НОРМАЛЬНІ ХВИЛІ КРИВОЛІНІЙНОГО ХВИЛЕВОДУ

В. Т. МАЦИПУРА, О. О. ТРУНОВ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4е
e-mail: trunov.olexandr@gmail.com

ВСТУП

В роботі розглядається плоский хвилевід, поверхні якого на деякій ділянці являють собою дуги кола, рис. 1. До криволінійної ділянки прилягають плоскопаралельні хвилеводи. Оскільки такі структури часто зустрічаються в конструкціях акустичних і електромагнітних хвилеводів, то інтерес до дослідження хвильового поля в них не слабшає (див., наприклад, [1, 2]).

Для опису геометрії хвилеводу і подальшої побудови розв'язку задачі поширення гармонічної хвилі в такому хвилеводі введемо три системи координат: дві декартові (x, y), (x', y') і полярну (r, φ) з загальним центром у точці O. Радіуси поверхонь криволінійної ділянки хвилеводу позначені r_1 та r_2. Ширина хвилеводу на всій його довжині залишається сталою і дорівнює $h = r_2 - r_1$. Кут розкриття криволінійної частини хвилеводу позначений як φ_0. Всі поверхні хвилеводу будемо вважати або акустично жорсткими, або акустично м'якими. Хвилевід наповнений ідеальною рідиною, яка має густину ρ та швидкість звуку c. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо.

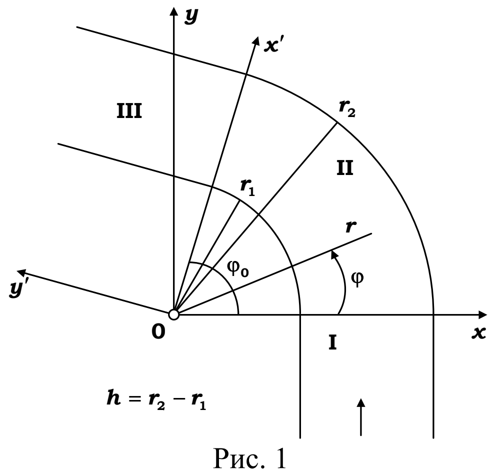

Рис. 1

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ

Природнім чином вся область існування звукового поля розбивається на три області: області I та III – плоскопаралельні хвилеводи, область II – ділянка хвилеводу з криволінійними поверхнями. Нехай в області I в додатному напрямку вісі Oy поширюється m-та мода плоскопаралельного хвилеводу. Тоді поля в областях I и III запишемо у вигляді суперпозиції відповідних мод плоскопаралельного хвилеводу. Для хвилеводу з акустично жорсткими поверхнями поля мають вигляд

$$p_{\mathrm{I}} = \cos\left(\alpha_m \left(x - r_1\right)\right)\exp\left(i\gamma_m y\right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\alpha_n \left(x - r_1\right)\right)\exp\left(-i\gamma_n y\right), \tag{1}$$

$$p_{\mathrm{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\alpha_n \left(x' - r_1\right)\right)\exp\left(i\gamma_n y'\right), \tag{2}$$

де $\alpha_n = n\pi / h$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $k = \omega / c$.

Для хвилеводу з акустично м'якими межами у формулах (1), (2) функції $\cos\left(\alpha_n \left(x - r_1\right)\right)$, що визначають власні форми мод, замінюються на функції $\sin\left(\alpha_n \left(x - r_1\right)\right)$, де $\alpha_n = \left(n+1\right)\pi / h$, $n = 0,1,2,...$

Перед тим як записати поле в області II визначимо вираз для нормальних хвиль криволінійної частини хвилеводу. Частковий розв’язок рівняння Гельмгольца в полярних координатах для області II має вигляд (див. [3]):

$$p = \left[J_\nu\left(kr\right) + EY_\nu\left(kr\right)\right]\exp\left(i\nu\varphi\right) \tag{3}$$

Використовуючи граничні умови на жорстких поверхнях області II ($\partial p / \partial r = 0$ при $r = r_1$ и $r = r_2$), визначаємо сталу $E = -J'_\nu\left(kr_2\right) / Y'_\nu\left(kr_2\right)$ та приходимо до дисперсійного рівняння, яке встановлює зв'язок між частотою $\omega = kc$ та сталою поширення ν:

$$J'_\nu\left(kr_2\right)Y'_\nu\left(kr_1\right) - J'_\nu\left(kr_1\right)Y'_\nu\left(kr_2\right) = 0. \tag{4}$$

В формулі (4) штрихом позначено похідну від функції Бесселя по аргументу. Аналогічно, використовуючи граничні умови на м'яких поверхнях області II ($p = 0$ при $r = r_1$ и $r = r_2$), визначаємо константи $E = -J_\nu\left(kr_2\right) / Y_\nu\left(kr_2\right)$ і приходимо до такого дисперсійного рівняння:

$$J_\nu\left(kr_2\right)Y_\nu\left(kr_1\right) - J_\nu\left(kr_1\right)Y_\nu\left(kr_2\right) = 0. \tag{5}$$

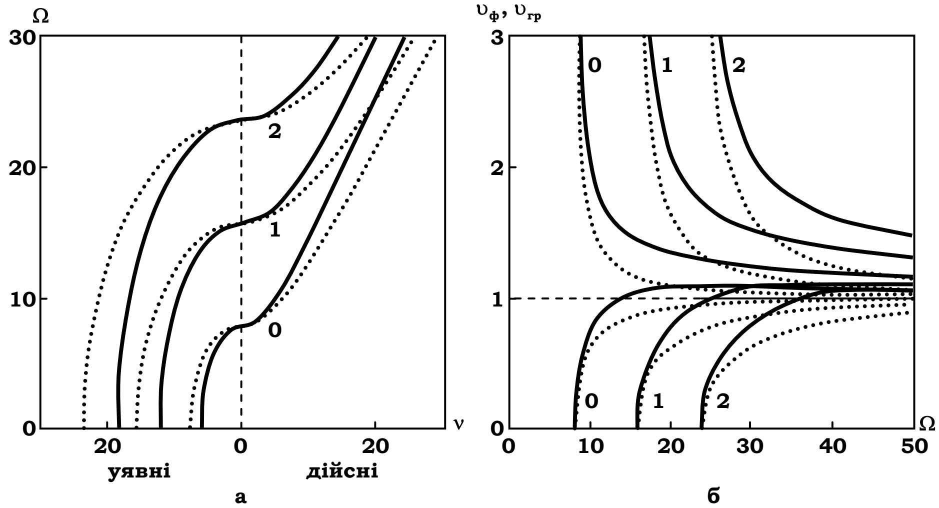

Рис. 2

На рис. 2 *а* побудовано дисперсійні криві для акустично м'яких поверхонь хвилеводу, а на рис.3 *а* – для хвилеводу з жорсткими стінками. Вздовж вісі ординат відкладено безрозмірну частоту $\Omega = kr_2 = \omega r_2 / c$, вздовж вісі абсцис – сталу поширення ν, радіус $r_1 = r_2 q$, де стала $q < 1$ (в даному випадку $q = 0,6$). Точкові криві відповідають плоскому хвилеводу з тим же, що і у криволінійного хвилеводу поперечним розміром. Цифри поблизу кривих визначають номер нормальної хвилі. Як бачимо, якщо критичні частоти мод криволінійного і плоскопаралельного хвилеводів з графічною точністю співпадають, то подальший хід кривих відрізняється. Природно цей факт знаходить своє відображення при побудові частотних залежностей фазових та групових швидкостей нормальних хвиль (рис. 2 *б*, 3 *б*).

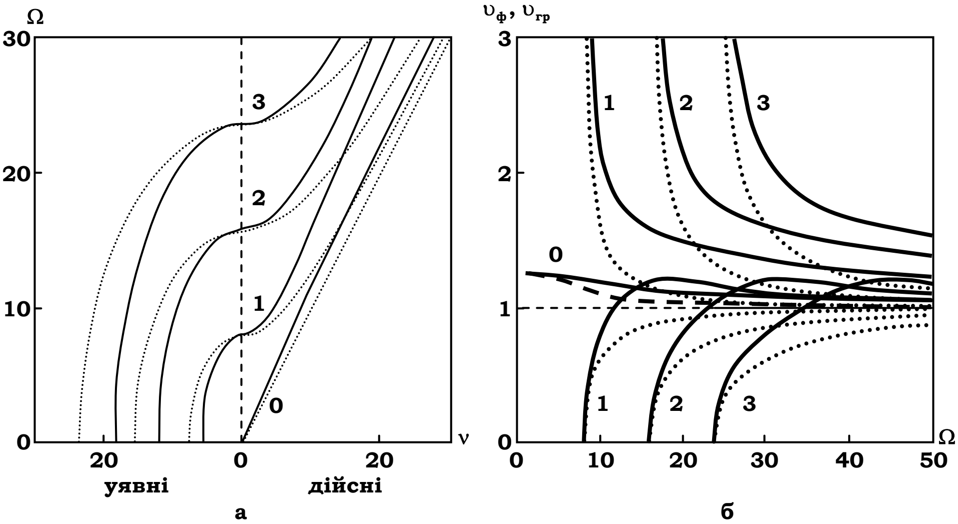

Рис. 3

Провівши на рис. 2 *а* чи рис. 3 *а* горизонтальну пряму, яка відповідає заданому значенню частоти, визначаємо тим самим кінцеве число однорідних і нескінченне число неоднорідних нормальних хвиль. Їх суперпозиція дозволить описати довільне поле в криволінійній частині хвилеводу.

Таким чином, *n*-ту моду хвилеводу можна представити у вигляді

$$p_n = R_{\nu_n}(kr)\exp(i\nu_n\varphi), \tag{6}$$

де власні форми мод для акустично жорсткого хвилеводу записуються як

$$R_{\nu_n}(kr) = J_{\nu_n}(kr) - \frac{J'_{\nu_n}(kr_2)}{Y'_{\nu_n}(kr_2)} Y_{\nu_n}(kr), \tag{7}$$

а для акустично м'якого хвилеводу

$$R_{\nu_n}(kr) = J_{\nu_n}(kr) - \frac{J_{\nu_n}(kr_2)}{Y_{\nu_n}(kr_2)} Y_{\nu_n}(kr). \tag{8}$$

Як приклад, на рис. 4 (м'які стінки) і рис. 5 (жорсткі стінки) показано профілі розподілу тиску в радіальному перерізі криволінійного хвилеводу для однорідних і перших неоднорідних мод при $\Omega = kr_2 = 27$ і $q = 0,6$. Точкові криві визначають власні форми плоского хвилеводу з тією ж хвильової шириною, що і у криволінійного хвилеводу. Як бачимо, власні форми перших мод зазначених хвилеводів істотно відрізняються.

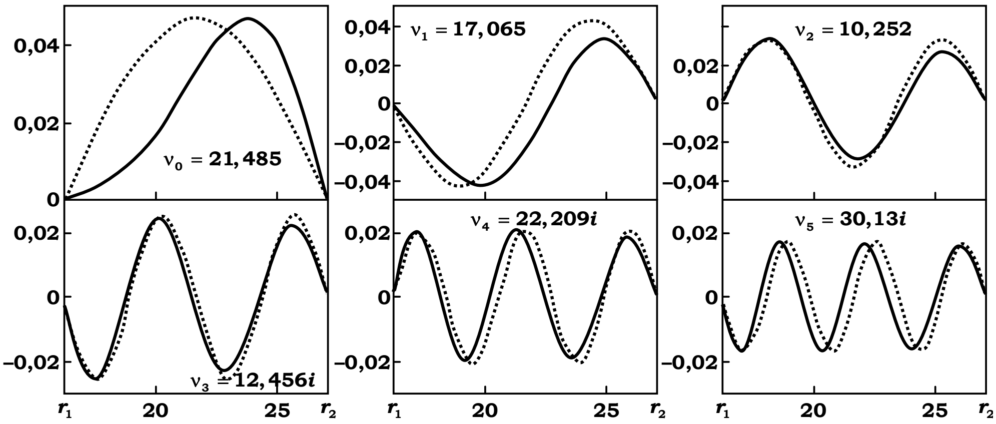

Рис. 4.

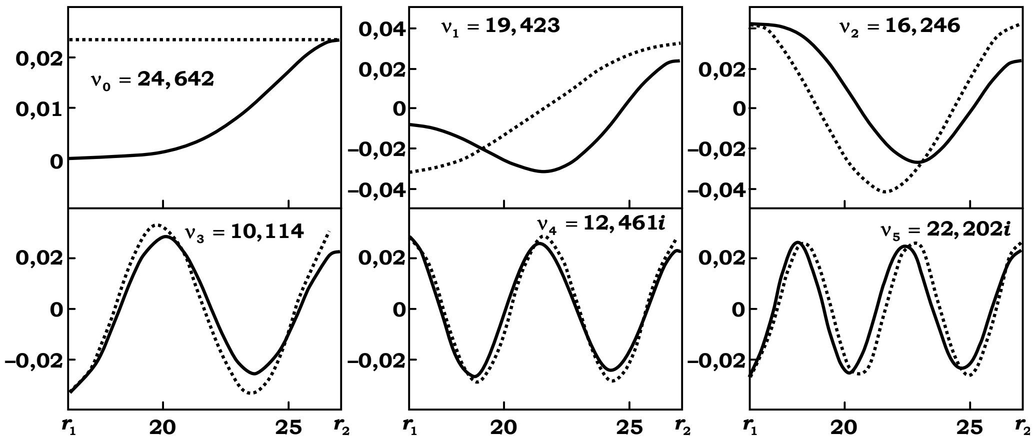

Рис. 5.

Отже, поле в області II запишемо у вигляді

$$p_{\mathrm{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{\nu_n}\left(kr\right)\left[B_n \exp\left(i\nu_n\varphi\right) + C_n \exp\left(i\nu_n\left(\varphi-\varphi_0\right)\right)\right] \tag{9}$$

Для розв’язання задачі поширення хвилі в хвилеводі слід розписати умови спряження звукових полів на межах часткових областей і скористатися властивістю ортогональності набору функцій $\cos\left(\alpha_n\left(x-r_1\right)\right)$, $x=\left[r_1,r_2\right]$ та $R_{\nu_n}\left(kr\right)$, $r=\left[r_1,r_2\right]$.

ВИСНОВКИ

В роботі побудовано розв’язок задачі поширення звукових хвиль в криволінійному хвилеводі як для випадку ідеально м’яких меж, так і для ідеально жорстких. Визначені дисперсійні співвідношення і побудовано дисперсійні криві для криволінійної області. Це дало можливість визначити частотні залежності фазових та групових швидкостей мод криволінійного хвилеводу.

Також побудовано розподіл тиску в радіальному перерізі криволінійного хвилеводу з жорсткими і м'якими поверхнями для однорідних і перших неоднорідних мод. Проведено порівняльний аналіз з модами плоскопаралельного хвилеводу відповідної ширини. Встановлено, що власні форми однорідних мод (особливо перших номерів) криволінійного і плоскопаралельного хвилеводів можуть суттєво відрізнятися.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Cochran J. A., Pecina R. G.* Mode propagation in continuously curved waveguides. - Radio science, 1966. – **34**. –P. 679–696.
2. *Horvat M., Prosen T.* The bends on quantum waveguide and cross-products of Bessel functions // J. Phys. A.: Math. Gen. – 2007. – **1**. – 34 p.
3. *Rzhevkin* S.N.Course of lectures on theory of a sound. - Moscow: MGH, 1960. - 336 p. (in Russian).