

УДК 534.182

ДИНАМІКА ХРЕСТОПОДІБНИХ ХВИЛЬ У ПРЯМОКУТНИХ БАСЕЙНАХ СКІНЧЕННИХ РОЗМІРІВ

Т. С. Краснопольська, В. Д. Печук

Інститут гідромеханіки НАН України
вул. Марії Капніст, 8/4, 03057, Київ, Україна
†E-mail: krasnopolska1005@gmail.com

Отримано 26.05.2024

Статтю присвячено вивченню хрестоподібних хвиль, які виникають на поверхні рідини в басейні в напрямку, перпендикулярному до напрямку руху хвилепродуктора. Труднощі математичного аналізу цього явища пов'язані насамперед із тим, що лінеаризовані рівняння руху не описують механізм генерації хвиль такого типу. Експериментальні спостереження за хрестоподібними хвилями, проведені в дослідному басейні Інституту гідромеханіки НАН України, свідчить те, що їх збудження відбувається за рахунок реалізації умов параметричного резонансу в нелінійній системі. Кількісно оцінено частотні діапазони коливань хвилепродуктора, при яких виникають хрестоподібні хвилі. Слід зауважити, що всі попередні дослідження в цій галузі базувалися на використанні методів, які відповідають розв'язку Хейвелюка для резервуару, нескінченного по довжині чи глибині. Натомість у цій роботі розглянуто генерацію хрестоподібних хвиль у довгому прямокутному басейні скінченних розмірів. Для вивчення їх усталених режимів уперше застосовано метод Ляме суперпозиції розв'язків, розроблений для розв'язання задач теорії пружності. Показано, що в басейнах скінченних розмірів хрестоподібні хвилі можуть генеруватися безпосередньо рухом хвилепродуктора. Отримано відповідні аналітичні розв'язки й оцінено порядки малості різних складових потенціалу швидкостей при введенні малого параметра. Побудовано нелінійну математичну модель, яка описує процес перекачки енергії коливань хвилепродуктора в поверхневі хрестоподібні хвилі. Отримане диференціальне рівняння є рівнянням типу Мат'є. Дослідження його коефіцієнтів показало можливість існування в системі хрестоподібних хвиль з ненульовими амплітудами. Слід зауважити, що всі доданки, які входять у параметричний член, пропорційні функції вимуштуючих коливань. Таким чином, генерація хрестоподібних хвиль стає можливою лише за рахунок збудження хвилепродуктором циклічних рухів рідини.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: хрестоподібні хвилі, параметричний резонанс, обмежений басейн, метод суперпозиції, диференціальне рівняння Мат'є

1. ВСТУП

Хрестоподібні хвилі – це хвилі на поверхні рідини, перпендикулярні до напрямку руху хвилепродуктора. Вони спостерігаються в натурних і лабораторних умовах, про їх існування давно й добре відомо, однак математичний аналіз цього явища досі викликає значні труднощі. Справа в тому, що хрестоподібні хвилі можуть виникати при коливаннях хвилепродуктора вздовж каналу, які не залежить від поперечної координати. У цьому випадку лінеаризовані хвильові рівняння не містять членів, які б відповідали циклічному перенесенню енергії від хвилепродуктора в поперечному напрямку, а значить, з цього погляду хрестоподібні хвилі не повинні існувати [1,2]. Своєму виникненню хрестоподібні хвилі завдячують нелінійним ефектам, причому механізм їх збудження свідчить про реалізацію умов параметричного резонансу [3–5].

Усі попередні дослідження К. Дж. Гарретта [6], Дж. Махоні [7] та А. Джонса [8] вказували на те, що енергія хвилепродуктора передається в хрестоподібні хвилі саме за рахунок взаємодії з безпосередньо збуджуваним ним базовим рухом – коливаннями середнього рівня вільної поверхні рідини. Безумовно, така взаємодія створює один з каналів перекачування енергії від хвилепродуктора в хрестоподібні хвилі, але надалі ми покажемо, що вони збуджуються та існують і без її урахування.

Механізм генерації хрестоподібних хвиль за наявності істотних коливань середнього рівня рідини в басейні вперше пояснив Гарретт 1970 року [6], виділивши ці коливання окремо, а поверхневі хвилі розклавши в ряди Фур'є по довжині та ширині басейну. Для цього було застосовано процедуру Бубнова–Гальоркіна для амплітуди хвилі з порядковими номерами $n = 0$ (по довжині басейну x) і $m = 1$ (по ширині басейну y), яка розглядалась як основна. Це дозволило після лінеаризації рівнянь руху малої хвилі по ширині отримати для її амплітуди рівняння Мат'є. При аналізі останнього й було зроблено висновок про можливість існування хвилі з частотою, яка дорівнює половині частоти коливань хвилепродуктора, за наявності коливань середнього рівня.

Слід зазначити, що, виходячи з виконання закону збереження маси рідини, коливання рівня мають існувати завжди, однак їхня амплітуда може бути дуже малою. Її величина залежить від відношення довжини басейну до його ширини – чим воно більше, тим менша амплітуда таких коливань. При відношенні, близькому до 10, коливання середнього рівня стають наступного порядку малості, що дозволяє ними знехтувати. Тому 1972 року Дж. Махоні [7] переглянув теорію Гарретта, показавши, що вона непридатна для довгих басейнів. Натомість було створено теорію генерації хрестоподібних хвиль за наявності взаємодії вимушених і хрестоподібних хвиль. При цьому на межах, включаючи хвилепродуктор, ставились нелінійні граничні умови. Зауважимо однак, що тут розглядався довгий басейн, для якого виконуються умови випромінювання при $x \rightarrow \infty$. Махоні, як і Гарретт, розглядав механізм нестійкості хвиль чи коливань, які не залежать від поздовжньої координати руху хвилепродуктора, проте залежать від координати по ширині басейну y , уздовж якої й генеруються хрестоподібні хвилі.

Махоні [7] вибирав у якості головних коливання поверхні рідини, які відповідають знаменитому розв'язку для нескінченного басейну, отриманого Хейвелоком 1929 року [9]. На додачу, як зазначив А. Джонс [8], він лінеаризував рівняння для амплітуди хрестоподібних хвиль, опускаючи члени, які є навіть більшими, ніж утримувані в рівнянні. Це аргументувалося тим, що відкинуті члени не впливають на резонанс. Нато-

мість А. Джонс утримував усі нелінійні члени, але і його розв’язок для хрестоподібних хвиль був знайдений лише для нескінченно довгого каналу.

Зауважимо, що при застосуванні методу розкладання за малим параметром безпосередньо збуджувані (вимушені) хвилі мають значно більші амплітуди, ніж хрестоподібні. У роботах С. Ліхтера та його учнів [10–15] було розглянуто хрестоподібні хвилі з доволі великими хвильовими параметрами (номерами) по ширині напівнескінченного басейну, що дозволило застосувати розв’язок Хейвелока [9]. При цьому розглядалося відразу кілька хрестоподібних хвиль з близькими частотами. Наприклад, у роботі Ліхтера та Андехілла [13] досліджувались хаотичні хрестоподібні хвилі при одночасному збудженні двох таких хвиль, які відповідають власним модам басейну.

Грунтуючись на роботі Люка [16], Дж. Майлс застосував варіаційний метод для отримання рішення для хрестоподібних хвиль у прямокутному басейні [17–20]. При цьому він зніс граничну умову рівності нулю швидкості на дні басейну на нескінченність, тобто, розглядав нескінченно глибоку область. Цікаві експерименти зі спостереженням хрестоподібних хвиль проводяться й зараз, але теоретичне обґрунтування їх виникнення залишається неповним і дуже спрощеним [21, 22].

Ми маємо на меті розглянути генерацію хрестоподібних хвиль у видовженому басейні скінченних розмірів. Попередньо були проведені дослідження щодо доведення існування та ідентифікації параметрів хаотичних режимів коливань хрестоподібних поверхневих хвиль у прямокутному скінченному басейні при наявності запізнення та без нього [5, 23]. У цій статті вперше буде показано можливість існування хрестоподібних хвиль без урахування інших поверхневих хвиль у разі, коли коливаннями середнього рівня басейну можна знехтувати [24].

2. ЛАБОРАТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Лабораторні спостереження за хрестоподібними хвилями проводились у дослідному басейні Інституту гідромеханіки НАН України, який має форму прямокутного паралелепіпеда довжини $L = 50$ м, ширини $b = 6.8$ м і глибини 3.5 м (експерименти проводилися при його заповненні до глибини 2.5 м). Схематично басейн з хвилепродуктором представлено на Рис. 1. Введемо декартову систему координат із початком у точці O на незбуреній поверхні рідини. Нехай хвилепродуктор, розташований в одному кінці басейну (при $x = 0$) коливається з частотою f_e [25].

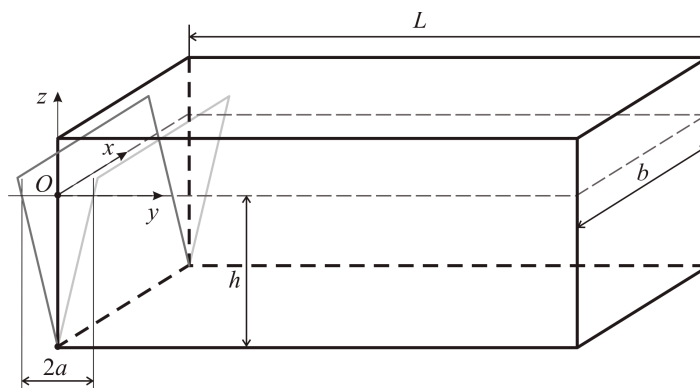
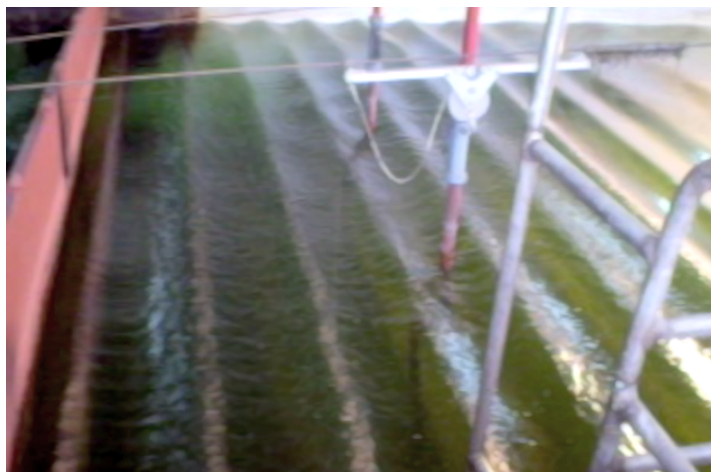


Рис. 1. Схема басейну з хвилепродуктором



а



б



в

Рис. 2. Хвилі на вільній поверхні басейну (експеримент):
а — симетричні вимушені хвилі, б — зародження хрестоподібних хвиль,
в — усталені хрестоподібні хвилі

При проведенні експериментальних дослідженнях частота коливань хвилепродуктора змінювалась у діапазоні $0 < f_e < 2.5$ Гц. На відносно низьких частотах збуджувалися лише хвилі в напрямку x . Вони мають вигляд, показаний на світлинці Рис. 2а. Для $f_e > 1.5$ Гц спостерігалися хрестоподібні хвилі з нерівномірним розподілом амплітуд у напрямку y . Їхнє зародження при початковому збільшенні частоти хвилепродуктора до $f_e = 1.87$ Гц показано на Рис. 2б, а на Рис. 2в – хрестоподібні хвилі, які встановилися поблизу хвилепродуктора, при частоті його коливань $f_e = 2.27$ Гц. Порівнюючи знімки на Рис. 2а та Рис. 2в, зауважуємо, що стоячі хрестоподібні хвилі мають значні амплітуди, які перевищують амплітуди збуджуваних у поздовжньому напрямку хвиль більш, ніж у 5 разів. Примітно, що частота цих хрестоподібних хвиль – 1.15 Гц, що становить майже $f_e/2$.

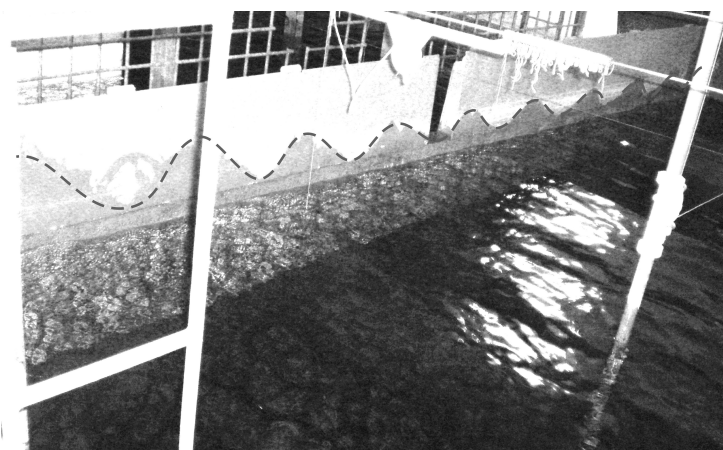


Рис. 3. Слід хрестоподібних хвиль на хвилепродукторі

На Рис. 3 показано слід на поверхні хвилепродуктора, залишений хрестоподібними хвилями після першого експерименту в басейні (на початку його проведення водний слід був горизонтальним). Для наочності межу мокрого сліду помічено пунктирною лінією. Це дозволяє зробити висновок, що в поперечному напрямку (вздовж координати y) спостерігалось десять півхвиль. Це – коливання, коли реалізується форма [4, 26, 27]

$$\xi_{0,10}(y) = \cos \frac{10\pi}{b}y = \cos \frac{5(2\pi)}{b}y.$$

Як уже зазначалось, частота спостережених хрестоподібних хвиль становила 1.15 Гц. Розрахункова ж частота коливань на цій власній моді має бути $f_{0,10} = \omega_{0,10}/(2\pi) = 1.07$ Гц, що досить близько до 1.15 Гц. Зауважимо, що формулу для розрахунку власних частот f_{nm} буде виведено в наступному параграфі.

На Рис. 4 у квадраті 6.8×6.8 м представлено графік власної форми вимушеної хвилі $\xi_{150,0}(x) = \cos(150\pi L/x)$, яка має власну частоту $f_{150,0} = 1.53$ Гц. Саме вона відповідає вимушеним хвилям, які спостерігалися в експерименті (див. Рис. 2а).

Власна мода хрестоподібних хвиль виду

$$\xi_{40,10}(x, y) = \cos \frac{40\pi x}{L} \cos \frac{10\pi y}{b} \quad (1)$$

має частоту $f_{40,10} = \omega_{40,10}/(2\pi) = 1.143$ Гц, для якої справедливо $2f_{40,10} \approx f_e = 2.27$ Гц. Спираючись на попередні наші дослідження можемо стверджувати, що тут виконується умова реалізації головного параметричного резонансу, при якому і виникають хрестоподібні хвилі. Графік цієї моди у квадраті 6.8×6.8 м представлено на Рис. 5.

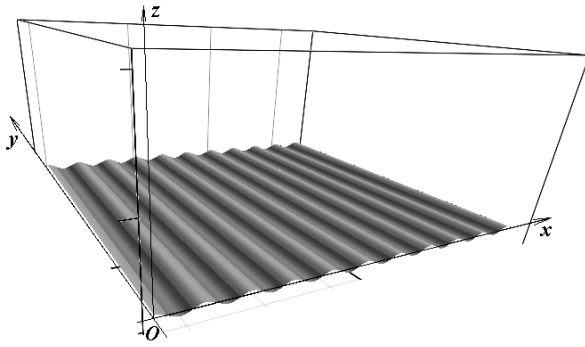


Рис. 4. Графік вимушених симетричних хвиль

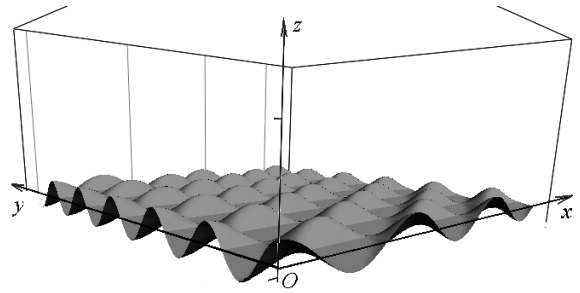


Рис. 5. Графік хрестоподібних хвиль

3. МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМИ

У припущенні, що рідина є ідеальною – нев'язкою та нестисливою, – розглянемо хвилі на її поверхні в басейні довжини L , ширини b і глибини h (див. Рис. 1). Для теоретичного формулювання задачі введемо декартову систему координат із початком O на вільній незбуреній поверхні рідини. Вважаємо, що хвилепродуктор розташовано в торці при $x = 0$, а його переміщення в напрямку $\vec{x}$ описуються функцією

$$u(z, t) = F(z) \sin(\omega t) = \left(a + \frac{a}{h} z\right) \sin(\omega t), \quad (2)$$

де $2a$ – розмах коливань хвилепродуктора на поверхні рідини; $\omega = 2\pi f_e$ – кругова частота.

Вважаючи рух рідини безвихровим, введемо для поля швидкостей $\vec{v}$ потенціал $\varphi(x, y, z, t)$, такий, що $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$. Для φ справедливе рівняння

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{при} \quad F(z) \cos(\omega t) \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq b, \quad -h \leq z \leq \xi(x, y, t), \quad (3)$$

яке випливає з умови нерозривності. Тут функція $\xi(x, y, t)$ описує зміщення при коливаннях вільної поверхні.

Динамічна та кінематична умови на вільній поверхні мають класичний вигляд [3–5, 27, 28]:

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + g\xi = F_0(t) \quad \text{при} \quad z = \xi(x, y, t); \quad (4)$$

$$\varphi_z = \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\xi + \xi_t \quad \text{при} \quad z = \xi(x, y, t), \quad (5)$$

де g – прискорення вільного падіння; $F_0(t)$ – довільна функція часу [28]. Тут і далі нижніми індексами x, y, z, t позначені відповідні часткові похідні.

На додачу маємо однорідні граничні умови на жорстких межах, де нормальна складова швидкості рідини стає нульовою:

$$\begin{cases} \varphi_z = 0 & \text{при} \quad z = -h; \\ \varphi_y = 0 & \text{при} \quad y = 0, \quad y = b; \\ \varphi_x = 0 & \text{при} \quad x = L. \end{cases} \quad (6)$$

Кінематична умова на хвилепродукторі, що коливається, має вигляд

$$\varphi_x = \omega F(z) \cos \omega t + F'(z) \varphi_z \sin \omega t \quad \text{при} \quad x = F(z) \sin \omega t. \quad (7)$$

Тут штрих означає повну похідну.

Нагадаємо, що при проведенні експериментальних досліджень частота хвилепродуктора f_e змінювалася в діапазоні від 0 до 3 Гц. Як і очікувалося, при відносно низьких частотах збуджувались лише хвилі в напрямку $\vec{x}$ [1, 2, 23], а при підвищенні f_e – і в напрямку $\vec{y}$ [23, 26], тобто, поступово формувалися хрестоподібні хвилі. При цьому кількість їхніх гребенів змінювалась зі збільшенням швидкості коливань хвилепродуктора. Це дозволяє стверджувати, що хрестоподібні хвилі мають резонансний характер, причому кожна окрема хвильова структура має свою «власну» частоту.

Припустимо, що хрестоподібні хвильові структури можна апроксимувати такими динамічними характеристиками як власні форми, які є розв'язками певних лінійних задач. Виходячи з цього, необхідно сформулювати лінійні крайові задачі, які відповідають вихідній нелінійній задачі (3)–(7). Окрім того, вважаємо, що розмах коливань хвилепродуктора $2a$ малий у порівнянні з характерними розмірами басейну. Це дозволяє запровадити деякий малий параметр, пов'язаний з геометричними особливостями системи.

Розглянемо лінійну крайову задачу

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq b, \quad -h \leq z \leq 0; \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_z = \xi_t & \text{при} \quad z = 0, \\ \varphi_z = 0 & \text{при} \quad z = -h, \\ \varphi_x = \tilde{F}_t(z, y, t) & \text{при} \quad x = 0, \\ \varphi_x = 0 & \text{при} \quad x = L, \\ \varphi_y = 0 & \text{при} \quad y = 0, \\ \varphi_y = 0 & \text{при} \quad y = b. \end{array} \right. \quad (9)$$

Її розв'язок можна знайти, наприклад, застосувавши традиційний метод Грінберга [29]. Ми ж пропонуємо використати аналітичний метод суперпозиції, який дає ясну фізично прозору картину перекачування енергії від хвилепродуктора в коливання вільної поверхні рідини. Ідею цього підходу вперше висунув Ляме [30] при аналізі задач теорії пружності. У його рамках потенціал φ можна записати у вигляді суми трьох гармонічних функцій [3, 4, 23, 27, 31, 32]:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2, \quad (10)$$

які відповідають за виконання різних неоднорідних граничних умов.

Потенціал φ_0 є розв'язком граничної задачі

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq b, \quad -h \leq z \leq 0, \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\varphi_0)_z = (\xi_0(t))_t & \text{при } z = 0, \\ (\varphi_0)_z = 0 & \text{при } z = -h, \\ (\varphi_0)_x = (\tilde{F}_0(t))_t & \text{при } x = 0, \\ (\varphi_0)_x = 0 & \text{при } x = L, \\ (\varphi_0)_y = 0 & \text{при } y = 0, \\ (\varphi_0)_y = 0 & \text{при } y = b, \end{array} \right. \quad (12)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_0(t) = \frac{1}{bL} \int_0^b \int_0^L \xi(x, y, t) dx dy, \\ \tilde{F}_0(t) = \frac{1}{hb} \int_0^b \int_{-h}^0 \tilde{F}(z, y, t) dy dz. \end{array} \right. \quad (13)$$

У тому випадку, коли F не залежить від y , приймаємо

$$\tilde{F}_0(t) = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \tilde{F}(z, t) dz.$$

Якщо $F(z) = a(1 + z/h)$, то

$$\tilde{F}_0(t) = \frac{\sin \omega t}{h} \int_{-h}^0 \left(a + \frac{a}{h} z \right) dz = \frac{\sin \omega t}{h} \left(az - \frac{a}{2h} z^2 \right) \Big|_{-h}^0 = \frac{a \sin \omega t}{2}. \quad (14)$$

Функції $\xi_0(t)$, $\tilde{F}_0(t)$ описують коливання середнього рівня вільної поверхні рідини та усереднене за поверхнею переміщення хвилепродуктора відповідно. Ці величини пов'язані співвідношенням

$$(\xi_0)_t bL - \tilde{F}_{0t}(t) hb = 0, \quad (15)$$

яке виражає закон збереження маси для нестисливої рідини. Таким чином, для аналізованого випадку руху хвилепродуктора (2), (14) маємо

$$\xi_{00}(t) = \frac{ah \sin \omega t}{2L} = \left(\frac{ah}{2L} \right) \sin \omega t. \quad (16)$$

У свою чергу, потенціал φ_1 є розв'язком лінійної задачі

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq b, \quad -h \leq z \leq 0; \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\varphi_1)_z = (\xi - \xi_0)_t & \text{при } z = 0, \\ (\varphi_1)_z = 0 & \text{при } z = -h, \\ (\varphi_1)_x = 0 & \text{при } x = 0, \\ (\varphi_1)_x = 0 & \text{при } x = L, \\ (\varphi_1)_y = 0 & \text{при } y = 0, \\ (\varphi_1)_y = 0 & \text{при } y = b. \end{array} \right. \quad (18)$$

Слід звернути увагу на те, що для φ_1 граничні умови (18) є однорідними в напрямках абсцис і ординат $\vec{x}$ та $\vec{y}$, а неоднорідними – у напрямку $\vec{z}$ (відповідна похідна не дорівнює нулю). Тому, згідно з теоремою Стеклова про розв’язок задачі Штурма–Ліувілля, φ_1 представляється у вигляді суми за повними та ортогональними системами власних функцій по x і y . Водночас власні функції не утворюють повну систему по z .

Для потенціалу φ_2 гранична задача формулюється так:

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\varphi_2)_z = 0 & \text{при } z = 0, \\ (\varphi_2)_z = 0 & \text{при } z = -h, \\ (\varphi_2)_x = (\tilde{F} - \tilde{F}_0)_t & \text{при } x = 0, \\ (\varphi_2)_x = 0 & \text{при } x = L, \\ (\varphi_2)_y = 0 & \text{при } y = 0, \\ (\varphi_2)_y = 0 & \text{при } y = b. \end{array} \right. \quad (20)$$

Оскільки ця компонента має однорідні граничні умови по y та z , і неоднорідні по x , то його можна представити у вигляді суми за повними та ортогональними системами власних функцій по y та z . Слід зазначити, що потенціал φ_2 не описує змін швидкості ξ при $z = 0$, але створює компоненту тиску, яка впливає з динамічними умовами на вільній поверхні (4). У лінійному наближенні задачі вона має частоту коливань хвилепродуктора $\tilde{F}(z)$.

Важливо вказати, що крайові задачі (11)–(12), (17)–(18) та (19)–(20) є задачами Неймана, коли задано нормальну похідну гармонічної функції. Для отримання розв’язку без особливостей у кутових точках друга теорема Гріна вимагає, щоб її задані значення задовольняли умову нульового потоку через межу. Така властивість притаманна усім трьом граничним задачам.

Розв’язок крайової задачі для φ_0 може бути знайдений у такому вигляді:

$$\varphi_0 = -\tilde{F}_0(t) \frac{(x-L)^2}{2L} + \dot{\xi}_0 \frac{(z+h)^2}{2h}. \quad (21)$$

Тут і далі крапка означає похідну за часом. Зауважимо, що, з урахуванням умови (15),

яка дає $\dot{\xi}_0 = \dot{\tilde{F}}_0 h/L$, рівняння Лапласа для функції

$$\varphi_0 = \frac{\dot{\tilde{F}}_0}{2L} [-(x-L)^2 + (z+h)^2] \quad (22)$$

задовольняється тотожно.

Розв'язок лінійної задачі (17)–(18) можна записати у вигляді

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\operatorname{ch}[k_{nm}(z+h)]}{\operatorname{ch}(k_{nm}h)} \quad (23)$$

за повними системами функцій $\cos(n\pi x/L)$ та $\cos(m\pi y/b)$ з невідомими амплітудами $\varphi_{nm}(t)$, де

$$k_{nm} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}. \quad (24)$$

Системи функцій $\cos(n\pi x/L)$ і $\cos(m\pi y/b)$ – повні й ортогональні, а значить, будь-яка функція від x та y , може бути представлена як ряд Фур'є за ними. Тому вираз для переміщень вільної поверхні рідини $\xi(x, y, t) - \xi_0(t)$ приймає вигляд

$$\xi(x, y, t) - \xi_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b}. \quad (25)$$

Гранична умова $(\varphi_1)_z = (\xi - \xi_0)_t$, див. (18), дає таке співвідношення між амплітудами рядів (23) і (25):

$$\varphi_{nm} = \dot{\xi}_{nm} (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)^{-1}. \quad (26)$$

Потенціал швидкості $\varphi_2(x, y, z, t)$ може бути записаний у формі рядів Фур'є за повними системами $\cos(m\pi y/b)$ і $\cos(j\pi z/h)$, так що відповідний загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi_2 = \sum_m \sum_j \Phi_{mj}(t) \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch}[\alpha_{mj}(x-L)]}{\operatorname{ch}(\alpha_{mj}L)}, \quad (27)$$

де

$$\alpha_{mj} = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{j^2\pi^2}{h^2}}. \quad (28)$$

Використавши граничну умову (20) при $x=0$ виду $(\varphi_2)_x = (\tilde{F} - \tilde{F}_0)_t$, маємо

$$\dot{F}_{mj}(t) = \bar{\Phi}_{mj}(t) = \frac{\operatorname{ch}(\alpha_{mj}L)}{\alpha_{mj} \operatorname{sh}[\alpha_{mj}(-L)]} \frac{1}{hb} \int_0^b \int_{-h}^0 (\dot{\tilde{F}} - \dot{\tilde{F}}_0) \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} dy dz. \quad (29)$$

Для визначення невідомих функцій $\xi_{nm}(t)$ у співвідношенні (25), які описують амплітуди безпосередньо збуджуваних хвиль на вільній поверхні, слід використовувати лінеаризовану динамічну умову на вільній поверхні:

$$\varphi_t + g\xi = F(t) \quad \text{при} \quad z=0, \quad (30)$$

де φ – повний потенціал швидкості (10). Підстановка отриманих виразів для трьох його складових у співвідношення (30) при $z = 0$ призводить до функціонального рівняння відносно x в інтервалі $(0, L)$. Оскільки φ_1 і φ_2 при $z = 0$ є рядами Фур'є по y , необхідно представити функції

$$\frac{\operatorname{ch}[\alpha_{mj}(x - L)]}{\operatorname{ch}(\alpha_{mj}L)}$$

у формі розкладів у ряди по $\cos(n\pi x/L)$. Слід також розкласти функцію $(x - L)^2$, яка входить у вираз (22), у ряд Фур'є $\cos(n\pi x/L)$.

Нехай

$$\begin{aligned} (x - L)^2 &= a_{00} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{0i} \cos \frac{i\pi}{L} x, \\ \frac{\operatorname{ch}[\alpha_{mj}(x - L)]}{\operatorname{ch}(\alpha_{mj}L)} &= b_{mj0} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{mji} \cos \frac{i\pi}{L} x, \end{aligned} \quad (31)$$

де невідомі коефіцієнти – константи. У результаті з динамічної умови (30) для амплітуд функції коливань (31) маємо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\xi}_{n0}(t)}{k_{n0} \operatorname{th}(k_{n0}h)} + g\xi_{n0}(t) &= \frac{\ddot{F}_0 a_{0n}}{2L} - \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{F}_{0j} b_{0jn}; \\ \frac{\ddot{\xi}_{nm}(t)}{k_{nm} \operatorname{th}(k_{nm}h)} + g\xi_{nm}(t) &= - \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{F}_{mj} b_{mjn}. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким чином,

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_{n0}(t) + \omega_{n0}^2 \xi_{n0}(t) = \frac{\ddot{F}_0}{2L} a_{0n} - \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{F}_{0j} b_{0jn}; \\ \ddot{\xi}_{nm}(t) + \omega_{nm}^2 \xi_{nm}(t) = - \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{F}_{mj} b_{mjn}, \end{cases} \quad (33)$$

де $\omega_{nm} = (gk_{nm} \operatorname{th} k_{nm}h)^{1/2}$; $b_{nm} = k_{nm} \operatorname{th} k_{nm}h$.

Лінійні рівняння (33) – це традиційні рівняння для випадку вимушених коливань з власною частотою ω_{ij} [4, 31–33]. Розв'язавши їх при заданих початкових умовах та заданих $F_0(t)$, $F_{nm}(t)$, можна визначити амплітуди $\xi_{nm}(t)$ коливань вільної поверхні рідини в явному вигляді.

Оскільки хрестоподібні хвилі є параметричними резонансними хвилями, то для визначення їхніх амплітуд слід розглядати нелінійну постановку. Надалі ми застосуємо метод суперпозиції Ляме для визначення амплітуд резонансних коливань вільної поверхні рідини як розв'язків нелінійних задач. Спочатку з нелінійних граничних кінематичних умов (7) знаходять амплітуди потенціалу φ_2 (27). Після цього на підставі нелінійної кінематичної умови (5) визначають співвідношення між амплітудами потенціалу φ_1 і амплітудами $\xi_{nm}(t)$ коливань вільної поверхні рідини. Нарешті, використовуючи нелінійну динамічну умову (4), отримують нелінійні рівняння для визначення амплітуд резонансних коливань вільної поверхні рідини при заданому законі руху хвилепродуктора (2).

4. ХРЕСТОПОДІБНІ РЕЗОНАНСНІ ХВИЛІ

Нехай частота коливань хвилепродуктора ω (2) удвічі перевищує однієї з власних частот ω_{nm} коливань вільної поверхні рідини:

$$\omega \approx 2\omega_{nm}. \quad (34)$$

У цьому випадку апроксимуємо коливання вільної поверхні рідини власною формою, якій відповідає частота ω_{nm} :

$$\xi \approx \xi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} + \xi_{00}. \quad (35)$$

Введемо малий параметр ε_1 :

$$\varepsilon_1 = \frac{a\omega_{nm}^2}{g}. \quad (36)$$

Іще Гарретт вказував, що коливань середнього рівня рідини в басейні може бути недостатньо для збудження хрестоподібних хвиль [6], але не зміг довести це математично. Для свого існування такі хвилі повинні отримувати енергію безпосередньо від коливань хвилепродуктора. У відповідності до формули (16) коливання середнього рівня рідини $\xi_{00}(t)$ мають вигляд (16):

$$\xi_{00}(t) = \frac{ah}{2L} \sin \omega t = \varepsilon_1 \frac{g}{2\omega_{nm}^2} \frac{h}{L} \sin \omega t. \quad (37)$$

Якщо довжина басейну значно перевищує його глибину ($L \gg h$), тоді $\xi_{00}(t)$ є зневажливою малою величиною порядку $O(\varepsilon_1^2)$.

Розглянемо конкретний випадок $h/L = 0.05$, який відповідає параметрам геометрії басейну в Інституті гідромеханіки НАН України. При цьому вплив потенціалу φ_0

$$\varphi_0 = \frac{a\omega}{4L} \cos \omega t [-(L-x)^2 + (z+h)^2] = \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{2\omega_{nm} L} [(z+h)^2 - (L-x)^2] \quad (38)$$

враховуватиметься при використанні нелінійних граничних умов (4), (5) і (7).

Якщо коливання вільної поверхні апроксимуються функцією виду (35), то

$$\varphi_1 \approx \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\operatorname{ch}[k_{nm}(z+h)]}{\operatorname{ch}(k_{n,m}h)}. \quad (39)$$

Візьмемо нелінійне граничне рівняння (7) для потенціалу $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$. Використовуючи розклад в околі $x = 0$ та зберігаючи члени $O(\varepsilon_1^{3/2})$, в результаті отримуємо вираз для φ_2 . Розглянемо цю процедуру більш детально.

Кінематична умова на межі хвилепродуктора при його незалежних від y коливаннях

$$x = F(z) \sin \omega t = a \left(1 + \frac{1}{h} z \right) \sin \omega t = \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(1 + \frac{1}{h} z \right) \sin \omega t,$$

має вигляд

$$(\varphi_0)_x + (\varphi_1)_x + (\varphi_2)_x = \omega F(z) \cos \omega t + F'(z) [(\varphi_0)_z + (\varphi_1)_z + (\varphi_2)_z]. \quad (40)$$

Оскільки $(\varphi_1)_x = 0$ при $x = 0$, то після його розкладу в околі хвилепродуктора в ряд Тейлора, маємо

$$(\varphi_1)_x \approx -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varphi_{nm}(t) \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\operatorname{ch} k_{nm}(z+h)}{\operatorname{ch} k_{nm}h} \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(1 + \frac{1}{h}z\right) \sin \omega t = O(\varepsilon_1^{3/2}), \quad (41)$$

бо $\varphi_{nm}(t)$ має той самий порядок, що й $\xi_{nm}(t)$.

Водночас

$$(\varphi_0)_x = \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{2\omega_{nm}^2} \left(2 - \frac{2x}{L}\right) = \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{\omega_{nm}^2} + O(\varepsilon_1^2). \quad (42)$$

Тому зі співвідношення (40) отримуємо

$$\begin{aligned} (\varphi_2)_x &= \frac{2\varepsilon_1 g}{\omega_{nm}^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h}z\right) \cos \omega t + \\ &+ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h}z\right) \sin \omega t \varphi_{nm}(t) \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\operatorname{ch} k_{nm}(z+h)}{\operatorname{ch} k_{nm}h} + \\ &+ \varepsilon_1 \frac{g \sin \omega t}{\omega_{nm}^2 h} (\varphi_1)_z = \frac{2\varepsilon_1 g}{\omega_{nm}^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h}z\right) \cos \omega t + \\ &+ \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h}z\right) \sin \omega t \varphi_{nm}(t) \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\operatorname{ch} k_{nm}(z+h)}{\operatorname{ch} k_{nm}h} + \\ &+ \varepsilon_1 \frac{g \sin \omega t}{\omega_{nm}^2 h} k_{nm} \varphi_{nm}(t) \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\operatorname{sh} k_{nm}(z+h)}{\operatorname{ch} k_{nm}h} + O(\varepsilon_1^2). \end{aligned} \quad (43)$$

Враховуючи розклад (27), отримуємо

$$\begin{aligned} (\varphi_2)_x|_{x=0} &= -\sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{0j}(t) \left(\cos \frac{j\pi z}{h}\right) \alpha_{0j} \operatorname{th} \alpha_{0j} L - \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi y}{b} \left[-\sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{mj}(t) \alpha_{mj} \operatorname{th} \alpha_{mj} L \cos \frac{j\pi z}{h}\right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Підставивши вираз (44) в оцінку (43) і застосувавши процедуру Бубнова, після інтегрування по поверхні хвилепродуктора й урахування співвідношення (26) маємо

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varepsilon_1 \cos \omega t \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_{0j} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{0j}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{0j}} + \\ &+ \varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_{mj} \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{mj}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{mj}}. \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}_{0j} &= \frac{-4g}{\omega_{nm}\alpha_{0j}\operatorname{th}\alpha_{0j}L} \int_{-h}^0 \frac{z}{h} \cos \frac{j\pi z}{h} dz; \\
 \tilde{\Phi}_{ij}(t) &= 0 \quad \text{при } i \neq 0, \quad i \neq m; \\
 \tilde{\Phi}_{mj} &= -\frac{g\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{\omega_{nm}^2\alpha_{mj}\operatorname{th}\alpha_{mj}L(k_{nm}\operatorname{th}k_{nm}h)} \int_{-h}^0 \frac{z}{h} \cos \frac{j\pi z}{h} dz \quad \text{при } j \neq 0; \\
 \tilde{\Phi}_{m0} &= \frac{-g\left[\frac{3}{2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{k_{nm}\operatorname{th}k_{nm}h}{h}\right]}{\omega_{nm}^2h\alpha_{m0}\operatorname{th}\alpha_{m0}L(k_{nm}\operatorname{th}k_{nm}h)} \quad \text{при } j = 0.
 \end{aligned} \tag{45}$$

Таким чином, складова потенціалу φ_2 набуває вигляду

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 &= \varepsilon_1 \cos \omega t \tilde{\Phi}_{00} + \varepsilon_1 \cos \omega t \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_{0j} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch}\alpha_{0j}(x-L)}{\operatorname{ch}\alpha_{0j}} + \\
 &\quad + \varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t \tilde{\Phi}_{m0} \cos \frac{n\pi y}{b} \frac{\operatorname{ch}\alpha_{m0}(x-L)}{\operatorname{ch}\alpha_{m0}} + \\
 &\quad + \varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_{mj} \cos \frac{n\pi y}{b} \frac{\operatorname{ch}\alpha_{mj}(x-L)}{\operatorname{ch}\alpha_{mj}}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Зауважимо, що члени розкладу φ_2 , в які входить співмножник $\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t$, мають порядок $O(\varepsilon_1^{3/2})$, оскільки виконується співвідношення (45). Для знаходження амплітуди хрестоподібних хвиль $\xi_{nm}(t)$ необхідно використати динамічну (4) та кінематичну (5) граничні умови. Для цього розкладемо їх у ряди Тейлора, знаючи, що $\varphi_1 \sim O(\varepsilon_1^{1/2})$, а φ_0 і $\varphi_2 \sim O(\varepsilon_1)$. При утриманні членів порядку $O(\varepsilon_1^{3/2})$ умова (5) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
 (\varphi_0)_z + (\varphi_1)_z + \xi(\varphi_0)_{zz} + \xi(\varphi_1)_{zz} + \xi^2(\varphi_1)_{zzz} + \xi(\varphi_2)_{zz} = \\
 = \xi_t + (\varphi_1)_x \xi_x + (\varphi_1)_y \xi_y + (\varphi_0)_x \xi_x + (\varphi_2)_y \xi_y + (\varphi_1)_{xz} \xi \xi_x + (\varphi_1)_{yz} \xi \xi_y
 \end{aligned} \tag{47}$$

при $z = 0$.

Підставляючи вирази (38), (39), (46) у співвідношення (47), домножуючи останнє на $\cos(m\pi y/b) \cos(n\pi x/L)$ та інтегруючи по всій вільній поверхні рідини при $z = 0$,

отримуємо

$$\begin{aligned} & \varphi_{nm}(t) k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h + \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{\omega_{nm} L} \xi_{nm} - \\ & - (\varepsilon_1 \cos \omega t) \xi_{nm}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{h} \right)^2 \tilde{\Phi}_{0j} 2 \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{0j}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{0j}} dx = \\ & = \dot{\xi}_{nm}(t) + \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t \xi_{nm}}{\omega_{nm} L} \frac{2}{2} \int_0^L \left(\frac{n\pi}{L} \right) (L-x) \sin 2 \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\varphi_{nm}(t) = \frac{\dot{\xi}_{nm}}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h} - \varepsilon_1 \xi_{nm} D \cos \omega t, \quad (48)$$

де

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h} & \left[\frac{g}{\omega_{nm} L} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{h} \right)^2 \tilde{\Phi}_{0j} 2 \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{0j}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{0j}} dx + \right. \\ & \left. + \frac{g}{\omega_{nm} L} \int_0^L \left(\frac{n\pi}{L} \right) (x-L) \sin 2 \frac{n\pi x}{L} dx \right]. \end{aligned}$$

Доданок $\varepsilon_1 D \xi_{nm}(t) \cos \omega t$ виражає вплив потенціалів φ_0 і φ_2 на величину $\varphi_{nm}(t)$, яка є фактично амплітудою φ_1 . Як ми побачимо далі, наявність цього члена призводитиме, до параметричного резонансу, так само, як і наявність членів зі співмножниками $\varepsilon_1 \xi_{nm}(t) \sin \omega t$ у виразі (46).

Розкладемо в ряд Тейлора динамічну умову (4), утримуючи члени порядку $O(\varepsilon^{3/2})$:

$$\begin{aligned} & (\varphi_0)_t + (\varphi_1)_t + \xi (\varphi_1)_{tz} + \xi^2 (\varphi_1)_{tzz} + (\varphi_2)_t + g\xi + \frac{1}{2} \left[(\varphi_1)_x^2 + (\varphi_1)_y^2 + (\varphi_1)_z^2 \right] + \\ & + (\varphi_1)_x (\varphi_2)_x + (\varphi_1)_y (\varphi_2)_y + (\varphi_1)_z (\varphi_2)_z + (\varphi_1)_x (\varphi_0)_x + (\varphi_1)_z (\varphi_0)_z + \\ & + (\varphi_1)_z \xi (\varphi_1)_{zz} + (\varphi_1)_x \xi (\varphi_1)_{xz} + (\varphi_1)_y \xi (\varphi_1)_{yz} = F_0(t) \quad \text{при} \quad z = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Далі, підставимо вирази (38), (39), (46) (47) і (48) у співвідношення (49), домножимо його на $\cos(m\pi y/b) \cos(n\pi x/L)$ та проінтегруємо по всій вільній поверхні рідини при

$z = 0$. Це дає рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\xi}_{nm}}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h} - \varepsilon_1 \xi_{nm} D \cos \omega t \right) + \frac{9}{16} \xi_{nm}^2 \frac{\ddot{\xi}_{nm} k_{nm}^2}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h} + \\ & + \frac{d}{dt} \left[\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t \left(\tilde{\Phi}_{m0} b_{m0n} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_{mj} b_{mjn} \right) \right] + \\ & + g \xi_{nm} + \frac{9}{16} \xi_{nm} k_{nm}^3 \operatorname{th} k_{nm} h \frac{\dot{\xi}_{nm}^2}{k_{nm}^2 \operatorname{th}^2 k_{nm} h} + \\ & + \frac{3}{16} [k_{nm}^2] k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h \xi_{nm} \frac{\dot{\xi}_{nm}^2}{k_{nm}^2 \operatorname{th}^2 k_{nm} h} = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Після очевидних перетворень запишемо його в формі

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi}_{nm} - \varepsilon_1 (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h) \dot{\xi}_{nm} D \cos \omega t + \varepsilon_1 (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h) \xi_{nm} D \omega \sin \omega t + \\ & + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} + \frac{9}{16} \xi_{nm}^2 k_{nm}^2 \ddot{\xi}_{nm} + \frac{3}{4} \xi_{nm} k_{nm}^2 \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ & + \varepsilon_1 \ddot{\xi}_{nm} D_1 \sin \omega t + \varepsilon_1 \omega D_1 \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t = 0, \end{aligned}$$

де

$$D_1 = \tilde{\Phi}_{m0} b_{m0n} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_{mj} b_{mjn}.$$

Ураховавши, що $\ddot{\xi}_{nm} \approx -\omega_{nm}^2 \xi_{nm} + O(\varepsilon_1)$, маємо

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \frac{9}{16} \omega_{nm}^2 k_{nm}^2 \xi_{nm}^2 \xi_{nm} + \frac{3}{4} k_{nm}^2 \xi_{nm} \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ & + \varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t (\omega D_1 - k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h D) - \varepsilon_1 \xi_{nm} \sin \omega t (\omega_{nm}^2 D_1 - k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h \omega D) = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Таким чином, для визначення амплітуди резонансних хрестоподібних хвиль отримано рівняння коливань з двома періодично змінними в часі коефіцієнтами, тобто, рівняння типу Матьє:

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \frac{9}{16} \omega_{nm}^2 k_{nm}^2 \xi_{nm}^3 + \frac{3}{4} k_{nm}^2 \xi_{nm} \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ & + \varepsilon_1 D_2 \xi_{nm} \sin \omega t + \varepsilon_1 D_3 \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t = 0, \end{aligned} \quad (52)$$

де

$$D_2 = k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h \omega D - \omega_{nm}^2 D_1;$$

$$D_3 = -k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h D + 2\omega_{nm} D_1.$$

Зауважимо, що $D_1 < 0$, оскільки згідно з (45) $\tilde{\Phi}_{mj} < 0$. Це означає, що хрестоподібні хвилі як розв'язки класичного рівняння Матьє [5] будуть мати значущі ненульові

амплітуди. Також усі члени рівняння, які вказують на можливість існування хрестоподібних хвиль з ненульовими амплітудами та входять в параметричні члени, пропорційні функції коливань хвилепродуктора. Саме завдяки ним і виникає можливість існування хрестоподібних хвиль. Таким чином, на основі методу суперпозиції ми описали механізм перекачки енергії від хвилепродуктора в хрестоподібні хвилі в ідеальній рідині, яка заповнює прямокутний басейн скінченних розмірів.

Насамкінець звертаємо увагу читачів на низку дуже послідовних досліджень щодо побудови математичних моделей збудження хрестоподібних поверхневих хвиль у рідині в бокалах при випромінюванні останніми звукових хвиль [4, 27, 34]. Уперше розв'язки для хрестоподібних хвиль в повністю обмежених басейнах були побудовані в роботах Т. Краснопольської та Г. ван Хейста [4, 27].

5. ВИСНОВКИ

1. У дослідному басейні Інституту гідромеханіки НАН України проведено серію експериментів, у яких спостерігались хрестоподібні поверхневі хвилі, генеровані при певних режимах роботи хвилепродуктора. Кількісно оцінено частотні діапазони коливань хвилепродуктора, при яких виникають хрестоподібні хвилі.
2. Для вивчення усталених режимів хрестоподібних хвиль у прямокутному басейні скінченних розмірів з хвилепродуктором уперше застосовано метод Ляме суперпозиції розв'язків, розроблений для розв'язання задач в теорії пружності.
3. Отримано аналітичні розв'язки для хрестоподібних хвиль. Показано, що в басейнах скінченних розмірів вони можуть генеруватися безпосередньо рухом хвилепродуктора. Побудовано нелінійну математичну модель, яка описує процес перекачки енергії від хвилепродуктора в поверхневі хвилі різних типів.
4. Результируюче модельне диференціальне рівняння є рівнянням Мат'є, в якому всі члени, що вказують на можливість існування хрестоподібних хвиль ненульових амплітуд та входять у параметричний член, пропорційні функції коливань хвилепродуктора. Таким чином, генерація хрестоподібних хвиль стає можливою виключно за рахунок коливань хвилепродуктора.

REFERENCES

- [1] Lord Rayleigh, "On maintained vibrations," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 15, no. 94, pp. 229–235, 1883. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786448308627342>
- [2] Lord Rayleigh, "On the crispations of fluid resting upon a vibrating support," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 16, no. 97, pp. 50–58, 1883. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786448308627392>
- [3] T. S. Krasnopskaya and G. J. F. van Heijst, "Wave pattern formation in a fluid annulus with a radially vibrating inner cylinder," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 328, pp. 229–252, 1996. DOI: <https://doi.org/10.1017/s0022112096008701>

- [4] T. S. Krasnopol'skaya and G. J. F. van Heijst, "Fluid surface waves in a partially filled 'singing wine glass'," *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, vol. 67, pp. 116–124, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2017.08.011>
- [5] T. S. Krasnopol'skaya and A. Y. Shvets, "Chaotic oscillations of a spherical pendulum as the effect of interaction with excitation device," in *Complexity in physics and technology*. World Scientific, 1992, pp. 77–89.
- [6] C. J. R. Garrett, "On cross-waves," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 41, no. 4, pp. 837–849, 1970. DOI: <https://doi.org/10.1017/s0022112070000952>
- [7] J. J. Mahony, "Cross-waves. part 1. theory," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 55, no. 2, pp. 229–244, 1972. DOI: <https://doi.org/10.1017/s002211207200182x>
- [8] A. F. Jones, "The generation of cross-waves in a long deep channel by parametric resonance," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 138, pp. 53–74, 1984. DOI: <https://doi.org/10.1017/s0022112084000033>
- [9] T. H. Havelock, "Forced surface-waves on water," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 8, no. 51, pp. 569–576, 1929. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786441008564913>
- [10] J. M. Chen, "Subharmonic resonance of nonlinear cross-waves: theory and experiments," Ph. D. Thesis, The University of Arizona, Tucson, AZ, 1987.
- [11] S. Lichter and A. J. Bernoff, "Stability of steady cross-waves: theory and experiment," *Physical Review A*, vol. 37, pp. 1663–1667, 1988. DOI: <https://doi.org/10.1103/physreva.37.1663>
- [12] S. Lichter and J. Chen, "Subharmonic resonance of nonlinear cross-waves," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 183, pp. 451–465, 1987. DOI: <https://doi.org/10.1017/s0022112087002726>
- [13] S. Lichter and W. B. Underhill, "Mode-number shifting of nonlinear cross-waves," *Physical Review A*, vol. 35, pp. 5282–5284, 1987. DOI: <https://doi.org/10.1103/physreva.35.5282>
- [14] L. Shemer and S. Lichter, "Identification of cross-wave regimes in the vicinity of a cut-off frequency," *Physics of Fluids*, vol. 30, no. 11, pp. 3427–3433, 1987. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.866474>
- [15] L. Shemer and S. Lichter, "The mode number dependence of neutral stability of cross-waves," *Experiments in Fluids*, vol. 9, no. 3, pp. 148–152, 1990. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf00187414>
- [16] J. C. Luke, "A variational principle for a fluid with a free surface," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 27, no. 2, pp. 395–397, 1967. DOI: <https://doi.org/10.1017/s0022112067000412>

- [17] J. M. Becker and J. W. Miles, “Standing radial cross-waves,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 222, no. 1, pp. 471–499, 1991. DOI: <https://doi.org/10.1017/s0022112091001180>
- [18] J. M. Becker and J. W. Miles, “Progressive radial cross-waves,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 245, no. 1, pp. 29–46, 1992. DOI: <https://doi.org/10.1017/s0022112092000338>
- [19] J. W. Miles, “Parametrically excited, standing cross-waves,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 186, pp. 119–127, 1988. DOI: <https://doi.org/10.1017/s0022112088000060>
- [20] J. W. Miles and D. Henderson, “Parametrically forced surface waves,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 22, pp. 143–165, 1990. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.22.010190.001043>
- [21] A. Azmeri, C. Ummah, F. Z. Jemi, I. Faudli, and Q. A. B. Nasaiy, “Cross-waves and pulsating flows in the side-channel spillway – an experimental approach,” *Journal of Water and Land Development*, no. 56, pp. 51–57, 2023. DOI: <https://doi.org/10.24425/jwld.2023.143744>
- [22] G. Wang, Y. Yu, A. Tao, and J. Zheng, “An analytic investigation of primary and cross waves in the flume with a shoal,” *Ocean Engineering*, vol. 244, pp. 110 428 (1–9), 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.110428>
- [23] V. D. Pechuk and T. S. Krasnopolska, “Estimation of the largest Lyapunov exponent for a model of cross-shaped waves in a rectangular channel of finite size,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 282, no. 5, pp. 862–869, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07221-x>
- [24] M. Faraday, “On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. A121, pp. 299–340, 1831. DOI: <https://doi.org/10.1098/rstl.1831.0018>
- [25] B. J. S. Barnard and W. G. Pritchard, “Cross-waves. part 2. experiments,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 55, no. 2, pp. 245–255, 1972. DOI: <https://doi.org/10.1017/s0022112072001831>
- [26] T. S. Krasnopolskaya, V. M. Spektor, and E. D. Pechuk, “Chaos at cross-waves in fluid free surface,” *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*, no. 2, pp. 105–115, 2015.
- [27] T. S. Krasnopolskaya, E. D. Pechuk, V. Y. Filimonov, V. A. Kochin, and G. F. van Heijst, “Coupled cross-waves in a partially filled ‘singing wine glass’,” *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, vol. 100, pp. 247–255, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2023.04.004>
- [28] H. Lamb, *Hydrodynamics*. New York: Dover, 1945.
- [29] N. N. Lebedev, I. P. Skal’skaya, and Y. S. Uflyand, *Problems in mathematical physics*. Oxford: Pergamon Press, 1966.

- [30] G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Paris: Bachelier, 1852.
- [31] T. S. Krasnopol'skaya, "Acoustic chaos caused by the Sommerfeld effect," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 8, no. 8, pp. 803–815, 1994. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfls.1994.1058>
- [32] T. S. Krasnopol'skaya and A. Y. Shvets, "Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 8, no. 1, pp. 1–18, 1994. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfls.1994.1001>
- [33] T. S. Krasnopol'skaya and A. Y. Shvets, "Parametric resonance in the system: Liquid in tank + electric motor," *International Applied Mechanics*, vol. 29, no. 9, pp. 722–730, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf00847371>
- [34] T. Krasnopol'ska and Y. Gorskiy, "Construction of mathematical models of the surface cross-waves excitation in fluids in "singing glasses" when the glasses emit sound waves," *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, vol. 78, no. 1, pp. 66–69, 2024. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/1.12>

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Rayleigh L. On maintained vibrations // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. — 1883. — Vol. 15, no. 94. — P. 229–235.
- [2] Rayleigh L. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. — 1883. — Vol. 16, no. 97. — P. 50–58.
- [3] Krasnopol'skaya T. S., van Heijst G. J. F. Wave pattern formation in a fluid annulus with a radially vibrating inner cylinder // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1996. — Vol. 328. — P. 229–252.
- [4] Krasnopol'skaya T. S., van Heijst G. J. F. Fluid surface waves in a partially filled 'singing wine glass' // *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. — 2018. — Vol. 67. — P. 116–124.
- [5] Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Y. Chaotic oscillations of a spherical pendulum as the effect of interaction with excitation device // *Complexity in physics and technology*. — World Scientific, 1992. — P. 77–89.
- [6] Garrett C. J. R. On cross-waves // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1970. — Vol. 41, no. 4. — P. 837–849.
- [7] Mahony J. J. Cross-waves. Part 1. Theory // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1972. — Vol. 55, no. 2. — P. 229–244.
- [8] Jones A. F. The generation of cross-waves in a long deep channel by parametric resonance // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1984. — Vol. 138. — P. 53–74.

- [9] Havelock T. H. Forced surface-waves on water // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. — 1929. — Vol. 8, no. 51. — P. 569–576.
- [10] Chen J. M. Subharmonic resonance of nonlinear cross-waves: theory and experiments : Ph. D. Thesis ; The University of Arizona. — Tucson, AZ, 1987. — 92 p.
- [11] Lichter S., Bernoff A. J. Stability of steady cross-waves: theory and experiment // Physical Review A. — 1988. — Vol. 37. — P. 1663–1667.
- [12] Lichter S., Chen J. Subharmonic resonance of nonlinear cross-waves // Journal of Fluid Mechanics. — 1987. — Vol. 183. — P. 451–465.
- [13] Lichter S., Underhill W. B. Mode-number shifting of nonlinear cross-waves // Physical Review A. — 1987. — Vol. 35. — P. 5282–5284.
- [14] Shemer L., Lichter S. Identification of cross-wave regimes in the vicinity of a cut-off frequency // Physics of Fluids. — 1987. — Vol. 30, no. 11. — P. 3427–3433.
- [15] Shemer L., Lichter S. The mode number dependence of neutral stability of cross-waves // Experiments in Fluids. — 1990. — Vol. 9, no. 3. — P. 148–152.
- [16] Luke J. C. A variational principle for a fluid with a free surface // Journal of Fluid Mechanics. — 1967. — Vol. 27, no. 2. — P. 395–397.
- [17] Becker J. M., Miles J. W. Standing radial cross-waves // Journal of Fluid Mechanics. — 1991. — Vol. 222, no. 1. — P. 471–499.
- [18] Becker J. M., Miles J. W. Progressive radial cross-waves // Journal of Fluid Mechanics. — 1992. — Vol. 245, no. 1. — P. 29–46.
- [19] Miles J. W. Parametrically excited, standing cross-waves // Journal of Fluid Mechanics. — 1988. — Vol. 186. — P. 119–127.
- [20] Miles J. W., Henderson D. Parametrically forced surface waves // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1990. — Vol. 22. — P. 143–165.
- [21] Cross-waves and pulsating flows in the side-channel spillway – an experimental approach / Azmeri A., Ummah C., Jemi F. Z., Faudli I., and Nasaïy Q. A. B. // Journal of Water and Land Development. — 2023. — no. 56. — P. 51–57.
- [22] An analytic investigation of primary and cross waves in the flume with a shoal / Wang G., Yu Y., Tao A., and Zheng J. // Ocean Engineering. — 2022. — Vol. 244. — P. 110428 (1–9).
- [23] Pechuk V. D., Krasnopolska T. S. Estimation of the largest Lyapunov exponent for a model of cross-shaped waves in a rectangular channel of finite size // Journal of Mathematical Sciences. — 2024. — Vol. 282, no. 5. — P. 862–869.

- [24] Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. — 1831. — Vol. A121. — P. 299–340.
- [25] Barnard B. J. S., Pritchard W. G. Cross-waves. Part 2. Experiments // Journal of Fluid Mechanics. — 1972. — Vol. 55, no. 2. — P. 245–255.
- [26] Krasnopol'skaya T. S., Spektor V. M., Pechuk E. D. Chaos at cross-waves in fluid free surface // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM). — 2015. — no. 2. — P. 105–115.
- [27] Coupled cross-waves in a partially filled ‘singing wine glass’ / Krasnopol'skaya T. S., Pechuk E. D., Filimonov V. Y., Kochin V. A., and van Heijst G. F. // European Journal of Mechanics – B/Fluids. — 2023. — Vol. 100. — P. 247–255.
- [28] Лэмб Г. Гидродинамика. — Москва/Ленинград : Гостехтеориздат, 1947. — 928 с.
- [29] Lebedev N. N., Skal'skaya I. P., Uflyand Y. S. Problems in mathematical physics. — Oxford : Pergamon Press, 1966. — 414 p.
- [30] Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. — Paris : Bachelier, 1852. — 335 p.
- [31] Krasnopol'skaya T. S. Acoustic chaos caused by the Sommerfeld effect // Journal of Fluids and Structures. — 1994. — Vol. 8, no. 8. — P. 803–815.
- [32] Krasnopol'skaya T., Shvets A. Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // Journal of Fluids and Structures. — 1994. — Vol. 8, no. 1. — P. 1–18.
- [33] Краснопольская Т. С., Шве́ц А. Ю. Параметрический резонанс в системе «жидкость в баке – электродвигатель» // Прикладная механика. — 1993. — Т. 29, № 9. — С. 52–61.
- [34] Горський Ю. В., Краснопольська Т. С. Побудова математичних моделей збудження хрестоподібних поверхневих хвиль у воді в «співаючих бокалах» при випромінюванні бокалами звукових хвиль // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки. — 2024. — Т. 78, № 1. — С. 66–69.

T. S. Krasnopol'skaya, V. D. Pechuk

Dynamics of cross-waves in finite rectangular tanks

The paper examines the cross-waves emerging on the surface of the tank in a direction perpendicular to the direction of the wavemaker's motion. The difficulties of mathematical analysis of this phenomenon are related to the fact that the linearized motion equations do not describe the generation mechanism for such waves. The experimental observations of cross-waves in the experimental tank of the Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine indicate that they emerge due to the realization of parametric resonance conditions in the nonlinear system. The frequency ranges of wavemaker oscillations for which the cross-waves occur are quantitatively estimated. It should be mentioned that all previous studies in this domain were based on the methodologies

that used Havelock's solution for the reservoir of infinite length or depth. On the contrary, here the generation of cross-waves is considered in the long rectangular tank with finite dimensions. To study their steady regimes, the Lamé superposition method developed for solving elasticity theory problems was used for the first time. As shown, the considered waves in the finite tanks may be generated by the immediate motion of the wavemaker. The corresponding analytical solutions for the velocity potential are obtained, and the orders of magnitude are assessed for all its components by introducing the small parameter. The mathematical model is proposed to describe the process of the wavemaker's energy transmission into the cross-waves. The obtained differential equation is of the Mathieu type. Studying its coefficients reveals the possibility of the existence of cross-waves with non-zero amplitudes in the system under consideration. It is worth noting that all the addends forming the parametric term are proportional to the function of the forcing oscillation. Therefore, the generation of the cross-waves is possible only due to cyclic fluid motions excited by the wavemaker.

KEY WORDS: cross-waves, parametric resonance, finite tank, method of superposition, the Mathieu differential equation