ВОЗБУЖДЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

О. Н. ПЕТРИЩЕВ, А. Н. МИХЕЕВА

Национальный технический университет Украины ”КПИ”, Киев

Решена граничная задача динамической теории упругости о возбуждении неосесимметричных сферических продольных волн в изотропном упругом полупространстве с исчезающе малым модулем сдвига. Источником упругих возмущений является гармонически изменяющиеся во времени нормальные механические напряжения, которые произвольным образом распределены в некоторой ограниченной области поверхности упругого полупространства. Результат решения представлен в виде разложений по сферическим гармоникам. Результаты решения этой задачи позволяют прогнозировать эффективность возбуждения продольных волн в заданном диапазоне частот в зависимости от характера распределения силовых факторов, конфигурации и размеров области нагружения. Эти прогнозы составляют рациональную основу практических разработок ультразвуковых устройств медицинской диагностики. В работе обсуждаются результаты модельных исследований полученных результатов. В частности, рассматривается вопрос об оценке размеров ближней зоны излучателя продольных волн, влияния формы и размеров площадки механического контакта на частотную характеристику ультразвукового преобразователя.

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1], что при динамическом нагружении конечной области поверхности упругого полупространства в нем возбуждаются взаимодействующие и невзаимодействующие продольные и поперечные (сдвиговые) волны. Взаимодействующие продольные и поперечные волны порождают поверхностную волну Рэлея, которая распространяется в радиальных направлениях вдоль поверхности полупространства. Невзаимодействующие продольные и поперечные волны уносят энергию источника внешних сил в объем полупространства. Определение компонентов векторов смещений в волне Рэлея и в невзаимодействующих продольных и поперечных волнах составляет основное содержание задачи, которая впервые была сформулирована Горацио Лэмбом в 1904 г. [2] и в настоящее время носит его имя.

Стремление удержать в общем решении задачи Лэмба оба типа продольных и поперечных волн заставляет привязываться к поверхности полупространства, т. е. использовать либо декартову либо цилиндрическую систему координат. Решения уравнений движения элемента объема деформируемого твердого тела в этих системах координат требует, помимо интегрального преобразования по времени, выполнения интегральных преобразований по координатным осям. Выполнение обратных интегральных преобразований сопряжено с известными [1] математическим трудностями.

Поскольку в линейной теории упругости a priori предполагается выполнение принципа суперпозиции решений, постольку задачу Лэмба можно разделить на две частные задачи, а именно – на задачу для поверхностных волн Рэлея и задачу для невзаимодействующих продольных и поперечных волн. Задача Лэмба для волн Рэлея решается в цилиндрической системе координат с помощью интегральных преобразований Ханкеля. Задача Лэмба для невзаимодействующих продольных и поперечных волн решается в сферической системе координат без применения интегральных преобразований.

В настоящей статье предлагается методика решения задачи Лэмба для невзаимодействующих продольных и поперечных волн для случая, когда поверхностные плотности внешних сил обладают осевой симметрией.

ВОЗБУЖДЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ НАГРУЗКАМИ

Рассмотрим изотропное упругое полупространство (рис. 1), на поверхности которого $\vartheta=\pi/2$ (ϑ - полярная угловая координата сферической системы координат r,ϕ,ϑ, которая сопряжена с правовинтовой декартовой системой координат x_1,x_2,x_3 так, как это показано на рис. 1) в круге $r\le R$ заданы внешние нагрузки $\sigma^*_{\vartheta\vartheta}(r)e^{i\omega t}$ и $\sigma^*_{\vartheta r}(r)e^{i\omega t}$ ($i=\sqrt{-1}$; ω - круговая частота; t - время). Требуется найти амплитудное значение $\vec{u}(r,\vartheta)$ гармонически изменяющегося во времени вектора смещения материальных частиц полупространства в произвольной точке A при условии, что напряженное состояние полупространства на поверхности $\vartheta=\pi/2$ удовлетворяет третьему закону Ньютона, т. е.

$$\operatorname{Re}\sigma_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2)-\sigma^*_{\vartheta\vartheta}(r)=0, \qquad (1)$$

$$\operatorname{Re}\sigma_{\vartheta r}(r,\pi/2)-\sigma^*_{\vartheta r}(r)=0, \qquad (2)$$

где $\operatorname{Re}\sigma_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2)$ и $\operatorname{Re}\sigma_{r\vartheta}(r,\pi/2)$ - действительные части амплитудных значений упругих напряжений, которые возникают при динамическом деформировании полупространства.

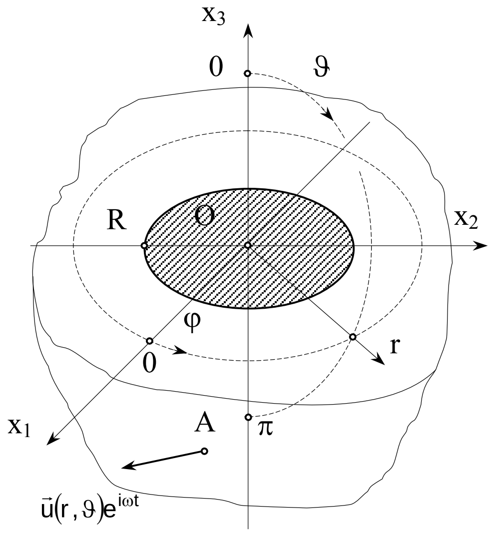

Рис. 1. Расчетная схема задачи Лэмба

Представим вектор смещения $\vec{u}(r,\vartheta)$ в виде суперпозиции следующих векторов

$$\vec{u}(r,\vartheta)=\vec{u}^{\ell}(r,\vartheta)+\vec{u}^{s}(r,\vartheta), \qquad (3)$$

где $\vec{u}^{\ell}(r,\vartheta)=grad\,\Phi(r,\vartheta)$ - вектор смещения в продольной волне; $\Phi(r,\vartheta)$ - скалярный потенциал; $\vec{u}^{s}(r,\vartheta)=rot\,\vec{\Psi}(r,\vartheta)$ - вектор смещения в поперечной волне; $\vec{\Psi}(r,\vartheta)$ - векторный потенциал, который в случае осевой симметрии волнового поля полностью определяется азимутальным компонентом $\Psi_{\phi}(r,\vartheta)$, что автоматически обеспечивает выполнение условия $div\,\vec{\Psi}(r,\vartheta)=0$. Потенциалы перемещений удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2\Phi(r,\vartheta)+k_\ell^2\Phi(r,\vartheta)=0, \qquad -rot\,rot\,\Psi_{\phi}(r,\vartheta)+k_s^2\Psi_{\phi}(r,\vartheta)=0, \qquad (4)$$

где $k_\ell^2 = \omega^2 / v_\ell^2$; $k_s^2 = \omega^2 / v_s^2$; $v_\ell = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho_0}$ и $v_s = \sqrt{G/\rho_0}$ - скорости распространения продольной (ℓ) и сдвиговой (s) волн; λ, G и ρ_0 - модули упругости и плотность материала полупространства.

Решения уравнений (4) выполняется по стандартной схеме разделения переменных и записывается в виде разложений по сферическим гармоникам

$$\Phi(r,\vartheta) = x_\ell^{-1/2} \sum_\nu B_\nu H^{(2)}_{\nu+1/2}(x_\ell) P_\nu(\xi) , \tag{5}$$

$$\Psi_\phi(r,\vartheta) = -x_s^{-1/2} \sum_\mu C_\mu H^{(2)}_{\mu+1/2}(x_s) \frac{\partial P_\mu(\xi)}{\partial \vartheta} , \tag{6}$$

где $x_\beta = k_\beta r$ ($\beta = \ell, s$) – безразмерная радиальная координата; ν и μ - элементы ряда натуральных чисел; B_ν и C_μ - подлежащие определению константы; $H^{(2)}_{\lambda+1/2}(x_\beta)$ ($\lambda = \nu, \mu$) _ функции Ханкеля второго рода; $P_\lambda(\xi)$ ($\xi = \cos\vartheta$) – функции Лежандра первого рода степени λ.

По известным потенциалам $\Phi(r,\vartheta)$ и $\Psi_\phi(r,\vartheta)$ определяются компоненты векторов смещения $u_\beta^\lambda(r,\vartheta)$, компоненты тензоров деформаций и напряжения $\sigma^\lambda_{\vartheta\beta}(r,\pi/2)$. Если значок $\nu = 2n$, где $n = 1,2,3,...$, то $\sigma^\ell_{\vartheta r}(r,\pi/2) = 0$, а нормальные напряжения $\sigma^\ell_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2) \neq 0$, причем граничное условие (1) можно записать в следующем виде

$$2k_\ell^2 x_\ell^{-1/2} G \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[a_1 J_{2n-3/2}(x_\ell) + a_2 J_{2n+1/2}(x_\ell) + a_3 J_{2n+5/2}(x_\ell) \right] P_{2n}(0) = \sigma^*_{\vartheta\vartheta}(r), \tag{7}$$

где $a_1 = \dfrac{1}{(4n-1)} + \dfrac{(2n+1)^2}{(4n+1)(4n-1)}$;

$a_2 = \dfrac{1}{(4n-1)} + \dfrac{(2n+1)^2}{(4n+1)} \left[\dfrac{1}{(4n-1)} + \dfrac{1}{(4n+3)} \right] - \dfrac{\eta}{1-2\eta}$; η - коэффициент Пуассона упругого полупространства; $a_3 = \dfrac{(2n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)}$; $J_{2n-3/2}(x_\ell)$, $J_{2n+1/2}(x_\ell)$, $J_{2n+5/2}(x_\ell)$ - функции Бесселя. Если значок $\mu = 2n+1$, где $n = 1,2,3,...$, то $\sigma^s_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2) = 0$, а касательные напряжения $\sigma^s_{\vartheta r}(r,\pi/2) \neq 0$, причем граничное условие (2) можно записать в виде

$$G k_s^2 x_s^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n (2n+1) \left[\beta_1 J_{2n-1/2}(x_s) + \beta_2 J_{2n+3/2}(x_s) + \beta_3 J_{2n+7/2}(x_s) \right] P_{2n}(0) = \sigma^*_{\vartheta r}(r), \tag{8}$$

где

$$\beta_1 = \frac{4(2n+1)^2 + 7(2n+1) - 3}{2(4n+1)(4n+3)} - \frac{3}{2(4n+1)}; \; \beta_2 = \beta_1 + \frac{4(2n+1)^2 + 7(2n+1) - 3}{2(4n+3)(4n+5)} - 1;$$

$$\beta_3 = \beta_1 + \frac{3}{2(4n+1)}.$$

Известен интеграл [3]

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} J_{2m+1/2}(x) J_{2n+1/2}(x)\,dx = \begin{cases} 0 \;\forall\, m \ne n, \\ 1/(2n+1)\; при\;\, m = n. \end{cases}$$

Умножая левую и правую части соотношения (7) на функцию

$$W_n^\ell(x_\ell) = x^{-1/2}\left[J_{2n-3/2}(x_\ell) + J_{2n+1/2}(x_\ell) + J_{2n+5/2}(x_\ell)\right],$$

и выполняя интегрирование по переменной x_ℓ, получаем следующий результат

$$B_n = \frac{1}{2Gk_\ell^2 P_{2n}(0) Q_n}\int_0^\infty \sigma_{\vartheta\vartheta}^*(r) W_n^\ell(x_\ell)\,dx_\ell,$$

где $Q_n = a_1/(4n-3) + a_2/(4n+1) + a_3/(4n+5)$.

Аналогичным образом определяются константы C_n

$$C_n = \frac{1}{Gk_s^2(2n+1) P_{2n}(0) S_n}\int_0^\infty \sigma_{\vartheta r}^*(r) W_n^s(x_s)\,dx_s,$$

где $W_n^s(x_s) = x_s^{-1/2}\left[J_{2n-1/2}(x_s) + J_{2n+3/2}(x_s) + J_{2n+7/2}(x_s)\right]$; $S_n = \beta_1/(4n-1) + \beta_2/(4n+3) + \beta_3/(4n+7)$.

Сумма напряжений $\sigma_{\vartheta\beta}^\lambda(r,\pi/2)$ удовлетворяет граничным условиям (1), (2), т. е. найденные потенциалы являются решением осесимметричной задачи Лэмба.

Рассмотрим модельную ситуацию, когда в круге $\left(r \le R,\, 0 \le \phi \le 2\pi,\, \vartheta = \pi/2\right)$ созданы изменяющиеся во времени по гармоническому закону нормальные напряжения с постоянной амплитудой σ_0. Указанная нагрузка возбуждает продольную сферическую волну. Вектор смещения $\vec{u}^\ell(r,\vartheta)$ при этом определяется следующим образом:

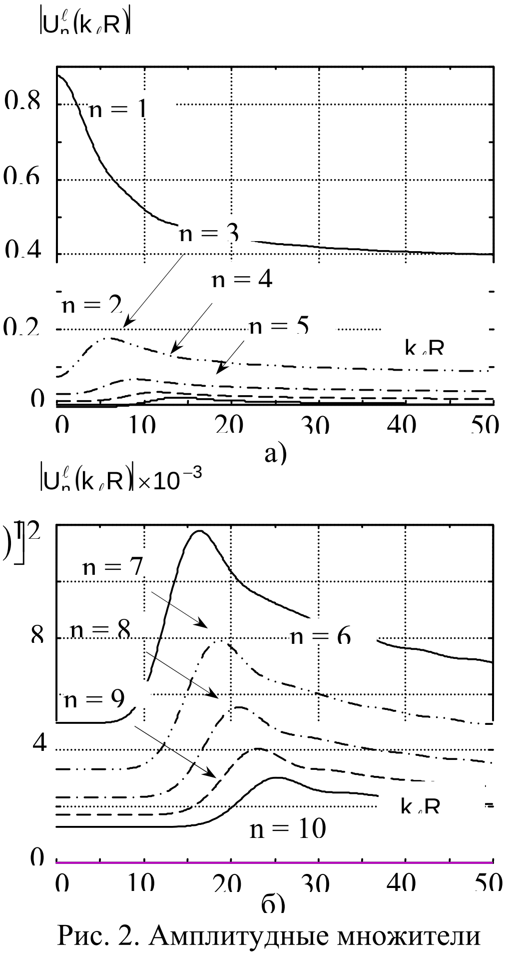

Рис. 2. Амплитудные множители сферических гармоник продольной волны, которая возбуждается напряжениями, равномерно распределенными в круге $r \le R$

$$u_r^\ell\left(x_\ell,\xi\right)=\frac{\sigma_0 R}{2G}x_\ell^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}U_n^\ell\left(k_\ell R\right)\left[H_{2n-1/2}^{(2)}\left(x_\ell\right)-\frac{2n+1}{x}H_{2n+1/2}^{(2)}\left(x_\ell\right)\right]P_{2n}\left(\xi\right)$$

$$u_\vartheta^\ell\left(x_\ell,\xi\right)=\frac{\sigma_0 R}{2G}x_\ell^{-3/2}\sin\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}U_n^\ell\left(k_\ell R\right)H_{2n+1/2}^{(2)}\left(x_\ell\right)\frac{\partial P_{2n}\left(\xi\right)}{\partial\xi},$$

где $U_n^\ell\left(k_\ell R\right)$ - амплитудный множитель n-ой сферической гармоники продольной волны, который определяется следующим выражением

$$U_n^\ell\left(k_\ell R\right)=\frac{1}{k_\ell R\,P_{2n}\left(0\right)Q_n}\int_0^{k_\ell R}W_n^\ell\left(x_\ell\right)dx_\ell\,.$$

На рис. 2 показаны графики амплитудных множителей $U_n^\ell\left(k_\ell R\right)$ первых десяти сферических гармоник продольной волны в упругом полупространстве с коэффициентом Пуассона $\eta=0,3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 283 с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 873 с.
3. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 752 с.