(R(t), t) = 525\exp(-\alpha t)$ и для значений $m = 0 \div 4$,

$t = 0,\ 0.1,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75\cdot 10^{-6}c$, $a = 1500\ м/c$ с учетом (7), (11), (12) определено

$$\begin{gathered} \mathrm{A}_0 = 100.4;\ \mathrm{A}_1 = -104.2\cdot 10^6;\ \mathrm{A}_2 = 138.1\cdot 10^{12}; \\ \mathrm{A}_3 = -99.0\cdot 10^{18};\ \mathrm{A}_4 = 33.2\cdot 10^{24} \end{gathered} \tag{13}$$

Для $t = 1;\ 2;\ 3;\ 4\cdot 10^{-6}c$; $m = 0 \div 3$ с учетом (7), (11), (12) определяем коэффициенты

$$\begin{gathered} \mathrm{A}_0 = -53.0;\ \mathrm{A}_1 = 239.0\cdot 10^6; \\ \mathrm{A}_2 = -120.67\cdot 10^{12};\ \mathrm{A}_3 = 19.2\cdot 10^{18} \end{gathered} \tag{14}$$

где $v(R(t), t)$ – скорость частиц; $R(t)$ – видимый, наблюдаемый радиус ПГ. Из (6) с учетом (12)-(14) определяем давление на излучающей ПГ (кривая 3, Рис. 1) и по (12) давление в точке $\mathrm{r}_1 = 0.08$ м (кривая 4, Рис. 1);

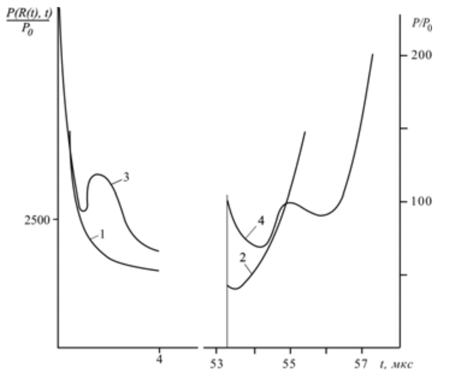

Рис. 1. Изменение во времени давления на подвижных границах (с учетом нелинейного члена интеграла Коши–Лагранжа [6,7]), и в точке r_1: непроницаемой (1, 2) и излучающей (3, 4) границы. Кривая (3): значения $P(R(t), t = 0_+) = 6627.1$ и $P(R(t), t = 0.1\cdot 10^{-6}c) = 5796.8\ кгс/см^2$ позволяют оценить начало движения излучающего источника в среде

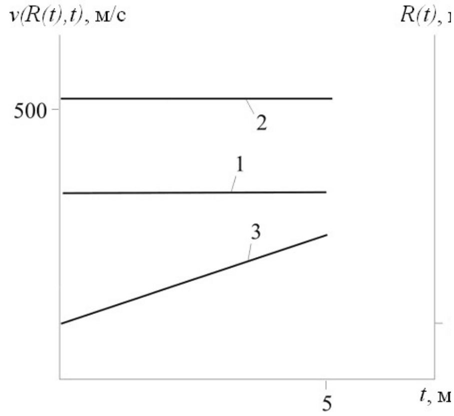

Рис. 2. Изменение во времени скорости движения границы – кривая (1); излучения – кривая (2); общий закон изменения радиуса – кривая (3)

б) непроницаемой ПГ, расчет методом характеристик (Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.) [6] системы уравнений движения, сплошности и состояния в форме Тэта:

$$v_t + v \cdot v_r + \rho^{-1} P_r = 0\,,\quad \rho_t + (\rho v)_r' + (\nu - 1)\rho v = 0\,,\quad (P+B)\big/(P_0+B) = (\rho/\rho_0)^n\,,\quad \ldots(15)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями (B, n – постоянные, ν – показатель симметрии).

Закон расширения поршня $\mathrm{v(R(t), t)} = 350 \cdot \exp(-10^3 \cdot t)$ – кривая 1, Рис. 2, при $v(R(t),t) = dR(t)/dt$, давление на подвижной границе и в фиксированной точке волновой зоны – кривая 1 и 2, Рис. 1.

Учет движения границ необходим во многих случаях, в том числе задачах удара затупленных тел о поверхность жидкости (используется во многих новых отраслях машиностроения). Результаты расчетов по формуле (1.20) [Кубенко В.Д. // Прикладная механика. 2004. Т.40(50). №11. С.3-44] давления в лобовой точке при ударе шара $r_0 = 50\,мм$, $v = 200\,м/с$, $\rho = 102\,кгс \cdot с^2/м^4$, $a = 1460\,м/с$, $t = 0.1 \cdot 10^{-6} с$, $P^* = P(t,0) \cdot \rho a^2$=2916.87 (2712.87) *кгс/см*^{2} (в скобках значение с учетом нелинейного члена интеграла Коши–Лагранжа (Слепян Л.И.) [10,11][1], что в (1.20) не учитывается) и по формулам автора $P\big(R(t), t = 0.1 \cdot 10^{-6} c\big) = 2826\,кгс/см^2$ удовлетворительно согласуются. Точное решение дважды нелинейной обратной задачи (нелинейные условия и ПГ) для волнового уравнения в областях с подвижными границами для $\nu = 2$ получено в [Krutikov V.S. // Techn. Phys. Letters, 2003. Vol.29, No.12, pp.1014-1017] и в [Krutikov V.S. // Doklady Physics, 2006. Vol.51, No.1, pp.1-5]. Решения описывают ближнее поле расширяющегося цилиндрического плазменного поршня, в том числе и самые интересные, самые критические, начальные мгновения движения (удара) импульсного процесса.

Анализ кривых показывает, сколь велики могут быть погрешности определения исследуемых функций по наблюдаемому изменению радиуса подвижной границы. В начальные мгновения, при некоторых соотношениях значений радиуса и скоростей частиц на излучающей ПГ, происходит уменьшение давления (кривая 3, Рис. 1, значение $P\big(R(t),t\big)$ при $t \approx 1\,мкс$), вплоть до отрицательных значений P. Подобная ситуация, когда $v\big(R(t),t\big) > dR(t)/dt$, может возникать в некоторых случаях при реакции экзотермических добавок [3], инициированных электрическим взрывом (К.А.Науголных), лазерным импульсом (Л.М. Лямшев) и т.д.. Развитые подходы позволяют рассмотреть различные варианты, например, уменьшение радиуса во времени и увеличение (уменьшение) скорости частиц на ПГ. Полученные результаты и их анализ показывают, что решения актуальных физических (по В.Л. Гинзбургу) и математических (по А.Н. Тихонову) проблем подвижных излучающих границ, может быть использовано для оценки волновых полей, индуцированных расширяющимся плазменным поршнем электрического разряда, с поверхности которого происходит излучение в результате реакции экзотермической смеси. Это позволяет построить более корректную физико-математическую модель обратной задачи управления сложных процессов ВЭХВ, более корректно определить вклад реакции экзотермических добавок в общий энергетический баланс.

[1] Крутиков В.С. построение метода и решений импульсных задач механики сплошной среды с подвижными границами. Диссерт. д.ф.-м.н. (ИГМ НАНУ, Киев, 1995), 343 с. Гл. оппонент академик РАН А.С. Алексеев.

ВЫВОДЫ

В заключение необходимо сказать, что авторскими методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [10,15] впервые решено волновое уравнение в областях с излучающими границами, разработана теория, получены точные аналитические соотношения, определены волновые поля, индуцированные движением излучающей границы (проблема В.Л. Гинзбурга). Они универсальны, пригодны для обратных (задач управления) и прямых задач. Они описывают самые интересные, самые критические, начальные мгновения движения (удара) излучающего источника в сжимаемой среде (задача В.Л. Гинзбурга), при этом законы изменения скорости движения и излучения произвольны и различны. Подобные результаты другими способами получить нельзя, метод [5] и формулы (74.8 и другие подобные) работы [9] применить для обратных задач невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наугольных К. А., Рой Н. А.* Электрические разряды в воде. М.: Наука, 1971. 141с.
2. *Лямшев Л. М.* // УФН. 1987. Т.151. №4. С.479-527.
3. *Вовченко А. И., Посохов А. А.* Управляемые электровзрывные процессы преобразования энергии в конденсированных средах. Киев: Наук. думка, 1992. 168с.
4. *Гинзбург В. Л.* О физике и астрофизике. М.: Наука, 1985. 400с.
5. *Гринберг Г. А.* // ПММ. 1967. Т.31. №2. С.193-203.
6. *Крутиков В. С.* // Докл. РАН. 1993. Т.333. №4. С.512-514.
7. *Крутиков В. С.* // Докл. РАН. 1999. Т.368. №6. С.755-758. (Krutikov V.S. // Doklady Physics. 1999. Vol.44. No.10. pp.674-677).
8. *Математическая* энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. М.: Сов. Энц., 1982. 3. 1183с.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, Т.VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736с.
10. *Крутиков В. С.* // Докл. РАН. 1999. Т.364. №1. С.17-20. (Krutikov V.S. // Doklady Mathematics. 1999. Vol.59. No.1. pp.10-13).
11. *Крутиков В. С.* Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами. Киев: Наук. думка. 1985. 125с.
12. *Крутиков В. С.* // ПММ. 1991. Т.6. С.1058-1062.
13. *Крутиков В. С.* Труды Акустич. симпозиума «КОНСОНАНС-2011». Киев, ИГМ НАНУ. 2011. С.170-176.
14. *Крутиков В. С.* // Акуст. журн. 1996. Т.42. №4. С.534-540. (Krutikov V.S. // Acoust. Physics. 1996. Vol.42. No.4).
15. *Krutikov V. S.* // Natural Science. 2010. Vol.2. No.4. pp.298-306