

УДК 533.65.013.622+51-72

КВАЗІТРИВИМІРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НОРМАЛЬНОГО ТРІПОТЛИВОГО ПОЛЬОТУ ПРУЖНОГО МЕМБРАННОГО ОРНІТОПТЕРА

О. В. Шеховцов[†]

Інститут гідромеханіки НАН України
вул. Марії Капніст, 8/4, 03057, Київ, Україна

[†]E-mail: avshekhovtsov@gmail.com

Отримано 30.08.2024

Теоретико-експериментальне дослідження аеродинаміки мембранного орнітоптера, який махає крилами в режимі нормального тріпотливого польоту з відривом потоку з передніх крайок крил у нерухомому повітрі, здійснено за допомогою удосконаленого методу дискретних вихорів, узагальненого для в'язких вихрових середовищ. При чисельному моделюванні використовувались результати високошвидкісної відеозйомки махів крил орнітоптера. Розв'язок тривимірної задачі зведено до двовимірних розв'язків для перерізів крила орнітоптера – розглядалась квазітривимірна задача динаміки нестисливого в'язкого середовища. У якості частинного (базового) розв'язку кожної з двовимірних задач використовувався вихор Лемба–Озеена – фундаментальний розв'язок узагальненого рівняння Гельмгольца. При цьому ніяких обмежень на числа Рейнольдса та Струхалія, а також кути атаки не накладалося. Досліджено внесок компонент нормальної сили на крилах орнітоптера. З'ясовано, що в коефіцієнті нормальної сили домінує інерційна компонента, внесок якої може перевищувати 100%. Таким чином, природа аеродинамічних сил на крилах пружного мембранного орнітоптера залежить від миттєвої приєднаної маси та визначається циркуляцією прискорення повітря по контуру, прилеглому до крила орнітоптера. Внески обох інших компонент – циркуляційної та вихрової – виявились малими та негативними, незважаючи на інтенсивне вихроутворення поблизу крила. Запропоновано новий кінематичний параметр – нормальне прискорення задньої крайки перерізу крила, взяте з протилежним знаком. З'ясовано, що для максимізації коефіцієнта вертикальної сили необхідно синхронізувати цей параметр із кутом перекладки відповідного перерізу крила. Застосування запропонованого методу дозволяє успішно розв'язувати тривимірні задачі знаходження аеродинамічних характеристик тонких пружних крил, які махають у режимі нормального тріпотливого польоту. Співставлення результатів розрахунку з експериментом показало, що для довільних кутів атаки та довільних чисел Струхалія та Рейнольдса досягається точність порядку 14% для осереднених за період махів аеродинамічних коефіцієнтів сил.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: орнітоптер, тріпотливий політ, пружне крило, удосконалений метод дискретних вихорів, вихор Лемба–Озеена, в'язке вихрове середовище

1. ВСТУП

У цій статті представлено теоретико-експериментальне дослідження аеродинаміки мембранного пружного орнітоптера, який здійснює нормальний тріпотливий політ з відривом потоку з передніх крайок крил у нерухомому в'язкому середовищі. Розроблений підхід полягає у використанні результатів високошвидкісної відеозйомки махів крил орнітоптера для чисельного моделювання аеродинамічних процесів, які відбуваються при цьому. Було досліджено вплив частоти махів на аеродинамічні сили на крилах для випадку вертикальної орієнтації кореневої хорди орнітоптера. За допомогою чисельного моделювання виявлено суттєві особливості в поведінці аеродинамічних сил, вивчено внесок сил інерційної та неінерційної природи, структуру течії біля орнітоптера та кореляції між кінематичними й аеродинамічними параметрами.

Проблема розглядалась у рамках постановки квазітривимірної задачі динаміки нестисливого в'язкого середовища. За допомогою лагранжевого методу дискретних вихорів (МДВ) [1], удосконаленого для нестационарних задач [2] та узагальненого для в'язкого вихрового середовища (УМДВ) [3, 4], її розв'язання було зведено до двовимірних розв'язків для перерізів крила. Процес верифікації запропонованого підходу складався з двох частин: верифікації УМДВ для двовимірних задач і верифікації квазітривимірного підходу шляхом співставлення з експериментальними даними для тривимірного мембранного орнітоптера [5, 6].

Однією з найбільш складних і актуальних задач сучасної гідроаеродинаміки є нелінійна нестационарна задача про дисперсію завихреності, яка безперервно виникає на твердих межах, які рухаються у в'язкому середовищі. Взаємодія вихрових структур з твердими межами ініціює раптові локальні збурення полів тиску. Як наслідок виникають надмірні миттєві динамічні навантаження, які можуть призвести до аварійних ситуацій.

Для загального випадку, коли тверді межі мають змінну в часі геометрію, побудова математичних моделей гідроаеродинамічних процесів, зазвичай, потребує залучення ейлерового підходу розв'язку рівнянь Нав'є–Стокса, який зводиться до спостереження за точками простору та як наслідок – до скінченно-різницевого операторів. Такі моделі, незважаючи на їхню поширеність, мають істотні недоліки: так звану схемну або штучну в'язкість, яка може суттєво вплинути на точність розрахунків, і великі обсяги розрахункового часу (а отже, велику вартість розрахунків).

Існує принципово інший підхід розв'язку рівнянь Нав'є–Стокса – лагранжевий, в основі якого лежить спостереження за частинками середовища. Його застосування призводить до інтегральних рівнянь, які точніші за скінченно-різницево. Окрім того, цей метод значно ощадливіший через те, що він не потребує контролю розрахункового простору, окрім його меж. Виходячи з цього, коректне моделювання руху вільних меж є найважливішим завданням лагранжевих методів, яскравим представником яких є метод дискретних вихорів (МДВ).

Зазвичай МДВ застосовують для моделювання процесів та явищ в ідеальному нестисливому середовищі, яке є безвихровим усюди, за винятком вільних меж. Але у випадку в'язкого середовища дисперсія завихреності здійснюється не тільки за рахунок конвекції, а й за рахунок дифузії. Відомо, що вихрова нитка (вихрова трубка нульового перетину) як окремий випадок вихрової трубки скінченного розміру може існувати й у

в'язкому середовищі. Проте, на відмінну від ідеального середовища, в цьому випадку для підтримки поля швидкості, що описується законом Біо–Савара, до вихрової трубки необхідно безперервно підводити енергію, яка витрачається через дифузію завихреності.

У випадку ідеального баротропного безвихрового поза вихровими нитками середовища, яке рухається в полі консервативних масових сил, рівняння Гельмгольца для дисперсії завихреності (кінематична форма рівняння Нав'є–Стокса) зводиться до закону про вмороженість вихрових ниток у середовище, а рівняння неперервності – до лінійного рівняння Лапласа для потенціалу швидкості. Однак у задачах гідроаеродинаміки, коли в процесі розв'язання необхідно знайти форму вихрової пелени за тілами, які доволі швидко рухаються, та навантаження на них, початково-крайова задача стає нелінійною. При цьому точність її розв'язку вже не визначається тільки точністю розв'язку задачі Коші, а істотно залежить від помилок дискретизації меж, які є помилками вхідних даних для задачі Коші [2].

З метою врахування дифузії завихреності у в'язкому середовищі застосуємо підхід, який уперше було успішно апробовано в роботі [4]. Його принципова відмінність від усіх інших методів полягає в тому, що моделювання дифузії завихреності здійснюється не чисельно, а аналітично. При цьому за частинний (базовий) розв'язок править вихор Лемба–Озеена, який є фундаментальним розв'язком узагальненого рівняння Гельмгольца, а саме, його автомодельним розв'язком для осесиметричного випадку дифузії прямолінійної вихрової нитки [7].

Сама ідея використання в якості базового, фундаментального розв'язку узагальненого рівняння Гельмгольца для в'язкого вихрового середовища (вихору Лемба–Озеена) не нова. Перші спроби її втілення були здійснені Шифером, Ескіназі [8], пізніше – Білоцерківським [9] і Леонардом [10]. Грінгард провів аналіз збіжності обговорюваного методу моделювання дисперсії завихреності, який він назвав «методом ядра, що розпливається», й показав, що процес дифузії завихреності моделюється абсолютно правильно, проте її конвекція – некоректно [11]. Однак жодних оцінок точності методу зроблено не було. Водночас Кіда, Накаїма і Суміцу показали, що даний метод забезпечує достатню точність, щоб розв'язувати за його допомогою практичні задачі [12].

Як відомо, внаслідок нелінійності узагальненого рівняння Гельмгольца суперпозиція його частинних розв'язків може не бути загальним розв'язком, що формально робить задачу некоректною. Більшість найважливіших практичних задач некоректні за Адамаром (оскільки при великих числах Рейнольдса «вмикається» дія нелінійності й починають проявлятися властивості розв'язку, несумісні з визначенням коректності), але можуть бути успішно розв'язані за допомогою сучасних числових методів.

Разом з тим, у роботах [2, 13] показано, що для розв'язання некоректних початково-крайових задач за допомогою МДВ не можна використовувати традиційні методи розв'язання задач Коші, оскільки підвищення порядку точності методу інтегрування може призвести до різкого зниження точності розв'язку всієї початково-крайової задачі. Натомість необхідно регуляризувати розв'язок за допомогою згладжуючого функціоналу, який зменшує локальні помилки дискретизації вихрової пелени – останні є похибками вхідних даних задачі Коші та зазвичай перевершують похибки зрізання на $(1 \dots 4)$ порядки [2]. Це дозволило подолати головну проблему МДВ – істотне завищення значень середніх нормальних сил на пластині при закритичному обтіканні для ідеального

середовища – до 50% при кутах атаки біля 40° та до 25% при куті атаки 90° [13].

Удосконалений МДВ (УМДВ) відкрив також шлях для узагальнення на випадок в'язких вихрових течій. Наприклад, для нестационарного відривного обтікання пластини отримані значення нормальної сили для всього діапазону чисел Рейнольдса та всіх закритичних кутів атаки опинилися в межах похибки експерименту – не більше 8% [13]. Уточнення МДВ стосувалося саме розрахунку конвективної швидкості, що було слабким місцем методу ядра, що розпливається: він давав похибку при порушенні осової симетрії течії, коли починає працювати конвективний член узагальненого рівняння Гельмгольца, відповідальний за нелінійність.

Зазначене уточнення МДВ забезпечило виконання (з точністю до дискретизації в часі та просторі) узагальненої теореми Гельмгольца–Пуанкаре, яка стверджує, що для в'язкої двовимірної течії баротропного середовища в полі консервативних сил вихрові лінії вмерожені в середовище. Це пов'язано з тим, що в такому випадку вектор завихреності виявляється колінеарним вектору лапласіана завихреності. У всіх інших моделях в'язкої вихрової течії виконання цієї теореми потрібно перевіряти, тому що в них, як правило, ототожнюються поняття «переміщення завихреності» й «переміщення вихрового елемента» [14]. Однак, насправді, вихрові елементи повинні рухатися тільки зі швидкістю в'язкого двовимірного нестисливого невагомго середовища в той час, як завихреність – і з конвективною швидкістю середовища, й зі швидкістю дифузії завихреності відносно самого середовища. Саме виконання цих вимог і забезпечує УМДВ завдяки уточненому врахуванню нелінійних конвективних доданків узагальненого рівняння Гельмгольца.

Ще одною безперечною перевагою безпосереднього використання вихору Лемба–Озеена для опису дифузії завихреності перед чисельним моделюванням є те, що він не вимагає додаткових тестових порівнянь з такими відомими аналітичними розв'язками як дифузія вихрового кола та дифузія вихрового круга [7]. Дійсно, лінійність узагальненого рівняння Гельмгольца в осесиметричних випадках гарантовано забезпечує збіжність чисельного розв'язку до аналітичного зі збільшенням кількості дискретних вихорів.

Окрім цього, УМДВ, узагальнений для в'язких вихрових середовищ, забезпечує:

- точне виконання узагальненого рівняння Гельмгольца в центрах вихрових ниток і на нескінченному віддаленні від них;
- точне виконання закону збереження завихреності (закону збереження моменту імпульсу вихору) в межах контурів, які розширюються в середовищі зі швидкістю дифузії завихреності;
- точне виконання узагальненого рівняння Гельмгольца для ізолюваних пар вихрових ниток однакової інтенсивності в середній точці між ними, незалежно від їхніх знаків;
- швидке – порядку $\exp(-r^2)$ – зменшення нев'язки за межами довільних пар вихрових ниток через те, що ця нев'язка залежить від добутку дотичної швидкості на градієнт завихреності.

Це означає, що відхилення від точного розв'язку узагальненого рівняння Гельмгольца в довільному двовимірному випадку носять локальний характер, причому ці локальні помилки не накопичуються з часом. Таким чином, використання фундаментального розв'язку узагальненого рівняння Гельмгольца в якості базового еквівалентне припущенню про те, що нелінійні дифузійні ефекти у в'язкій нестисливій двовимірній течії невагомому середовищі достатньо малі, впливають тільки на локальні характеристики поля завихреності, а значить, ними можна знехтувати.

Апробація УМДВ для класу задач про коливання крила в нерухомому в'язкому нестисливому середовищі з обмеженим рішенням на крайках показала, що ця гіпотеза успішно працює – таким чином було отримано задовільну відповідність між теоретичними та експериментальними даними інших дослідників як для усереднених, так і для миттєвих кінематичних і динамічних характеристик течії та крила. УМДВ, узагальнений для в'язкого вихрового середовища було верифіковано шляхом співставлення з доступними експериментальними даними для багатьох стаціонарних і нестаціонарних задач – відповідні результати та їх обговорення представлено в [4]. Зокрема, досліджено задачу стаціонарного обтікання плоскої пластини, перпендикулярної до потоку в'язкого середовища. Отримані величини середнього коефіцієнта лобового опору виявилися близькими до апроксимаційної формули Елінгтона [15], а також до експериментальних даних, отриманих Дікінсоном та Готсом [16] для діапазону чисел Рейнольдса, що відповідає польоту комах. При цьому розбіжності не перевищували 8% і знаходились у межах експериментальних похибок.

Дікінсон і Готс проводили одночасне вимірювання нестаціонарної підйомної сили, опору й візуалізацію потоку навколо плоскої пластини, що рухається у в'язкому середовищі при $Re = 192$ зі сталим прискоренням від стану спокою до деякої постійної швидкості при фіксованому куті атаки [16]. Ці експерименти також було змодельовано за допомогою УМДВ, узагальненого на випадок в'язкого вихрового середовища [4]. Показано, що часові залежності коефіцієнтів опору та підйомної сили задовільно узгоджуються з експериментальними даними роботи [16]. Обчислені спектри обтікання навколо перерізу крила й вихрові доріжки Кармана добре корелюють з експериментальними картинками візуалізації потоку. В роботі [17] експериментально й чисельно вивчався гармонічний обертально-поступальний рух плоского крила в нерухомому середовищі. Моделювання за допомогою УМДВ розглянутих тут експериментальних режимів коливань також продемонструвало гарну кореляцію між миттєвими коефіцієнтами підйомної сили та сили опору, отриманими різними методами [4].

Аеродинамічні дослідження, присвячені мікроповітряним апаратам, кінематиці крил і мембран в діапазоні від маленьких птахів до великих комах, які зазвичай махають крилами в перехідних режимах обтікання або при низьких числах Рейнольдса, проаналізовано в огляді [18]. Відзначено, що потенціальні можливості й виклики, пов'язані з розробкою мікроповітряних апаратів, ще не розкриті по-справжньому й далекі від усебічного розуміння.

У роботі [19] представлено нову методологію моделювання літального апарата з крилами, що махають, для оптимізації його продуктивності з точки зору підйомної сили та витривалості. Для аеродинамічних прогнозів модель елемента мембранного крила поєднано з моделлю пружної деформації крила, яка враховує вигин і скручування його елементів. В експериментальній роботі [20] з'ясовано, що мембранне крило з відповід-

ними ребрами жорсткості може забезпечити кращу підйомну силу, ніж гнучке крило.

В огляді [21] всебічно проаналізовано дослідження польоту птахів з точки зору аеродинамічних механізмів і чисельного моделювання. Проведено порівняння широко використовуваних методів обчислення. Окремо виділено аеропружні проблеми. Констатовано, що сучасні теоретичні моделі крил, що махають – це в основному двовимірні аеродинамічні профілі або тривимірні геометричні пластини з одним корінним з'єднанням, які все ще дуже відмінні від справжніх пташиних крил. Також зроблено висновок про те, що запровадження відповідної пружності крил може покращити максимальні значення та коефіцієнт корисної дії підйомної сили й тяги, але це залежить від конкретного випадку.

2. ФІЗИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу дослідження аеродинаміки пружного мембранного орнітоптера напівеліптичної форми в плані з розмахом крил $L = 25$ см та загальним подовженням $\lambda = 4.56$, який махає крилами в нерухомому в'язкому середовищі з великими локальними кутами атаки [22], див. Рис. 1 і 2. Кожне крило орнітоптера складалося з тонкого гнучкого прямолінійного лонжерона (передньої крайки) й двох нервюр, з'єднаних тонкою нерозтяжною мембраною. Крила здійснювали симетричні зворотно-обертальні рухи (махи) з частотами $f = 10$ Гц, 15 Гц, 22 Гц у горизонтальній площині навколо спільної кореневої хорди (осі махів), зазнаючи крутки (перекладки локальних хорд) уздовж розмаху. Припустимо, що в'язке середовище D є суцільним і має властивості нестисливості та невагомості – відсутні зовнішні об'ємні сили. У початковий момент часу в усіх точках середовища припускається відсутність вихорів. Крила будемо вважати непроникними, нерозтяжними та нескінченно тонкими.

Попередній аналіз досліджуваної системи показав, що рядом ефектів у ній можна знехтувати внаслідок їхньої малості. Зокрема, до них слід віднести аеродинамічну взаємодію між крилами орнітоптера (можна розглядати махи одного ізольованого крила); деформації лонжерона у вертикальному напрямку; зміну відстані від осі обертання крила до будь-якої точки лонжерона (до локальних площин перекладки $x_{\varphi j} = |OE_j| = l_j = \text{const}$); деформації нервюр і хорд крила, а також їх вихід з локальних площин перекладки; течію вздовж розмаху та індуктивні втрати.

Зроблені припущення дозволяють звести тривимірну зв'язану задачу аеродинаміки та пружності до n двовимірних аеродинамічних задач обтікання прямолінійної пластини з двома ступенями вільності, які описують:

- зворотно-поступальні коливання передньої крайки E_j пластини в горизонтальному напрямку за законом $q_j(t) = l_j \varphi_j(t)$, $0 \leq j \leq n$, де $\varphi_j(t)$ – локальний кут маху;
- зворотно-обертальні коливання пластини навколо цієї крайки, де $\beta_j(t)$ – локальний кут перекладки.

Кут перекладки $\beta_j(t)$ вважається позитивним, якщо розглядати обертання хорди $E_j P_j$ проти годинникової стрілки від кінця осі $x_{\varphi j}$ і приблизно дорівнює куту між поточним положенням хорди та її проекцією на площину $z_{\varphi j} = 0$ (див. Рис. 2). Кінематичні закони зміни локальних кутів $\varphi_j(t)$ і $\beta_j(t)$ кожної секції j крила задаються експериментальними даними [6, 22].

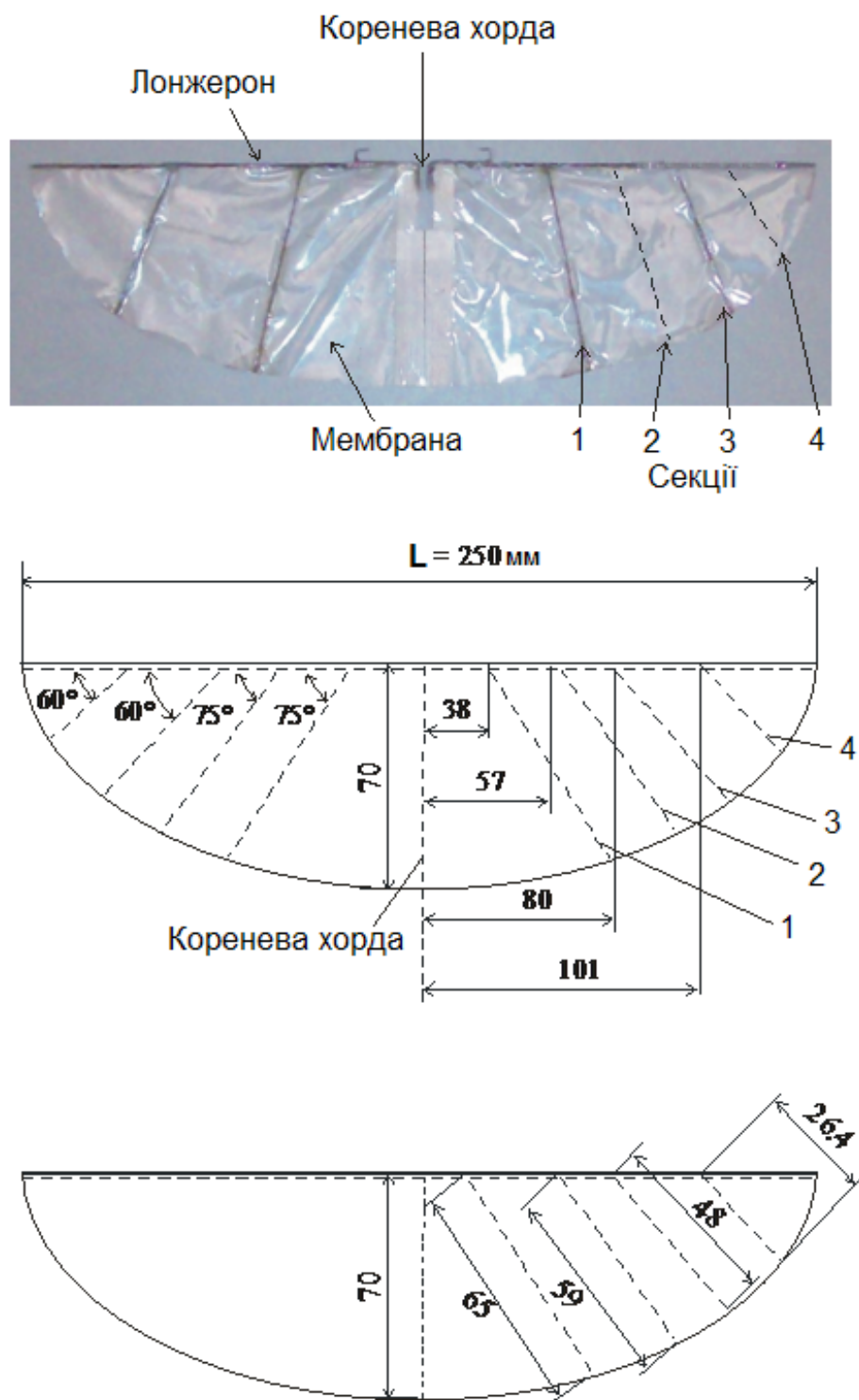


Рис. 1. Загальний вигляд і геометричні параметри досліджуваного мембранного орнітоптера

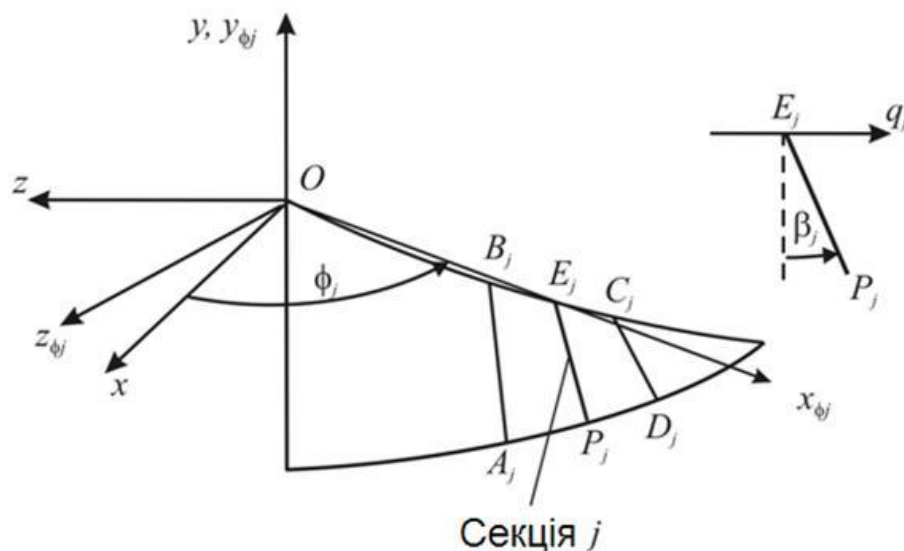


Рис. 2. Уведені системи координат для розрахункової секції крила орнітоптера та її двовимірна кінематична модель

Локальному куту перекладки $\beta_j(t) = 0$ відповідає розташування локальної хорди у вертикальній площині $z_{\phi j} = 0$, а локальному куту махів $\varphi_j(t) = 0$ – розташування точки E_j передньої крайки лонжерона в площині $z = 0$. При цьому крило поділяється на n панелей $A_j B_j C_j D_j$ з площами S_j ($j = 1, n$), див. Рис. 2. Кожна з тривимірних чотирикутних панелей замінюється на двовимірну пластину з хордою $|E_j P_j| = c_j = \text{const}$. Припускається, що частинки повітря рухаються вздовж цих хорд.

Локальний кут атаки для кожної панелі крила визначається як кут між вектором незбуреної відносної швидкості повітря $-\dot{\vec{q}}(\tau)$ в околі передньої крайки відповідної пластини та лінією її хорди. Приймаючи за позитивний кут атаки поворот вектора $-\dot{\vec{q}}(\tau)$ навколо передньої крайки пластини проти годинникової стрілки і врахувавши вихідне положення пластини, отримуємо:

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} -\beta(\tau) + \pi/2, & -\dot{q}(\tau) > 0, \\ -\beta(\tau) - \pi/2, & -\dot{q}(\tau) < 0. \end{cases}$$

Після того, як вихідну тривимірну задачу зведено до n двовимірних задач, останні розв'язують для n секцій. Загальна аеродинамічна сила, яка діє на крила, що махають, вираховується як сума всіх сил, які діють на n панелях. Сформульовані двовимірні задачі було розв'язано за допомогою УМДВ, узагальненого на випадок в'язкого вихрового середовища D [1–4]. Через те, що середовище D в'язке, в загальному випадку на поверхні пластини має виконуватись умова прилипання. Однак, наприклад, у випадку обертальних махів крил комах експериментальні спостереження показують, що внесок сили тертя у головний вектор зовнішніх сил настільки малий, що ним можна знехтувати. Графічно це означає, що головний вектор зовнішніх сил на крилі комахи майже перпендикулярний йому. Саме це й спостерігається на експериментальних діаграмах сил [17].

Окрім того, відомо, що у всіх експериментах з прив'язаними комахами та їх моделя-

ми, подібними за числами Рейнольдса та Струхалю, відрив потоку завжди відбувається тільки з крайок їхніх крил. Це вказує на те, що вторинні вихорі на крилах комах не утворюються. Фізичні умови, які забезпечують такий характер течії, достатньо зрозумілі. Справа в тому, що основний робочий режим роботи крил комах – їхній рух під кутами атаки між 40° і 60° , причому кожен переріз крила знаходиться в оберально-поступальному коливальному русі при числах Рейнольдса від 10^1 до 10^3 . Такі великі кути атаки гарантовано забезпечують відривний режим обтікання всіх крайок, що математично відповідає обмеженому розв'язку на кінцях інтервалу, що розглядається. При таких великих кутах атаки сила тертя різко зменшується, а сила тиску – різко зростає. У свою чергу, при порівняно малих числах Рейнольдса погіршуються умови для турбулізації потоку й виникнення вторинних вихорів.

Оцінка сил, обумовлених тиском повітря на крило для кута атаки 90° становить $C_N = 1.95 + 50/\text{Re}$ [15], а сил, обумовлених тертям на одній стороні крила для кута атаки 0° – $C_f = 0.664/\sqrt{\text{Re}}$ (зауважимо, що потік не потрапляє на іншу сторону через його зрив з усіх крайок крила). Для робочих кутів атаки C_N зменшується на $(15 \dots 30)\%$, а C_f – на $(50 \dots 70)\%$. Таким чином, для робочих кутів атаки та характерних чисел Рейнольдса сили тертя майже на два порядки менші за сили тиску.

У реальному середовищі, незалежно від в'язких властивостей, через неможливість утворення нескінченно високих швидкостей, шари потоку завжди сходять у малих околах гострих крайок крил. Тому в математичних моделях таких потоків слід виконувати постулат Кутта–Жуковського–Чаплигіна про скінченність швидкості потоку в околі всіх гострих крайок крил. Його виконання приводить відповідну математичну постановку до класу задач з обмеженим розв'язком на крайках крил. Виходячи з цього, приймемо до розгляду модель обтікання пластини зі сходом шарів течії з її крайок, що рівносильно виконанню постулату Кутта–Жуковського–Чаплигіна. Також будемо нехтувати ефектами прилипання частинок середовища до поверхні пластини S , що здійснює махи.

При махах пластини епіюра швидкостей потоку, який сходить з її крайок, є несиметричною. Далі, через в'язке тертя між шарами потоку розвивається нестійкість з подальшим виникненням обертового руху рідких частинок, тобто течія стає вихровою. Будемо вважати вихровий шар нескінченно тонким. Тоді з передньої та задньої крайок пластини S , що махає (замінімо її сумарним вихровим шаром), будуть сходити вихрові пелени σ_1 та σ_2 відповідно, точки яких рухаються по траєкторіях рідких частинок у відповідності до узагальненої теореми Гельмгольця–Пуанкаре. Це дає нам право називати вказані пелени вільними. Нормальні компоненти швидкості $\vec{W}$ при переході через них не змінюються, а дотичні зазнають розриву γ :

$$\vec{n}(\vec{r}_0, t) \times [\vec{W}_-(\vec{r}_0, t) - \vec{W}_+(\vec{r}_0, t)] = \vec{\gamma}(\vec{r}_0, t), \quad \vec{r}_0 \in S \cup \sigma = \Sigma. \quad (1)$$

Тут $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$; знак «–» позначає навітряну поверхню пластини, а «+» – підвітряну. Зазначимо, що γ має фізичний зміст погонної вихрової інтенсивності або щільності вихрового шару.

Оскільки середовище в'язке, циркуляція швидкості по рідких контурах не зберігається. Це обумовлено тим, що завихреність вже не зосереджена увесь час у вільних вихрових пеленах, а поширюється відносно середовища з плином часу з певною швидкістю дифузії $\vec{V}_d$.

Дисперсія завихреності в нестисливому в'язкому середовищі описується узагальненим рівнянням Гельмгольца, яке у двовірному випадку має вигляд

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + W_x \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x} + W_y \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial y^2} \right). \quad (2)$$

Тут

$$\vec{\Omega} = \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \right) \vec{k},$$

а ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості середовища.

Для випадку ізольованої прямолінійної вихрової нитки з циркуляцією $\vec{\Gamma}_0$ рівняння (2) має фундаментальний автомодельний розв'язок [7]

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{\Gamma}_0}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right), \quad (3)$$

справедливий для $t > 0$. Це означає, що відразу після вилучення джерела завихреності в усьому об'ємі в'язкого середовища миттєво виникає зазначений розподіл завихреності, ядро якого починає дифундувати відносно частинок середовища в радіальному напрямку зі швидкістю $\vec{V}_d$:

$$\vec{V}_d = -\nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega} = \frac{\vec{r}}{2t}. \quad (4)$$

Вираз (4) впливає з рівняння (2), перетвореного до вигляду

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \left[\left(\vec{W} - \nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega} \right) \cdot \nabla \right] \vec{\Omega} = 0. \quad (5)$$

Аналізуючи розв'язок (3), можна бачити, що довільній послідовності фіксованих кіл з радіусами $\vec{r}_{m1} < \vec{r}_{m2} < \vec{r}_{m3} \dots$ відповідає послідовність моментів часу $t_{m1} < t_{m2} < t_{m3} \dots$ таких, що для кожного $\vec{r}_{mi}$ у момент $t_{mi} = \vec{r}_{mi}^2 / (4\nu)$ завихреність в точках кола досягає свого максимуму, причому $\Omega_{m1} > \Omega_{m2} > \Omega_{m3} \dots$. Таким чином, моменти t_{mi} – це послідовні часи проходження максимуму (ядра) завихреності, яке поширюється зі швидкістю

$$\dot{r}_m = \left(\frac{\nu}{t_m} \right)^{1/2} = \frac{2\nu}{r_m}. \quad (6)$$

З іншого боку, згідно з (4) справедливо

$$\vec{V}_d = \frac{\vec{r}_m}{2t_m} = \frac{2\nu \vec{r}_m}{\vec{r}_m^2}. \quad (7)$$

Отже, $\vec{V}_d = \dot{\vec{r}}_m$.

Тепер покажемо, що циркуляція швидкості по колах з радіусами $\vec{r}_m = \vec{r}_m(t_m)$ – тобто по контурах C_m , які розширюються зі швидкістю дифузії $\vec{V}_d$ відносно середовища, – не змінюється з плином часу. Враховуючи, що $4\nu t_m = \vec{r}_m^2$, отримуємо:

$$\vec{\Gamma}_m = \vec{k} \oint_{C_m} \vec{V}_m \cdot \delta \vec{r}_m = 2\pi \vec{r}_m \times \vec{V}_m = 2\pi \vec{r}_m \times \frac{\vec{\Gamma}_0 \times \vec{r}_m}{2\pi \vec{r}_m^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\vec{r}_m^2}{4\nu t_m}\right) \right] = \vec{\Gamma}_0 (1 - e^{-1}). \quad (8)$$

Таким чином, циркуляція швидкості по зазначених контурах і, як наслідок, сумарна завихреність в межах свого ядра $\vec{r} = \vec{r}_m$, яке поширюється відносно в'язкого середовища з радіальною швидкістю дифузії $\vec{V}_d = \vec{r}_m$, дійсно зберігаються.

Розподіл швидкості, відповідний автомодельному розподілу завихреності (3), має вигляд [7]

$$\vec{W} = \frac{\vec{\Gamma}_0 \times \vec{r}}{2\pi\vec{r}^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4\nu t}\right) \right]. \quad (9)$$

Поле швидкості (9), а також суперпозиція полів швидкості від будь-якого скінченного числа прямолінійних вихрових ниток точно задовольнятиме рівняння неперервності

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Окрім того, поля (3) і (9) для будь-якого моменту часу точно задовольняють рівняння дисперсії завихреності (2) в центрах вихрових ниток, а також нескінченно далеко від них. У решті точок середовища суперпозиція полів швидкості від скінченного числа прямолінійних вихрових ниток, а також відповідних полів завихреності задовольнятимуть рівняння дисперсії завихреності (2) наближено.

3. ФОРМУЛЮВАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Сформулюємо початково-крайову задачу для знаходження загального розв'язку узагальненого рівняння Гельмгольца (2) в разі коливань пластини під довільними закритичними кутами атаки, з урахуванням прийнятих спрощень.

Замість умови прилипання для даного класу задач достатньо задавати умову непроникності пластини, нехтуючи ефектами тертя [17]:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{W}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t)) = \vec{W}^*(\vec{r}_0(t)) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t)) \quad \forall t, \quad \vec{r}_0 \in S \setminus (\vec{r}_1 \cup \vec{r}_2), \quad \vec{r} \in D. \quad (11)$$

Тут $\vec{W}^*$ – вектор швидкості точок пластини; $\vec{r}_1$ – радіус-вектор передньої крайки пластини; $\vec{r}_2$ – радіус-вектор задньої крайки пластини; $\vec{n}$ – вектор нормалі до пластини.

Умова руху вихрових пелен σ_1 і σ_2 по траєкторіям рідких часток має вигляд

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{W}(\vec{r}, t) = \vec{W}(\vec{r}_0(t, \tilde{t}), t) \quad t \geq \tilde{t}, \quad \vec{r}_0 \in \sigma, \quad \vec{r} \in D, \quad (12)$$

де $\vec{W}$ – вектор швидкості точок вихрових пелен; $\tilde{t}$ – час, коли $\vec{r}_0 = \vec{r}_k$ ($k = 1, 2$).

Умова загасання збурень на нескінченному віддаленні від пластини та вихрових пелен формулюється так:

$$\lim_{\vec{r} - \vec{r}_0 \rightarrow \infty} \vec{W}(\vec{r}, t) = 0 \quad \forall t, \quad \vec{r} \in D, \quad \vec{r}_0 \in S \cup \sigma. \quad (13)$$

Умова існування розв'язку зовнішньої крайової задачі (11)–(13) для рівняння (2) впливає з закону збереження маси всередині межі S (у загальному випадку – довільної замкненої). У двовимірному випадку для нестисливого середовища це еквівалентно

збереженню площі всередині непроникного контуру S або нульовому балансу потоку через поверхню пластини:

$$\oint_S \vec{W}^*(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t)) ds = 0 \quad \forall t, \quad \vec{r}_0 \in S. \quad (14)$$

З урахуванням прийнятих обмежень, ця умова буде виконуватися для будь-якого моменту часу, тобто існування розв'язку крайової задачі (11)–(13) для рівняння (2) забезпечено.

Оскільки у двовимірному випадку область D двозв'язна, то циркуляція швидкості по замкненому контуру C , що охоплює межу $S \cup \sigma$, в загальному випадку може бути відмінною від нуля. Без обмеження загальності, за C можна взяти нескінченно віддалений контур, циркуляція по якому буде сталою, відповідно до рівняння (8). Це призводить до такої умови забезпечення єдиності розв'язку поставленої задачі:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} \oint_C \vec{W}(\vec{r}, t) \cdot \delta \vec{r} = \text{const} \quad \forall t, \quad \vec{r} \in C \in D. \quad (15)$$

В процесі розв'язку покладемо $\text{const} = 0$.

Задача Коші для знаходження форми вільних вихрових пелен σ_1 і σ_2 у довільний момент часу t має вигляд:

$$\begin{cases} \vec{r}_0(t, \tilde{t}) = \vec{r}_k(\tilde{t}), & t = \tilde{t}, \quad k = 1, 2, \\ \frac{d\vec{r}_0(t, \tilde{t})}{dt} = \vec{W}(\vec{r}_0(t, \tilde{t}), t), & t > \tilde{t}, \end{cases} \quad (16)$$

де $\vec{r}_0 \in \sigma$.

Для зовнішньої початково-крайової задачі (2), (11)–(16) початковими умовами будуть відоме розташування пластини та відсутність вихрових пелен в момент $t = 0$:

$$S \cup \sigma = S, \quad t = 0. \quad (17)$$

Швидкості точок вільних вихрових пелен, які входять в рівняння (12) та (16), є функціоналами від усіх попередніх положень меж S та σ , причому форму вихрових пелен σ_1 і σ_2 необхідно знаходити в процесі розв'язання задачі. Виходячи з цього, зовнішня початково-крайова задача (2), (11)–(17) є нелінійною.

4. ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗА ДОПОМОГОЮ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ФОРМУЛИ КОШІ-ЛАГРАНЖА

Після розв'язання кінематичної задачі (2), (11)–(17), використовуючи узагальнену формулу Коші–Лагранжа [3, 23], можна визначити поле тиску навколо пластини, що рухається за довільним законом у в'язкому нестисливому вихровому середовищі, та її динамічні характеристики.

Уперше формулу для визначення коефіцієнта тиску в змішаній потенційно-вихровий області ідеального нестисливого середовища в неінерційній системі координат було отримано в статті [3]. Через кілька років у роботі [23] було запропоновано аналогічну формулу, однак у більш універсальному вигляді, який дозволяв розраховувати поля тиску

поза групою тіл довільної форми. Пізніше в дослідженні [14] було показано, що ця формула справедлива і для в'язких течій. Наведемо її в інтегральній безрозмірній формі для випадку, коли швидкість потоку на нескінченності дорівнює нулю:

$$C_P(\vec{r}, \tau) = 2 \left(\int_{\Sigma} \frac{d\vec{r}_0}{d\tau} \cdot \vec{w}(\vec{r}, \vec{r}_0, \tau) d\vec{r}_0 + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial \Gamma(\vec{r}_0, \tau)}{\partial \tau} \alpha(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{r}^*) d\vec{r}_0 \right) - \vec{W}^2(\vec{r}, \tau). \quad (18)$$

Тут $\vec{r} \in D$, τ – безрозмірний час; $\vec{w}$ – швидкість, що індукується вихровим елементом в розрахунковій точці; Γ – циркуляція вихрового елемента ($\Gamma > 0$ – за годинниковою стрілкою); α – кут, під яким видно з точки $\vec{r}$ лінію, що сполучає точки $\vec{r}_0$ та довільну точку $\vec{r}^*$, таку, що $\vec{r}_0 - \vec{r}^* \in S$ [23]. Штрих у співвідношенні (18) означає, що диференціювання здійснюється в системі координат, пов'язаній з рухомою пластинною.

При розрахунку навантажень на пластині за характерний лінійний розмір виберемо довжину хорди розрахункової секції крила c_j , а за характерну швидкість – величину

$$W_C = Lf\Phi,$$

де $\Phi = \varphi_{0\max} - \varphi_{0\min}$ – амплітуда махів прикореневої секції крила орнітоптера. Це дозволить у подальшому провести порівняння числових результатів з експериментальними даними [6].

Застосуємо формулу (18) до нижньої та верхньої поверхонь пластини, враховуючи, що абсолютна швидкість $\vec{W}$ формується як сума переносної $\vec{W}^*$ та відносної $\vec{W}_r$ компонент, беручи до уваги співвідношення (1), взаємозв'язок

$$\frac{1}{2} \left(\vec{W}_-(\vec{r}_0, \tau) + \vec{W}_+(\vec{r}_0, \tau) \right) = \vec{W}(\vec{r}_0, \tau), \quad \vec{r}_0 \in \Sigma, \quad (19)$$

а також те, що $\Delta\alpha = 2\pi$ при обході контуру пластини від $\vec{r}_{0-}$ до $\vec{r}_{0+}$. У результаті отримуємо формулу для перепаду коефіцієнту тиску на пластині, яка збігається з аналогічним виразом для випадку ідеального середовища, потенційного поза вихровими поверхнями:

$$\Delta C_p(\vec{r}, \tau) = 2 \left[\vec{\gamma} \times \vec{n} \cdot \left(\vec{W} - \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_{\sigma_1} \vec{\gamma}_0 \times \vec{n} \cdot \delta \vec{r}_0 + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{\gamma} \times \vec{n} \cdot \delta \vec{r}_0 \right) \right]. \quad (20)$$

Тут $\vec{n}$ – вектор нормалі; $\vec{\gamma}$ – вектор безрозмірної щільності сумарного вихрового шару пластини S ; $\vec{\gamma}_0$ – вектор безрозмірної щільності вільного вихрового шару σ_1 в момент його сходу з передньої крайки пластини. Для коефіцієнта нормальної сили на прямолінійній пластині S матимемо:

$$C_n(\tau) = \int_S \Delta C_p(\vec{r}, \tau) d\vec{r}. \quad (21)$$

Таким чином, застосування узагальненої формули Коші–Лагранжа (18) для розрахунку перепаду тиску на пластині з урахуванням властивостей вихрового шару (1)

і (19) для випадку, коли пластина припускається нескінченно тонкою, призводить до виразу (20), лінійного відносно абсолютної швидкості $\vec{W}$. З іншого боку, швидкість $\vec{W}$ будь-якої точки середовища D можна представити у вигляді суми збуреної швидкості $\vec{W}$ від сумарної вихрової пелени, яка моделює тіло, що обтікається, та збуреної швидкості $\vec{W}$ від всіх вихрових пелен, що зійшли з тіла в потік. Це дає можливість представити коефіцієнт нормальної сили у вигляді суми трьох компонент:

- інерційної:

$$C_{ni}(\tau) = 2 \int_S \frac{\partial'}{\partial \tau} \left(\int_{\sigma_1} \vec{\gamma}_0 \times \vec{n} \cdot \delta \vec{r}_0 + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{\gamma} \times \vec{n} \cdot \delta \vec{r}_0 \right) dr; \quad (22)$$

- циркуляційної:

$$C_{nc}(\tau) = 2 \int_S \left[\vec{\gamma} \times \vec{n} \cdot \left(\vec{W} - \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right) \right] dr; \quad (23)$$

- вихрової:

$$C_{nv}(\tau) = 2 \int_S \vec{\gamma} \times \vec{n} \cdot \vec{W} dr. \quad (24)$$

Запропоноване розділення сил має досить ясну фізичну основу. Так, циркуляційна компонента (23) – це аналог квазістаціонарної сили Жуковського для нормальної сили й визначається миттєвими значеннями циркуляції по контуру, прилеглому до пластини (без урахування вихорів, що зійшли у потік). Інерційна компонента (22) відповідає складовій, яка залежить від миттєвої приєднаної маси пластини й визначається циркуляцією прискорення. Вихрова ж (індуктивна) компонента (24) визначається поточними величиною й розподілом завихреності навколо пластини [24, 25].

Вертикальна й горизонтальна миттєві компоненти коефіцієнта нормальної сили в системі координат xuz виражаються таким чином (Рис. 2):

$$C_y(\tau) = C_n(\tau) \sin \beta(\tau), \quad (25)$$

$$C_x(\tau) = C_n(\tau) \cos \beta(\tau) \cos \varphi(\tau). \quad (26)$$

Інтегрування миттєвих коефіцієнтів сил по m періодах махів дає осереднені за період коефіцієнти сил для j -ої секції крила орнітоптера:

$$C_n = \frac{1}{mT} \int_{kT}^{T(k+m)} C_n(\tau) d\tau, \quad (27)$$

$$C_y = \frac{1}{mT} \int_{kT}^{T(k+m)} C_y(\tau) d\tau, \quad (28)$$

$$C_x = \frac{1}{mT} \int_{kT}^{T(k+m)} C_x(\tau) d\tau. \quad (29)$$

Тут $T = W_c/(fc)$ – тривалість одного періоду маху.

Аеродинамічні коефіцієнти панелей крила орнітоптера й відповідних двовимірних секцій можна вважати однаковими. Тоді аеродинамічні сили, які діють на j -ій панелі, можна отримати множенням аеродинамічних коефіцієнтів для цієї панелі на її площу ΔS_j та швидкісний напір. Результируюча аеродинамічна сила на орнітоптері є сумою сил, які діють на всіх його панелях, а отже, вирази для компонент аеродинамічних коефіцієнтів для всього орнітоптера мають вигляд:

$$C_Y = \frac{1}{S} \sum_{j=0}^n C_{yj} \Delta S_j, \quad (30)$$

$$C_X = \frac{1}{S} \sum_{j=0}^n C_{xj} \Delta S_j, \quad (31)$$

де $S = \sum_{j=0}^n \Delta S_j$. Таким чином, компоненти аеродинамічних коефіцієнтів орнітоптера вираховуються за формулою середнього арифметичного зваженого, де в ролі вагових коефіцієнтів виступають відношення площ панелей до площі всього крила.

5. ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ДО СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Закон далекодії для індукованого поля конвективної окружної швидкості від прямолинійної вихрової нитки у в'язкому середовищі (9) відрізняється від закону Біо–Савара множником для циркуляції:

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{\vec{r}^2}{4\nu t} \right) \right], \quad (32)$$

який забезпечує її зменшення з плином часу внаслідок дифузійного розтікання ядра завихреності з радіальною швидкістю $\vec{V}_d$ (4), (7) за заздалегідь відомим законом. Ця обставина в сукупності з доведеною раніше властивістю збереження циркуляції (8) по контурах, що розширюються зі швидкістю дифузії (а отже, й по нескінченно віддаленому контуру), дозволяє звести початково-крайову задачу (11)–(17) для вихрової течії в'язкого нестисливого середовища, яке описується узагальненим рівнянням Гельмгольця (2), до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь із початковими даними для щільності вихрового шару γ (1), безперервно розподіленого по контуру $S \cup \sigma$ в класі обмежених на кінцях інтервалу S функцій.

У відповідності з властивостями вихрового шару (1), (19) – аналогами формул Сохоцького–Племеля – й відомим частинним розв'язком (9) рівняння (2), який водночас є фундаментальним розв'язком рівняння неперервності (10), безперервний розподіл щільності вихрового шару по контуру пластини S і по контурах вільних вихрових пелен σ_1 ,

σ_2 породжує безрозмірні граничні інтегральні вирази для швидкості на цих межах, а саме:

$$\begin{aligned} \vec{W}_{\pm}(\vec{r}_0(\tau), \tau) = & \frac{1}{2\pi} \int_S \gamma(\vec{r}(\tau), \tau) \frac{[y_0(\tau) - y(\tau)]\vec{i} - [x_0(\tau) - x(\tau)]\vec{j}}{[x_0(\tau) - x(\tau)]^2 + [y_0(\tau) - y(\tau)]^2} dr + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(\tau, \tilde{\tau})) \frac{[y_0(\tau) - y(\tau, \tilde{\tau})]\vec{i} - [x_0(\tau) - x(\tau, \tilde{\tau})]\vec{j}}{[x_0(\tau) - x(\tau, \tilde{\tau})]^2 + [y_0(\tau) - y(\tau, \tilde{\tau})]^2} \times \\ & \times \left[1 - \exp \left\{ -\frac{[x_0(\tau) - x(\tau, \tilde{\tau})]^2 + [y_0(\tau) - y(\tau, \tilde{\tau})]^2}{4\text{Re}(\tau - \tilde{\tau})} \right\} \right] dr \mp \\ & \mp \frac{1}{2} \vec{m}(\vec{r}_0(\tau)) \gamma(\vec{r}_0(\tau), \tau), \quad \vec{r}_0 \in S, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \vec{W}_{\pm}(\vec{r}_0(\tau, \tilde{\tau}), \tau) = & \frac{1}{2\pi} \int_S \gamma(\vec{r}(\tau), \tau) \frac{[y_0(\tau, \tilde{\tau}) - y(\tau)]\vec{i} - [x_0(\tau, \tilde{\tau}) - x(\tau)]\vec{j}}{[x_0(\tau, \tilde{\tau}) - x(\tau)]^2 + [y_0(\tau, \tilde{\tau}) - y(\tau)]^2} dr + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(\tau, \tilde{\tau})) \frac{[y_0(\tau, \tilde{\tau}) - y(\tau, \tilde{\tau})]\vec{i} - [x_0(\tau, \tilde{\tau}) - x(\tau, \tilde{\tau})]\vec{j}}{[x_0(\tau, \tilde{\tau}) - x(\tau, \tilde{\tau})]^2 + [y_0(\tau, \tilde{\tau}) - y(\tau, \tilde{\tau})]^2} \times \\ & \times \left[1 - \exp \left\{ -\frac{[x_0(\tau, \tilde{\tau}) - x(\tau, \tilde{\tau})]^2 + [y_0(\tau, \tilde{\tau}) - y(\tau, \tilde{\tau})]^2}{4\text{Re}(\tau - \tilde{\tau})} \right\} \right] dr \mp \\ & \mp \frac{1}{2} \vec{m}(\vec{r}_0(\tau, \tilde{\tau})) \gamma(\vec{r}_0(\tau, \tilde{\tau})), \quad \vec{r}_0 \in \sigma. \end{aligned} \quad (34)$$

Тут $\vec{m}$ – вектор дотичної; $\tilde{\tau}$ – час, коли $\vec{r} \vee \vec{r}_0 \in S$.

Урахувавши співвідношення (19), із формули (33) легко отримати вираз для швидкості в приєднаному вихровому шарі пластини S . Підставивши його в умову непроницності пластини (11), отримаємо таке безрозмірне сингулярне інтегральне рівняння:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_S \gamma(\vec{r}(\tau), \tau) \frac{[y_0(\tau) - y(\tau)]n_x(\vec{r}_0(\tau)) - [x_0(\tau) - x(\tau)]n_y(\vec{r}_0(\tau))}{[x_0(\tau) - x(\tau)]^2 + [y_0(\tau) - y(\tau)]^2} dr = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(\tau, \tilde{\tau})) \frac{[y_0(\tau) - y(\tau, \tilde{\tau})]n_x(\vec{r}_0(\tau)) - [x_0(\tau) - x(\tau, \tilde{\tau})]n_y(\vec{r}_0(\tau))}{[x_0(\tau) - x(\tau, \tilde{\tau})]^2 + [y_0(\tau) - y(\tau, \tilde{\tau})]^2} \times \\ & \times \left[1 - \exp \left\{ -\frac{[x_0(\tau) - x(\tau, \tilde{\tau})]^2 + [y_0(\tau) - y(\tau, \tilde{\tau})]^2}{4\text{Re}(\tau - \tilde{\tau})} \right\} \right] dr + \\ & + \vec{W}^*(\vec{r}_0(\tau)) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(\tau)), \quad \vec{r}_0 \in S \setminus (\vec{r}_1 \cup \vec{r}_2). \end{aligned} \quad (35)$$

Сингулярні інтеграли в (35) слід розуміти в сенсі головного значення Коші. Позитивний обхід циркуляції прийнято за годинниковою стрілкою.

Умова єдиності розв'язку сингулярного інтегрального рівняння (35) збігається з умовою єдиності розв'язку зовнішньої початково-крайової задачі (2), (11)–(17). Зі співвідношень (34) й (19) можна отримати вираз для швидкості у області D . Підставивши його

в умову єдиності (15), маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{r}_0 \rightarrow \infty} \oint_C \left\{ \int_S \gamma(\vec{r}(\tau), \tau) \frac{[y_0 - y(\tau)]\vec{i} - [x_0 - x(\tau)]\vec{j}}{[x_0 - x(\tau)]^2 + [y_0 - y(\tau)]^2} dr + \right. \\ \left. + \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(\tau, \tilde{\tau})) \frac{[y_0 - y(\tau, \tilde{\tau})]\vec{i} - [x_0 - x(\tau, \tilde{\tau})]\vec{j}}{[x_0 - x(\tau, \tilde{\tau})]^2 + [y_0 - y(\tau, \tilde{\tau})]^2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \exp \left(-\frac{[x_0 - x(\tau, \tilde{\tau})]^2 + [y_0 - y(\tau, \tilde{\tau})]^2}{4\text{Re}(\tau - \tilde{\tau})} \right) \right) dr \right\} \cdot \delta \vec{r}_0 = 0, \\ \forall \tau, \quad \vec{r}_0 \in C \in D. \end{aligned} \quad (36)$$

Отримавши зі співвідношень (34) і (19) вирази для швидкостей у вільних вихрових парах σ_1 і σ_2 , запишемо задачу Коші (16), (17) у безрозмірному інтегро-диференціальному вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{r}_0(\tau, \tilde{\tau}) &= \vec{r}_k(\tilde{\tau}), \quad k = 1, 2, & \tau = \tilde{\tau}, \quad \vec{r}_0 \in \sigma; \\ \frac{d\vec{r}_0(\tau, \tilde{\tau})}{d\tau} &= \frac{1}{2\pi} \int_S \gamma(\vec{r}(\tau), \tau) \frac{[y_0(\tau, \tilde{\tau}) - y(\tau)]\vec{i} - [x_0(\tau, \tilde{\tau}) - x(\tau)]\vec{j}}{[x_0(\tau, \tilde{\tau}) - x(\tau)]^2 + [y_0(\tau, \tilde{\tau}) - y(\tau)]^2} dr + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(\tau, \tilde{\tau})) \frac{[y_0(\tau, \tilde{\tau}) - y(\tau, \tilde{\tau})]\vec{i} - [x_0(\tau, \tilde{\tau}) - x(\tau, \tilde{\tau})]\vec{j}}{[x_0(\tau, \tilde{\tau}) - x(\tau, \tilde{\tau})]^2 + [y_0(\tau, \tilde{\tau}) - y(\tau, \tilde{\tau})]^2} \times \\ &\times \left[1 - \exp \left\{ -\frac{[x_0(\tau, \tilde{\tau}) - x(\tau, \tilde{\tau})]^2 + [y_0(\tau, \tilde{\tau}) - y(\tau, \tilde{\tau})]^2}{4\text{Re}(\tau - \tilde{\tau})} \right\} \right] dr, \quad \tau > \tilde{\tau}, \quad \vec{r}_0 \in \sigma. \end{aligned} \right. \quad (37)$$

Розв'язавши спільно систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (35)–(37) із початковими даними (17) у класі функцій, обмежених на кінцях інтервалу, знайдемо розподіл щільності вихрового шару, якій замінює пластину S для кожного моменту часу, а також щільності вихрового шару, який замінює вільні вихрові пелени σ_1 і σ_2 . Знання цих величин дає можливість знайти поле течії у всій області D .

Розв'язання будемо здійснювати лагранжевим удосконаленим методом дискретних вихорів, узагальненим для в'язких вихрових середовищ [1–4].

6. РЕЗУЛЬТАТИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Квазітривимірне чисельне моделювання течії навколо пари крил пружного мембранного орнітоптера напівеліптичної форми в плані, які махають у нерухомому в'язкому середовищі з частотами $f = 10, 15$ і 22 Гц, було проведено для випадку вертикальної орієнтації кореневої хорди орнітоптера та махів крил у горизонтальній площині. Вказаний режим моделює нормальний тріпотливий політ з відривом потоку з передніх крайок крил, при якому для компонент коефіцієнта нормальної сили секцій орнітоптера справедливо $C_{y0} = 0$, $C_{xi} = 0 \quad \forall i$.

Табл. 1. Числа Рейнольдса для кожної з секцій крила

Частота, Гц	Re _j			
	секція 1	секція 2	секція 3	секція 4
10	$1.2 \cdot 10^4$	$1.1 \cdot 10^4$	$9.0 \cdot 10^3$	$5.0 \cdot 10^3$
15	$1.8 \cdot 10^4$	$1.6 \cdot 10^4$	$1.3 \cdot 10^4$	$7.4 \cdot 10^3$
22	$2.7 \cdot 10^4$	$2.4 \cdot 10^4$	$2.0 \cdot 10^4$	$1.1 \cdot 10^4$

Табл. 2. Розрахункові та експериментальні значення осереднених за період махів коефіцієнтів вертикальної аеродинамічної сили для окремих секцій і крила в цілому

Частота, Гц	Розрахунок [22]					Експеримент [6] C _Y	Різниця, %
	C _{y1}	C _{y2}	C _{y3}	C _{y4}	C _Y		
10	0.370	0.764	1.175	1.062	0.518	0.694	25.4
15	0.506	1.038	1.546	1.408	0.693	0.703	1.4
22	0.533	1.024	1.798	1.317	0.729	0.556	–31.1

Згідно з запропонованим підходом до розв’язання даної тривимірної задачі крило було поділено на п’ять панелей з індексами від 0 до 4. Їхні площі були 22.1 см², 15.6 см², 13 см², 11 см² і 6.1 см² відповідно. Кінематичні дані для чотирьох секцій крила взято з експерименту [6, 22], див. Рис. 1. Панель і секція з індексом $j = 0$ відповідають кореневій хорді орнітоптера. Значення розрахункових параметрів для формул (27)–(31) були такими: $n = 4$, $k = 1$, $m = 17$. Величини чисел Рейнольдса для кожної з секцій крила наведено в Табл. 1. При цьому коефіцієнт кінематичної в’язкості був $\nu = 1.68 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Для випадку махів крил орнітоптера в нерухомому в’язкому середовищі з частотою $f = 22$ Гц для середнього перерізу кожного крила (секція 2) представлені експериментальні значення й апроксимаційні криві: для кута маху $\varphi(t)$ – на Рис. 3 і для кута перекладки $\beta(t)$ – на Рис. 4. Апроксимацію було здійснено за допомогою зрізаного ряду Фур’є [6, 22].

Результати чисельних розрахунків миттєвого коефіцієнта нормальної сили $C_n(\tau)$ та його інерційної компоненти $C_{ni}(\tau)$ для секції 2 крила орнітоптера представлено на Рис. 5. Вони відповідають першому періоду махів, тому всі навантаження починаються з нульових значень. У вихрових потоках миттєві приєднані маси залежать не тільки від форми тіла й миттєвого вектора його прискорення, а й від інтенсивності та розташування вихорів навколо тіла, яке рухається нестационарно. При цьому стаціонарний індуктивний ефект локального зменшення тиску, викликаний вихровим рухом середовища, може бути малим, або навіть мати протилежний знак. Якщо ж негативний внесок у тиск на тілі дає не тільки вихрова, а й циркуляційна складова, то інерційна компонента може перевищувати 100%, див. Рис. 5.

У Табл. 2 наведено результати розрахунків вертикальної компоненти коефіцієнта нормальної сили C_{yj} для двовимірних перерізів крил орнітоптера за формулою (28) і коефіцієнта вертикальної аеродинамічної сили C_Y для всього орнітоптера за формулою (30), осереднених за період махів [22]. У роботі [6] осереднену за період махів вертикальну аеродинамічну силу Y було виміряно в аеродинамічній трубці на моделі орнітоптера. Значення її коефіцієнта, визначеного як $C_Y = Y/(0.5\rho W_c^2 S)$, також пред-

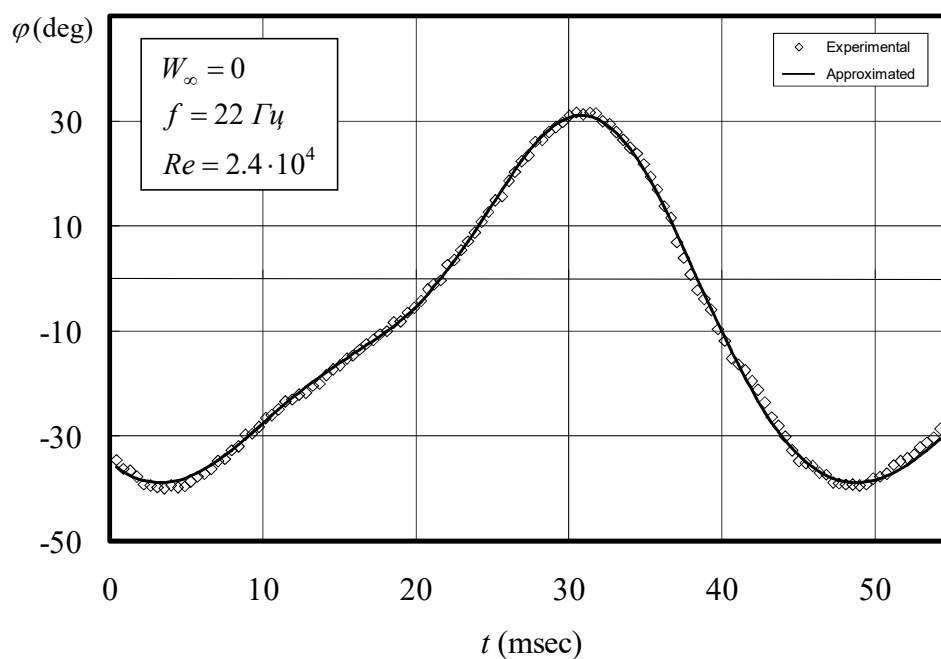


Рис. 3. Експериментальні значення й апроксимаційна крива для кута маху секції 2 орнітоптера для частоти махів $f = 22 \text{ Гц}$

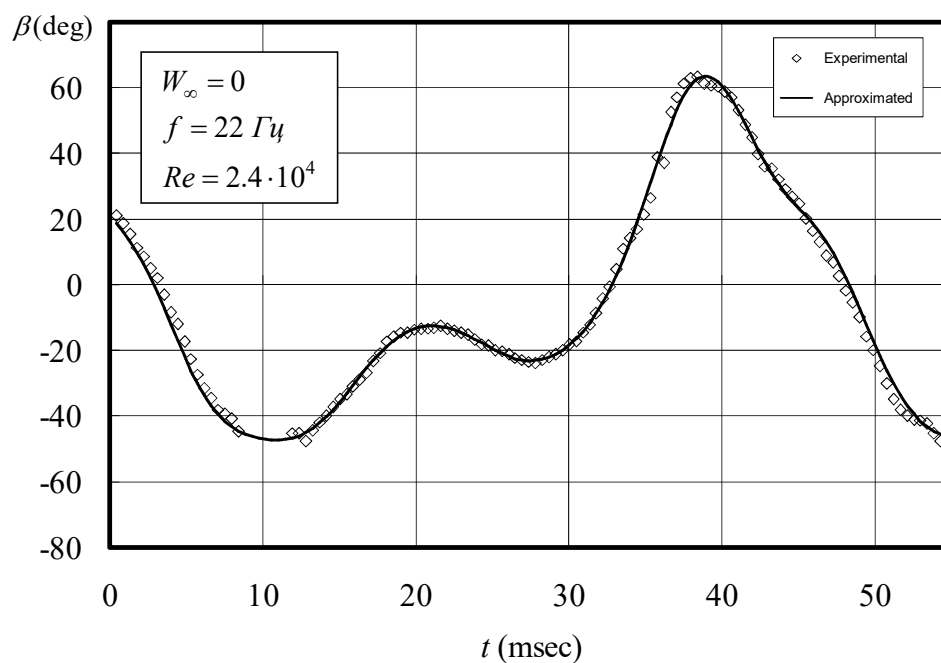


Рис. 4. Експериментальні значення й апроксимаційна крива для кута перекладки секції 2 орнітоптера для частоти махів $f = 22 \text{ Гц}$

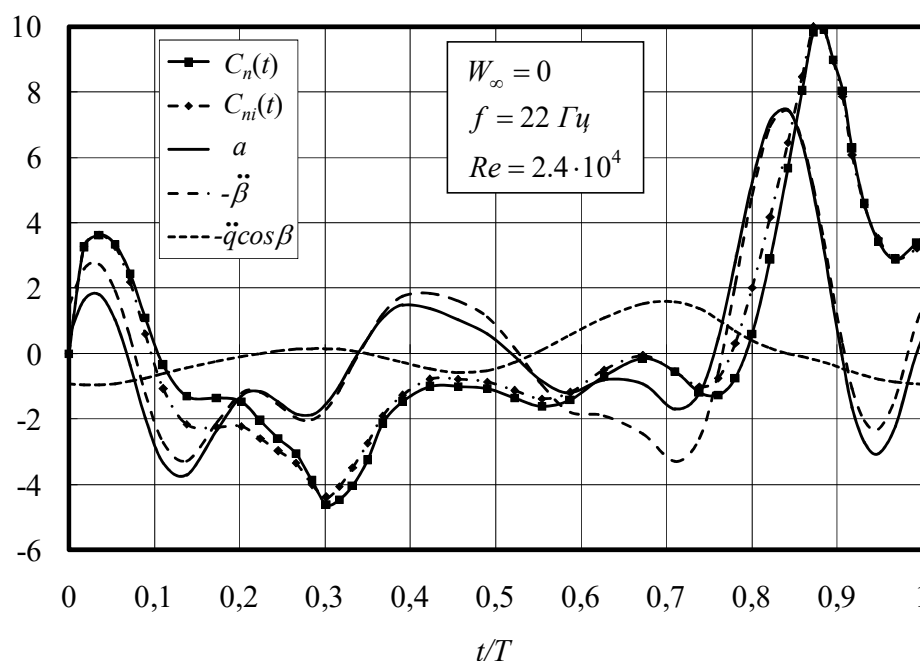


Рис. 5. Результати числового моделювання аеродинамічних параметрів для секції 2 крила орнітоптера в режимі махів із частотою $f = 22$ Гц

ставлено в Табл. 2. Відповідно до 90% рівня довіри, інтервали невизначеності для коефіцієнта вертикальної сили при $W_\infty = 0$ на частотах $f = 10, 15$ і 22 Гц оцінюються як 13.5%, 5.9% і 3.4% відповідно [6, 18]. Аналіз відмінності між чисельними й експериментальними даними щодо коефіцієнта вертикальної аеродинамічної сили C_Y для всього орнітоптера демонструє хороший збіг лише для частоти махів $f = 15$ Гц. Розрахункові значення осередненого вертикального коефіцієнта сили відхиляються від відповідних експериментальних у середньому на 19.3%. Більш значні відхилення, ніж у випадку обтікання орнітоптера незбуреним потоком, пояснюються накопиченням вихроутворень поблизу поверхонь, що призводить до накопичення похибок дискретизації меж, які є похибками вхідних даних для задачі Коші (37). Це в свою чергу призводить до більш значних осциляцій аеродинамічних навантажень на крилах.

Для даного режиму махів крил орнітоптера при $f = 22$ Гц співвідношення осереднених за період махів коефіцієнтів C_{ni2}/C_{n2} досягає 1.13. Водночас внески циркуляційної C_{nc2} та вихрової компоненти C_{nv2} – малі та негативні. Очевидно, що інерційна компонента домінує в нормальному коефіцієнті сили. Отже, інерція повітряного потоку, який прискорюється орнітоптером, що махає крилами в режимі нормального тріпотливого польоту, є основним механізмом генерації аеродинамічних навантажень.

Зауважимо, що інерційна компонента аеродинамічних сил породжується відносним імпульсом середовища по нормалі до пластини. Окрім того, з формули (22) випливає, що інерційна компонента залежить від швидкості зміни циркуляції середовища по контуру, прилеглому до пластини, яка нестационарно рухається вздовж своєї нормалі, а отже, – від циркуляції прискорення цього середовища. Виходячи з цих міркувань та відповідно до третього закону Ньютона, для попереднього аналізу внеску миттєвих приєднаних мас

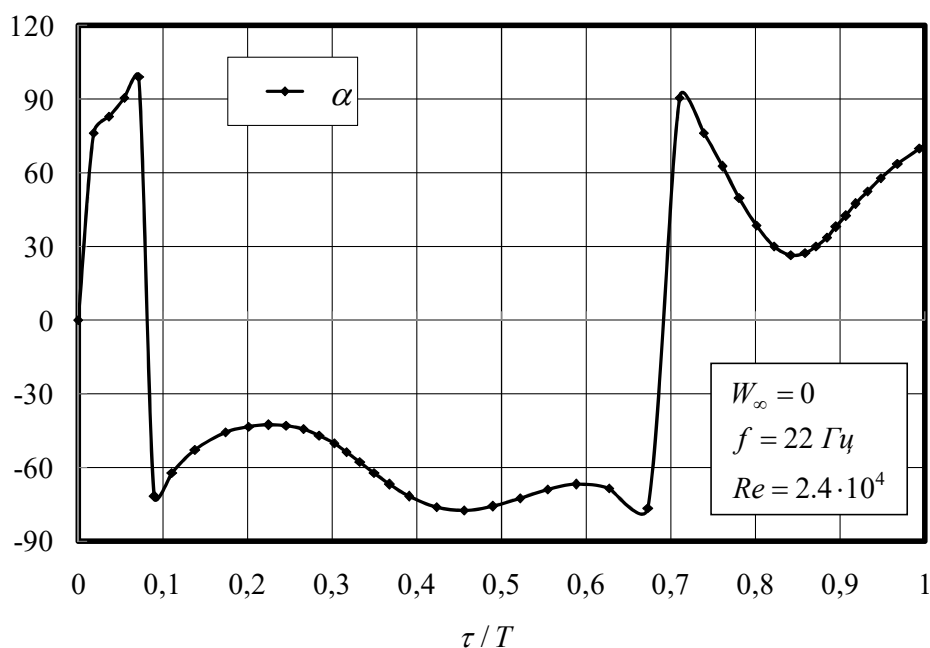


Рис. 6. Миттєвий кут атаки секції 2 крила орнітоптера при частоті махів $f = 22$ Гц

крила, було запропоновано новий параметр – нормальне прискорення задньої крайки крила, взите з протилежним знаком [22]:

$$a(\tau) = -\ddot{\beta} - \ddot{q} \cos \beta. \quad (38)$$

Усі змінні в рівнянні (38) представлено в безрозмірному вигляді. Фізичний зміст величини $a(\tau)$ – нормальна компонента відносного прискорення незбуреного середовища в околі задньої крайки крила. Запропонований параметр підходить лише для аналізу випадку обертання пластини навколо своєї передньої крайки.

Нормальне прискорення задньої крайки секції крила, взите з протилежним знаком, і його обертальна та поступальна компоненти представлені на Рис. 5. Видно, що поведінка коефіцієнта нормальної сили $C_n(\tau)$ з нерівномірним запізненням по фазі суттєво корелює за амплітудою з поведінкою нормального прискорення задньої крайки крила за рахунок прискорення кута перекладки $\beta(\tau)$. Фазовий зсув коефіцієнта нормальної сили пояснюється дією інерції мас повітря, що викликає затримку утворення навантажень на крилі.

Водночас при розрахунках для всіх секцій крила орнітоптера не спостерігалось ніякої кореляції між аеродинамічними коефіцієнтами та кутом атаки на передній крайці пластини $\alpha(\tau)$, див. Рис. 6. Цього слід було очікувати через те, що нормальний тріпотливий політ з відривом потоку з передніх крайок крил виключає виникнення циркуляції потоку вздовж хорд крил, а самі крила махають з достатньо великою частотою $f = 22$ Гц. Таким чином, знаходить підтвердження висновок про те, що утворення аеродинамічних сил на досліджуваному орнітоптері не може бути пояснене за допомогою циркуляційного механізму. На графіку ми спостерігаємо, що, як і має бути в нерухомому середовищі, амплітуда кута атаки $\alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ крила становить близько 180° . Дійсно,

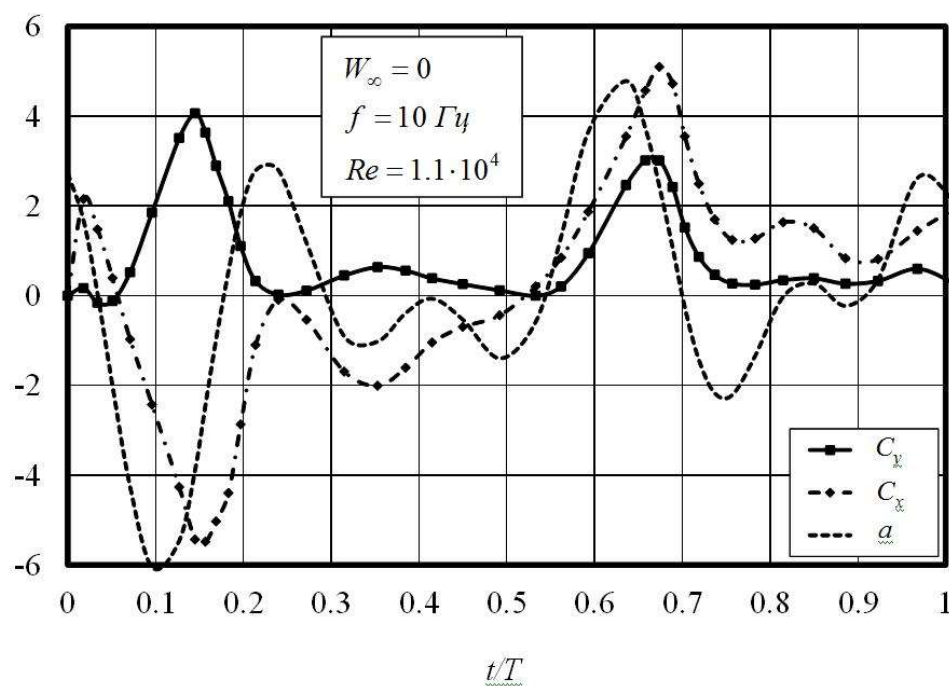


Рис. 7. Розрахункові залежності вертикальної та горизонтальної компонент $C_y(\tau)$ і $C_x(\tau)$ коефіцієнта нормальної сили середнього перерізу крила орнітоптера й параметра $a(\tau)$ за перший період махів для $f = 10$ Гц

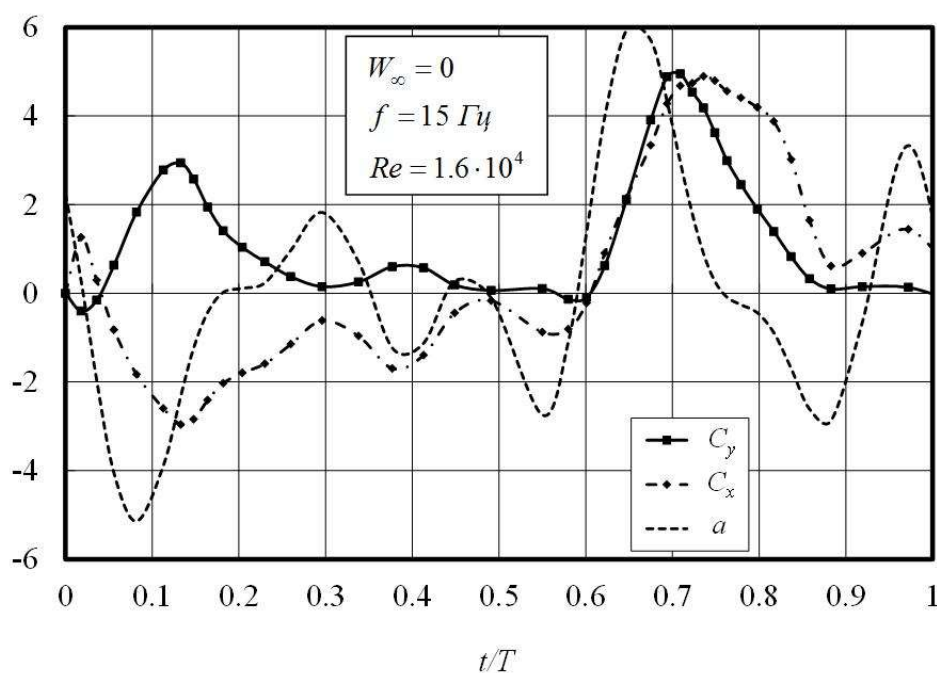


Рис. 8. Розрахункові залежності вертикальної та горизонтальної компонент $C_y(\tau)$ і $C_x(\tau)$ коефіцієнта нормальної сили середнього перерізу крила орнітоптера й параметра $a(\tau)$ за перший період махів для $f = 15$ Гц

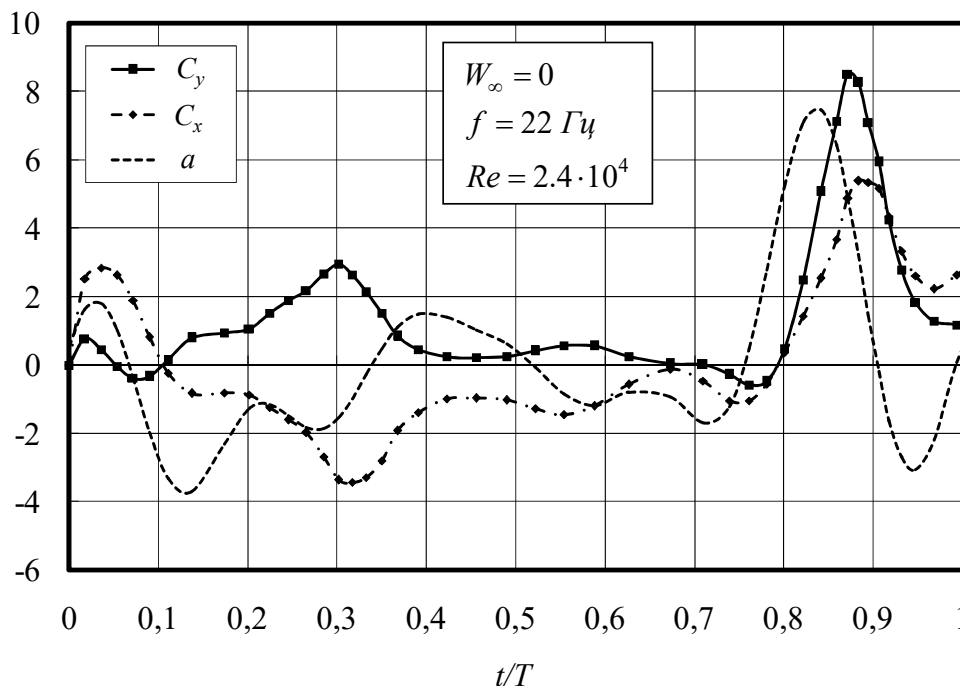


Рис. 9. Розрахункові залежності вертикальної та горизонтальної компонент $C_y(\tau)$ і $C_x(\tau)$ коефіцієнта нормальної сили середнього перерізу крила орнітоптера й параметра $a(\tau)$ за перший період махів для $f = 22$ Гц

вектор незбуреної відносної швидкості на осі обертання крила за період його махів змінює свій напрямок на протилежний, що в свою чергу призводить до зміни знаку кута атаки.

На Рис. 7–9 наведено розрахункові дані поведінки вертикальної та горизонтальної компонент $C_y(\tau)$ і $C_x(\tau)$ коефіцієнта нормальної сили середнього перерізу крила орнітоптера за перший період махів, обчислених за формулами (25) та (26), і нормального прискорення задньої крайки крила, взятого з протилежним знаком $a(\tau)$, розрахованого за формулою (38).

Розглянемо часові варіації величин $C_{y2}(\tau)$ і $a(\tau)$ спільно з кутом перекидки $\beta(\tau)$ для секції 2. Важливість синхронізації параметрів $a(\tau)$ і $\beta(\tau)$ для досягнення максимуму $C_{y2}(\tau)$ впливає з аналізу рівнянь (22) та (25). З Рис. 9 видно, що кожному екстремуму $C_{y2}(\tau)$ передують екстремуми $a(\tau)$. Не такий сильний взаємозв'язок існує між $\beta(\tau)$ та $C_{y2}(\tau)$, див. Рис. 9 і 4, хоч абсолютні значення цих параметрів в перехідних процесах також корелюють. При збільшенні частоти махів спостерігається перерозподіл максимумів $C_{y2}(\tau)$ – перший з них зменшується, а другий зростає, причому обидва настають з усе більшим запізненням.

На Рис. 10 представлено комп'ютерну візуалізацію векторного поля швидкості, ліній течії та ліній однакових коефіцієнтів тиску для секції 2 орнітоптера при $W_\infty = 0$ і $f = 22$ Гц. Лінії течії було обчислено з кроком 0.05, а лінії однакових коефіцієнтів тиску – з кроком 0.25 за формулою (18). Зменшений удвічі вектор головних сил показано прикладеним до центру тиску на пластині.

Із цих графіків можна зробити висновок про те, що чисельне моделювання здійс-

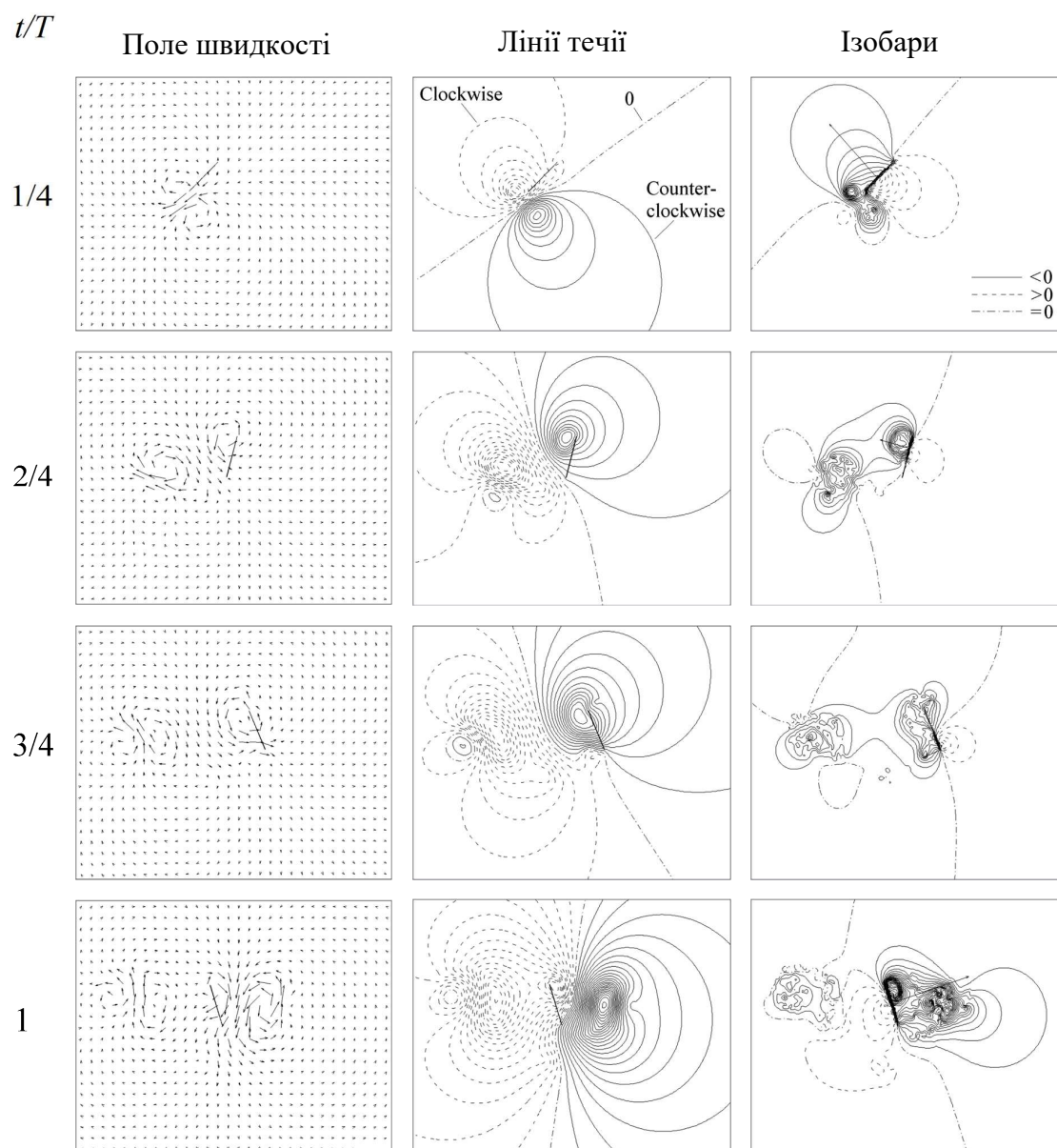


Рис. 10. Векторні поля швидкості, лінії течії та лінії однакових коефіцієнтів тиску для секції 2 орнітоптера при $W_\infty = 0$ і $f = 22$ Гц

снено фізично правильно. Так, граничні умови для швидкості й коефіцієнтів тиску задовольняються коректно. Зокрема, лінії нульової течії та нульового тиску прямують до нескінченності, а вектор абсолютної швидкості та коефіцієнт тиску при перетинанні поверхні пластини зазнають стрибків неперервності. Водночас лінії течії усюди неперервні, але не диференційовані при перетині поверхні пластини. Окрім того, всі три типи візуалізацій добре корелюють між собою. Характерна особливість структури течії при нормальному тріпотливому польоті з відривом потоку з передніх країв крил полягає у формуванні дипольних структур після кожного періоду махів. Ці структури відкидаються крилами вниз і формують течію, яка відповідає існуванню ненульової

середньої вертикальної (підтримуючої) сили. Порівняння результатів комп'ютерної візуалізації з розрахунками свідчать, що при достатньо великій частоті махів існування вихроутворень біля крил мало впливає на їх навантаження.

Таким чином, усі отримані кількісні дані свідчать про те, що природа аеродинамічних сил на крилах пружного мембранного орнітоптера при нормальному тріпотливому польоті з відривом потоку з передніх крайок крил – інерційна, тобто залежить від миттєвих приєднаних мас крила та визначається циркуляцією прискорення повітря по контуру, прилеглому до нього.

7. ВИСНОВКИ

За допомогою удосконаленого методу дискретних вихорів, узагальненого для в'язких вихрових середовищ, проведено теоретико-експериментальне дослідження аеродинаміки мембранного орнітоптера, який махає крилами в режимі нормального тріпотливого польоту з відривом потоку з передніх крайок крил у нерухомому повітрі. Розроблений підхід полягав у використанні результатів високошвидкісної відеозйомки махів крил орнітоптера для чисельного моделювання аеродинамічних процесів.

Розглядалася квазітривимірна задача динаміки нестисливого в'язкого середовища, розв'язок якої було зведено до двовимірних розв'язків для перерізів крила орнітоптера. У якості частинного (базового) розв'язку кожної двовимірної задачі використовувався вихор Лемба–Озеена – фундаментальний розв'язок узагальненого рівняння Гельмгольца. При цьому ніяких обмежень на числа Рейнольдса, числа Струхала та кути атаки не накладалося.

Сформульовану зовнішню початково-крайову задачу з початковими умовами було зведено до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь із початковими даними в класі функцій, обмежених на кінцях інтервалу. Застосування для знаходження перепаду тиску на пластині формули Коші–Лагранжа, узагальненої для вихрових течій у в'язких нестисливих середовищах, призвело до форми розв'язку, яка тотожна аналогічному виразу для ідеального середовища, потенціального поза вихровими поверхнями.

Досліджено внесок інерційної, циркуляційної та вихрової компонент нормальної сили на крилах орнітоптера. З'ясовано, що в коефіцієнті нормальної сили домінує інерційна компонента. Отже, інерція потоку повітря, прискореного махами крила, є основним механізмом у генерації аеродинамічних навантажень у розглянутій задачі. Внески обох інших компонент сил – циркуляційної та вихрової – були малими й негативними. Таким чином, доведено, що природа аеродинамічних сил на крилах пружного мембранного орнітоптера напівеліптичної форми в плані, який махає крилами в режимі нормального тріпотливого польоту з відривом потоку з передніх крайок крил, – інерційна, тобто залежить від миттєвої приєднаної маси та визначається циркуляцією прискорення повітря по прилеглому до крила контуру.

Водночас не було виявлено кореляції між коефіцієнтом нормальної сили й кутом атаки на передній крайці крила. Це підтверджує висновок про те, що процес генерації аеродинамічних сил на крилах дослідженого орнітоптера не можна пояснити за допомогою циркуляційного механізму.

Ґрунтуючись на цих результатах, для попереднього аналізу внеску миттєвих приєднаних мас крила, було запропоновано новий кінематичний параметр – нормальне

прискорення задньої крайки крила, взяте з протилежним знаком. Ця величина важлива для опису аеродинаміки крил, що махають, проте її застосування коректне лише в тому випадку, коли крило обертається навколо своєї передньої крайки. Результати числового моделювання показали суттєву амплітудну кореляцію з нерівномірним запізненням по фазі миттєвих коефіцієнтів аеродинамічних сил і нормального прискорення задньої крайки крила, сформовану за рахунок прискорення кута перекладки.

Порівняння результатів розрахунків [22] з експериментом [6] показало, що УМДВ, узагальнений для в'язких вихрових середовищ придатний для розв'язання з задовільною точністю тривимірних задач щодо знаходження аеродинамічних характеристик тонких пружних крил, які махають у режимі нормального тріпотливого польоту з відривом потоку з їхніх передніх країв під довільними кутами атаки та з довільними числами Струхалія та Рейнольдса.

REFERENCES

- [1] S. M. Belotserkovsky and I. K. Lifanov, *Method of discrete vortices*. CRS Press, 1993.
- [2] S. A. Dovgii and A. V. Shekhovtsov, “An improved vortex lattice method for nonstationary problems,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 104, no. 6, pp. 1615–1627, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1023/a:1011325112413>
- [3] A. V. Shekhovtsov, “A method for evaluation of an unsteady pressure field in a mixed potential-vortical domain adjacent to the rotating wing,” *International Journal of Fluid Mechanics Research*, vol. 29, no. 1, pp. 111–123, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1615/interjfluidmechres.v29.i1>
- [4] S. A. Dovgii and A. V. Shekhovtsov, “Approbation of the IMDV for a class of problems on wing oscillation in a viscous medium with a restricted solution on edges,” *Bulletin of V. N. Karazin Kharkiv National University, series Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems*, vol. 12, no. 863, pp. 111–128, 2009.
- [5] S. Shkarayev and D. Silin, “Applications of actuator disk theory to membrane flapping wings,” *AIAA Journal*, vol. 48, no. 10, pp. 2227–2234, 2010. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.j050139>
- [6] S. Shkarayev, D. Silin, G. Abate, and R. Albertani, “Aerodynamics of cambered membrane flapping wings,” in *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. Orlando, FL: AIAA 2010-58, 2010, pp. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2010-58>
- [7] N. Ye. Kochin, I. A. Kibel, and N. V. Roze, *Theoretical hydromechanics*. New York: Wiley Interscience, 1964.
- [8] J. W. Schaefer and S. Eskinazi, “An analysis of the vortex street generated in a viscous fluid,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 6, no. 2, pp. 241–260, 1959. DOI: <https://doi.org/10.1017/s0022112059000593>
- [9] S. M. Belotserkovsky and M. I. Nisht, *Separated and continuous flow of an ideal fluid around thin wings*. Moscow: Nauka, 1978.

- [10] A. Leonard, “Vortex methods for flow simulation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 37, no. 3, pp. 289–335, 1980. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(80\)90040-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(80)90040-6)
- [11] C. Greengard, “The core spreading vortex method approximates the wrong equation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 61, no. 2, pp. 345–348, 1985. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(85\)90091-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(85)90091-9)
- [12] T. Kida, T. Nakajima, and H. Suemitsu, “Second order core spreading vortex method in two-dimensional viscous flows,” *JSME International Journal Series B*, vol. 41, no. 2, pp. 441–446, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1299/jsmeb.41.441>
- [13] A. V. Shekhovtsov, “Solving ill-posed problems of hydroaerodynamics using the improved discrete vortex method,” in *Computer Hydromechanics*. Kyiv: Institute of Hydromechanics of NASU, 2008, pp. 50–51.
- [14] G. Y. Dynnikova, “Vortex motion in two-dimensional viscous fluid flows,” *Fluid Dynamics*, vol. 38, pp. 670–678, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:FLUI.0000007829.78673.01>
- [15] C. P. Ellington, “Aerodynamics and the origin of insect flight,” in *Advances in Insect Physiology*. Amsterdam: Elsevier, 1991, vol. 23, pp. 171–210. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0065-2806\(08\)60094-6](https://doi.org/10.1016/s0065-2806(08)60094-6)
- [16] M. H. Dickinson and K. G. Götz, “Unsteady aerodynamic performance of model wings at low Reynolds numbers,” *Journal of Experimental Biology*, vol. 174, pp. 45–64, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1242/jeb.174.1.45>
- [17] Z. J. Wang, J. M. Birch, and M. H. Dickinson, “Unsteady forces and flows in low Reynolds number hovering flight: two-dimensional computations vs robotic wing experiments,” *Journal of Experimental Biology*, vol. 207, no. 3, pp. 449–460, 2004. DOI: <https://doi.org/10.1242/jeb.00739>
- [18] M. F. Bin Abas, A. S. Bin Mohd Rafie, H. Bin Yusoff, and K. A. Bin Ahmad, “Flapping wing micro-aerial-vehicle: Kinematics, membranes, and flapping mechanisms of ornithopter and insect flight,” *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 29, no. 5, pp. 1159–1177, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2016.08.003>
- [19] J. Gerdes, H. A. Bruck, and S. K. Gupta, “A simulation-based approach to modeling component interactions during design of flapping wing aerial vehicles,” *International Journal of Micro Air Vehicles*, vol. 11, pp. 1–18, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1177/1756829318822325>
- [20] S. Syam Narayanan and R. Asad Ahmed, “Effect of chord-wise flexibility in the lift generation of flapping MAV with membrane wing,” *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 94, no. 5, pp. 792–798, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1108/aeat-03-2021-0070>

- [21] C. Xie, N. Gao, Y. Meng, Y. Wu, and C. Yang, “A review of bird-like flapping wing with high aspect ratio,” *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 36, no. 1, pp. 22–44, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2022.06.009>
- [22] S. Shkarayev, G. Maniar, and A. V. Shekhovtsov, “Experimental and computational modeling of the kinematics and aerodynamics of flapping wing,” *Journal of Aircraft*, vol. 50, no. 6, pp. 1734–1747, 2013. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.c032053>
- [23] G. Y. Dynnikova, “An analog of the Bernoulli and Cauchy-Lagrange integrals for a time-dependent vortex flow of an ideal incompressible fluid,” *Fluid Dynamics*, vol. 35, pp. 24–32, 2000. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02698782>
- [24] A. V. Shekhovtsov, “Inertially-vortex principle of generating forces at insect wings,” *Applied Hydromechanics*, vol. 13(85), no. 1, pp. 61–76, 2011.
- [25] A. V. Shekhovtsov, “Inertial-circulation principle of flight and swimming,” *Bulletin of V. N. Karazin Kharkiv National University, series Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems*, vol. 4, no. 661, pp. 249–258, 2005.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K. Method of discrete vortices. — CRS Press, 1993. — 452 p.
- [2] Dovgii S. A., Shekhovtsov A. V. An improved vortex lattice method for nonstationary problems // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2001. — Vol. 104, no. 6. — P. 1615–1627.
- [3] Shekhovtsov A. V. A method for evaluation of an unsteady pressure field in a mixed potential-vortical domain adjacent to the rotating wing // *International Journal of Fluid Mechanics Research*. — 2002. — Vol. 29, no. 1. — P. 111–123.
- [4] Довгий С. А., Шеховцов А. В. Апробация УМДВ для класса задач о колебаниях крыла в вязкой среде с ограниченным решением на кромках // *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. — 2009. — Т. 12, № 863. — С. 111–128.
- [5] Shkarayev S., Silin D. Applications of actuator disk theory to membrane flapping wings // *AIAA Journal*. — 2010. — Vol. 48, no. 10. — P. 2227–2234.
- [6] Aerodynamics of cambered membrane flapping wings / Shkarayev S., Silin D., Abate G., and Albertani R. // 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. — Orlando, FL : American Institute of Aeronautics and Astronautics. — 2010. — P. 1–14.
- [7] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, часть 2. — Москва : Физматлит, 1963. — 728 с.

- [8] Schaefer J. W., Eskinazi S. An analysis of the vortex street generated in a viscous fluid // Journal of Fluid Mechanics. — 1959. — Vol. 6, no. 2. — P. 241–260.
- [9] Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. — Москва : Наука, 1978. — 352 с.
- [10] Leonard A. Vortex methods for flow simulation // Journal of Computational Physics. — 1980. — Vol. 37, no. 3. — P. 289–335.
- [11] Greengard C. The core spreading vortex method approximates the wrong equation // Journal of Computational Physics. — 1985. — Vol. 61, no. 2. — P. 345–348.
- [12] Kida T., Nakajima T., Suemitsu H. Second order core spreading vortex method in two-dimensional viscous flows // JSME International Journal. Series B. — 1998. — Vol. 41, no. 2. — P. 441–446.
- [13] Шеховцов А. В. Решение некорректных задач гидроаэродинамики усовершенствованным методом дискретных вихрей // Комп'ютерна гідромеханіка. — Київ : Інститут гідромеханіки НАНУ. — 2008. — С. 50–51.
- [14] Дынникова Г. Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2003. — № 5. — С. 11–19.
- [15] Ellington C. P. Aerodynamics and the origin of insect flight // Advances in Insect Physiology. — Amsterdam : Elsevier, 1991. — Vol. 23. — P. 171–210.
- [16] Dickinson M. H., Götz K. G. Unsteady aerodynamic performance of model wings at low Reynolds numbers // Journal of Experimental Biology. — 1993. — Vol. 174. — P. 45–64.
- [17] Wang Z. J., Birch J. M., Dickinson M. H. Unsteady forces and flows in low Reynolds number hovering flight: two-dimensional computations vs robotic wing experiments // Journal of Experimental Biology. — 2004. — Vol. 207, no. 3. — P. 449–460.
- [18] Flapping wing micro-aerial-vehicle: Kinematics, membranes, and flapping mechanisms of ornithopter and insect flight / Bin Abas M. F., Bin Mohd Rafie A. S., Bin Yusoff H., and Bin Ahmad K. A. // Chinese Journal of Aeronautics. — 2016. — Vol. 29, no. 5. — P. 1159–1177.
- [19] Gerdes J., Bruck H. A., Gupta S. K. A simulation-based approach to modeling component interactions during design of flapping wing aerial vehicles // International Journal of Micro Air Vehicles. — 2019. — Vol. 11. — P. 1–18.
- [20] Syam Narayanan S., Asad Ahmed R. Effect of chord-wise flexibility in the lift generation of flapping MAV with membrane wing // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. — 2022. — Vol. 94, no. 5. — P. 792–798.
- [21] A review of bird-like flapping wing with high aspect ratio / Xie C., Gao N., Meng Y., Wu Y., and Yang C. // Chinese Journal of Aeronautics. — 2023. — Vol. 36, no. 1. — P. 22–44.

- [22] Shkarayev S., Maniar G., Shekhovtsov A. V. Experimental and computational modeling of the kinematics and aerodynamics of flapping wing // Journal of Aircraft. — 2013. — Vol. 50, no. 6. — P. 1734–1747.
- [23] Дынникова Г. Я. Аналог интегралов Бернулли и Коши-Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2000. — № 1. — С. 31–41.
- [24] Шеховцов А. В. Инерционно-вихревой принцип генерации усилий на крыльях насекомых // Прикладна гідромеханіка. — 2011. — Т. 13(85), № 1. — С. 61–76.
- [25] Шеховцов А. В. Инерционно-циркуляционный принцип полета и плавания // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». — 2005. — Т. 4, № 661. — С. 249–258.

O. V. Shekhovtsov

**Quasi-three-dimensional modeling of the normal flapping flight
of an elastic membrane ornithopter**

A theoretical-experimental study of the aerodynamics of a membrane ornithopter flapping its wings in the mode of normal flapping flight with flow separation from the leading edges of the wings in still air was carried out using the improved method of discrete vortices generalized for viscous vortical media. The results of high-speed video recording of ornithopter wing flaps are used in the numerical modeling. The solution of the three-dimensional problem is reduced to two-dimensional solutions for the sections of an ornithopter wing: a quasi-three-dimensional problem of the dynamics of an incompressible viscous medium was considered. The Lamb–Oseen vortex, a fundamental solution of the generalized Helmholtz equation, was used as a partial (basic) solution for each two-dimensional problem. In doing so, no restrictions were imposed on the Reynolds and Strouhal numbers and the angles of attack. The contribution of the normal force components on the ornithopter wings was investigated. Among all the components of the normal force, the inertial component dominates. Its contribution may exceed 100%. The nature of aerodynamic forces on the wings of an elastic membrane ornithopter depends on the instantaneous attached mass: it is determined by the circulation of air acceleration along the contour adjacent to the ornithopter wing. The contributions of the other components, the circulation and vortical ones, are small and negative, despite the intense vortex formation near the wing. A new kinematic parameter is proposed, namely, the normal acceleration of the trailing edge of the wing section, taken with an opposite sign. It was found that to maximize the coefficient of vertical force, this parameter should be synchronized with the pitching angle of the corresponding section of the wing. The proposed methodology provides a successful solution to three-dimensional problems by finding the aerodynamic characteristics of thin elastic wings flapping in the mode of normal flapping flight. A comparison of the calculation and experimental results shows an accuracy of about 14% for the aerodynamic force coefficients averaged over the flaps' period at the arbitrary angles of attack and the Strouhal and Reynolds numbers.

KEY WORDS: *ornithopter, flapping flight, elastic wing, an improved method of discrete vortices, the Lamb–Oseen vortex, viscous vortical media*