ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ГРАНИЦЫ В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

В.С. КРУТИКОВ
Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев

Авторскими методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [7][1] впервые получено решение волнового уравнения в областях с подвижными излучающими границами. Точные аналитические соотношения универсальны, пригодны для обратных (задач управления) и прямых задач, при произвольных величинах начального радиуса и перемещений, законах изменения скорости излучения и радиуса подвижной границы, которые различны.

«Проблемы *управления*, с которыми сталкивается математик (физик, исследователь) по сложности вычислений *на много порядков* превосходят все те задачи, с которыми имели дело в физике и инженерных науках» (академик АН СССР-РАН Н.Н. Моисеев «Асимптотические методы нелинейной механики», М.: Наука, 1981, стр. 400).

Движение границы в сжимаемой среде является частным более общего случая движения излучающей (проницаемой) границы, когда скорость излучения (проницаемости) равна нулю. При этом для определения волнового поля нельзя решить ни обратную, по заданному закону изменения давления в точке волновой зоны, ни прямую задачу по известному закону изменения радиуса плазменного поршня. Известное определение «физическая проблема» дано в работе [1, стр. 13–16]. К физическим проблемам (по В. Л. Гинзбургу) особой сложности относятся: проблемы подвижных границ (ПГ), которые существенно нелинейны, метод суперпозиции неприменим (Г. А. Гринберг) [2, 3]; подвижных проницаемых границ (ППГ) – более сложные, они были даже не поставлены [4, 5]; вопросы управления волновыми процессами, обратные задачи управления некорректны, многозначны (А. Н. Тихонов, М. М. Лавреньтев) [6, стр. 930].

Они существовали и были неразрешимы длительное время с момента создания волнового уравнения (Тейлор Брук). Упомянутая проблематика чрезвычайно интересна, ею занимались выдающиеся физики. «Действительно, и другие задачи могут оказаться трудными и очень интересными. Например, задачи, относящиеся к теории излучения источников, движущихся в сжимаемой среде. Мне лично (В. Л. Гинзбургу) этот круг вопросов **очень** дорог и близок, я им занимаюсь в течении всей своей научной жизни» [1, стр. 15]. Физически понятно, в этих задачах много общего с проблемами ПГ, ППГ, вопросами управления волновыми процессами, понятно, что без учета ПГ и ППГ они неразрешимы.

Автор поставил себе задачу учесть влияние того факта, что законы изменения радиуса подвижной границы и скорости частиц среды, соприкасающихся с нею, могут быть произвольны и различны. Подобные задачи в математической физике не рассматривались. Математически это означает, что на подвижной границе, изменяющейся по закону $R(t)$, скорость частиц среды, соприкасающихся с подвижной границей, не равна скорости изменения радиуса ПГ (5). Такую границу, для случая $v(R(t),t) < \mathrm{d}R(t)/\mathrm{d}t$ назовем проницаемой ПГ. Случай $v(R(t),t) > \mathrm{d}R(t)/\mathrm{d}t$ назовем

[1] Krutikov V.S. “Waves in the Regions with mobile permeable boundaries. Control problems”. Kiev: Naukova Dumka, 2016. 404 p.

излучающей подвижной границей. Примером ППГ может служить движение в среде поршня с отверстиями. Примером излучающей подвижной границы служит движение в среде поршня, с поверхности которого происходит истечение среды; таким образом, скорость частиц, соприкасающихся с подвижной границей, будет больше скорости движения границы.

Рассмотрим движение среды, вызванное перемещением сферической $\nu = 3$ проницаемой границы в безграничной жидкости. Возмущение, возникшее в результате движения проницаемой границы, будет распространяться в среде, и ее распространение будет описываться волновым уравнением, среда не изменилась. При этом скорость распространения возмущений будет также равна $a = \text{const}$, включая точки вблизи подвижной границы. Волновое уравнение имеет вид [4]:

$$\varphi_{tt} - a^2\varphi_{rr} - (\nu - 1)a^2 r^{-1}\varphi_r = 0, \qquad r \geq R(t), \tag{1}$$

$$\varphi_t(r,0) = \varphi(r,0) = 0, \qquad R(0) = r_0, \tag{2}$$

$$\rho\varphi_r\Big|_{r=r_1} = P = f\left(t - \frac{r_1 - r_0}{a}\right), \tag{3}$$

$$-\varphi_r = v\Big|_{r=R(t)} = F_1(t), \qquad R(t) = F_2(t) \tag{4}$$

$$v\big(R(t),t\big) \neq dR(t)/t \text{ – проницаемая граница,} \tag{5}$$

здесь t – время; φ – потенциал скорости; $\nu = 1, 2, 3$ – показатель симметрии; $R(t), r_0, r, r_1$ – координаты: подвижных границ, начальная, текущая, точки волновой зоны соответственно; ρ, a – постоянные; v – скорость; P – давление; (5) – условие проницаемости (излучения) подвижной границы. Условия могут быть заданы на подвижной границе – этим определяется класс прямых задач, например, (4). Если условия заданы только в фиксированной точке волновой зоны, то этим определяется класс обратных задач, например, (3). При решении обратных задач необходимо реконструировать значения исследуемых функций в других точках, включая подвижные границы, при этом закон движения границы неизвестен, как правило, нелинеен и подлежит определению. Это традиционное определение прямых и обратных задач. Наличие проницаемости ПГ вносит коррективы в эти понятия, появляются смешанные дополнительные условия [4]. Пусть известно в какой-либо точке волновой зоны r_1 давление $P(r_1,t) = f$, которая может быть аппроксимирована разными способами: элементарными функциями, их комбинациями и т.д. [7][2]. Для общего случая запишем его в виде

$$P(r_1,t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m\,\xi^m, \qquad \xi = t - (r_1 - r_0)/a. \tag{6}$$

Вся информация о том, что возмущения распространяются от проницаемой подвижной границы, содержится в коэффициентах Лагранжа A_m. Используя методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [4,5,7], получим давление и скорость частиц в любых точках [4]. На подвижных границах они имеют вид:

[2] Крутиков В.С. Построение метода и решений импульсных задач механики сплошной среды с подвижными границами / Диссер. д.ф.-м.н. ИГМ НАНУ, Киев. 1995. 343 с. Гл. оппонент академик РАН А.С. Алексеев.

$$P\big(R(t),t\big)=\frac{r_1}{R(t)}\sum_{m=0}^{\infty}A_m\,\xi^m-\frac{1}{2}\rho v^2\big(R(t),t\big);\qquad \xi=t-\frac{R(t)-r_0}{a}, \tag{7}$$

$$\frac{v\big(R(t),t\big)R^2(t)\ \rho}{r_1}=\frac{R(t)}{a}\sum_{m=0}^{\infty}A_m\,\xi^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{m+1}\xi^{m+1}, \tag{8}$$

где $\rho=const$, плотность среды, $v\big(R(t),t\big)$ – скорость частиц среды на проницаемой подвижной границе, при этом $v\big(R(t),t\big)\neq d\,R(t)/\mathrm{d}t$.

Изменение объема в единицу времени $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ по "наблюдаемому" изменению радиуса подвижной границы в рассматриваемом случае будет иметь две составляющие, как и для цилиндрической и плоской симметрии ($\nu=2,1$):

$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=\mathrm{d}V_1/\mathrm{d}t+\mathrm{d}V_2/\mathrm{d}t, \tag{9}$$

где $\mathrm{d}V_1/\mathrm{d}t$ – изменение объема, которое обуславливает изменение скорости частиц среды, соприкасающихся с подвижной границей; $\mathrm{d}V_2/\mathrm{d}t$ – изменение объема, вызванное испарением с внутренней поверхности подвижной границы (плазменного поршня) наблюдаемого радиуса.

Известно физическое свойство [8, стр. 396]: объем жидкости, протекающий через замкнутую поверхность, равен изменению объема в единицу времени, т.е. $\mathrm{d}V_1/\mathrm{d}t=4\pi r^2\,v(r,t)$, где v – соотношение из (8). Оно имеет место в любой точке, включая подвижные границы. Тогда из соотношения (9) можно получить:

$$\begin{aligned}\frac{\left[R^3(t)-r_0^3\right]\rho}{3r_1}&=\frac{R(t)}{a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{m+1}\left(t-\frac{R(t)-r_0}{a}\right)^{m+1}+\\&+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{(m+1)(m+2)}\left(t-\frac{R(t)-r_0}{a}\right)^{m+2}+\frac{V_2\,\rho}{4\pi r_1},\end{aligned} \tag{10}$$

где A_m несут информацию о движении проницаемой границы. Вычисление $R(t)$ из этого «кубического» уравнения производится аналогично, как и по соответствующим формулам работ [4, 5, 9–12], в том числе, когда r_0 и r_1 неизвестны и подлежат определению [11].

Подобные рассуждения проведены и для случая излучающей подвижной границы. Физически понятно, что движение излучающей границы может быть представлено движением в сжимаемой среде системы излучающих источников, находящихся на (связанных с) движущейся поверхности.

На рис. 1 представлено давление (2) на подвижных границах (ПГ): кривая 1 – непроницаемая ПГ: $dR(t)/dt=v\big(R(t),t\big)=350\exp(-\alpha t)$, расчет методом характеристик системы уравнений движения, сплошности и состояния в форме Тэта (Л. И. Седов) [4]; кривая 2 – проницаемая ПГ: $dR(t)/dt>v\big(R(t),t\big)=175\exp(-\alpha t)$; кривая 3 – излучающая ПГ: $dR(t)/dt<v\big(R(t),t\big)=525\exp(-\alpha t)$, $R(t)=r_0+\dfrac{350}{\alpha}\big[1-\exp(-\alpha t)\big]$, $r_0=1\,mm$, $\alpha=1\cdot10^3\ s^{-1}$, $\rho=102\ kgf\cdot s^2/m^4$ – общий для трех случаев закон изменения радиуса ПГ.

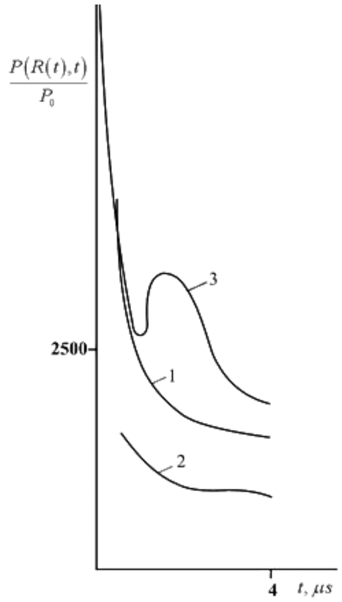

Рис. 1. Изменение давления на подвижной границе и в точке волновой зоны:
1 –на подвижной непроницаемой границе, 2 –на подвижной проницаемой границе,
3 – давление на движущейся излучающей границе (проблема В.Л. Гинзбурга)

Анализ кривых показывает, сколь велики могут быть погрешности определения исследуемых функций по наблюдаемому изменению радиуса подвижной границы. В начальные мгновения, при некоторых соотношениях значений радиуса и скоростей частиц на излучающей ПГ, происходит уменьшение давления, вплоть до отрицательных значений P (кривая 3 значение $P\left(R(t),t\right)$ при $t \approx 1\,\mu s$). Подобная ситуация, когда $v\left(R(t),t\right) > dR(t)/dt$, может возникать в некоторых случаях при реакции экзотермических добавок [13], инициированных электрическим взрывом, лазерным импульсом (Л. М. Лямшев) [14, 15]. Развитые подходы позволяют рассмотреть различные варианты, например, уменьшение во времени радиуса и увеличение (уменьшение) скорости частиц на ПГ.

Анализ результатов показывает, что актуальная фундаментальная физическая проблема (по В. Л. Гинзбургу) подвижных излучающих границ решена впервые и в полном объеме. Полученные точные аналитические соотношения удовлетворительно описывают самые критические, самые интересные, начальные мгновения движения (удара) (В. Д. Кубенко) излучающего источника в сжимаемой среде (задача В. Л. Гинзбурга).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинзбург В.Л.* О физике и астрофизике.– М.: Наука, 1985.– 400 с.
2. *Гринберг Г.А.* // ПММ.– 1967.– Том 31, № 2.– С. 193–203.
3. *Вопросы* математической физики / Под. ред. В.М. Тучкевича.– Л.:Наука, 1976.– 296 с.
4. *Крутиков В.С.* // Докл. РАН.– 1993.– Том 333*,* № 4.– С. 512–514.
5. *Крутиков В.С.* // Докл. РАН.– 1999.– Том 368, № 6.– С. 755–758.

6. *Математическая* энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов.– М.: Сов. Энц., 1982–1983.– 1183 с.
7. *Крутиков В.С.* // Докл. РАН.– 1999.– Том 364, № 1.– С. 17–20.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика, Том VI.– М.: Наука, 1986.– 736 с.
9. *Крутиков В.С.* // Прикл. мат. и механика. 1991.– № 6.– С. 1058–1062.
10. *Крутиков В.С.* // Докл. РАН.– 2006.– Том 406, № 1.– С. 1–5.
11. *Крутиков В.С.* // Труды Акустического симпозиума «КОНСОНАНС-2011».– Киев: ИГМ НАНУ, 2011.– С. 170–176.
12. *Крутиков В.С.* // Письма в ЖТФ.– 2005.– Том 31, вып. 1.– С. 9–16.
13. *Вовченко А.И., Посохов А.А.* Управляемые электровзрывные процессы преобразования энергии в конденсированных средах.– Киев: Наук. думка, 1992.– 168 с.
14. *Наугольных К.А., Рой Н.А.* Электрические разряды в воде.– М.: Наука, 1971.– 141 с.
15. *Крутиков В.С.* // Акуст. журн. 1996.– Том 42, № 4.– С. 534–540.