

УДК 532.5

# СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В СОСУДАХ С ПЕРФОРИРОВАННЫМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

Д. И. БОРИСОВ, Ю. И. РУДНЕВ

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина

Получено 06.10.2009

Рассматриваются малые (линейные) колебания идеальной жидкости, частично заполняющей сосуд, секционированный перфорированными перегородками. В предположении большого числа перфорационных отверстий приведена математическая формулировка задачи с усредненными условиями на перегородках. Дана вариационная формулировка усредненной спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости. Установлены некоторые общие свойства спектра частот собственных колебаний. Рассмотрен ряд конкретных примеров.

Розглядаються малі (лінійні) коливання ідеальної рідини, яка частково заповнює порожнину, що секціонована перфорованими перегородками. В припущенні великої кількості перфораційних отворів наведено математичне формулювання задачі з усередненими умовами на перегородках. Наведено варіаційне формулювання усередненої задачі про власні коливання рідини. Встановлено деякі загальні властивості спектру частот власних коливань рідини. Розглянуто низку конкретних прикладів.

Small (linear) oscillations of ideal fluid in partially filled vessel with rigid perforated bafflers are considered. The mathematical statement of the problem with averaged conjugation conditions on the bafflers is given in assumption of large number of perforating holes. Variational statement of the averaged normal mode problem is given as well. Some general properties of eigenfrequency spectrum are found. Several examples are considered.

## ВВЕДЕНИЕ

Задачи динамики твердого тела с полостями, содержащими жидкость, на протяжении многих лет привлекают к себе неослабевающее внимание [1–6]. В последнее время основные усилия направлены на исследование нелинейных движений жидкости с большими амплитудами колебаний свободной поверхности [5, 6]. Вместе с тем исследование колебаний жидкости в рамках линейной теории по-прежнему остается актуальной задачей, имеющей важные практические приложения.

Для длительного хранения и транспортировки больших объемов жидкости используются баки, содержащие, как правило, секционные перегородки. Перегородки оказывают значительное влияние на собственные частоты и моды колебаний жидкости, коэффициенты присоединенных масс и другие гидродинамические характеристики системы "твердое тело + жидкость". Во многих экспериментальных и теоретических работах [2, 3, 7–10] отмечается высокая эффективность использования перегородок для демпфирования колебаний и нейтрализации динамического воздействия жидкости на стенки бака.

Наличие перегородок приводит к дополнительным трудностям при решении краевых задач, описывающих движение жидкости. Эти трудности особенно велики, если перегородки выполнены с

определенным числом отверстий, и быстро становятся непреодолимыми с ростом числа отверстий и усложнением их формы. Однако в том случае, когда число отверстий велико, а их размеры и расстояния между ними достаточно малы, приближенное решение можно найти, переходя к более простой задаче, получаемой путем замены точных граничных условий на перфорированных участках перегородок некоторыми усредненными условиями сопряжения.

Аналогичные трудности возникают при исследовании движения жидкости в областях, содержащих пористые тела или перегородки. В [11, 12] и ряде других работ используются граничные условия на поверхности таких тел, отвечающие феноменологическим законам фильтрации в пористых средах. Проблема выбора граничных условий на поверхности проницаемых тел, обтекаемых несжимаемой жидкостью, рассматривается в [13]. Математическим вопросам, возникающим при усреднении краевых и начально-краевых задач в перфорированных областях, посвящены монографии [14, 15].

В данной работе приведена постановка задачи о малых потенциальных колебаниях идеальной жидкости в сосуде, секционированном перфорированными перегородками. При этом используются усредненные условия на перегородках, полученные в [14]. Дана вариационная формулиров-

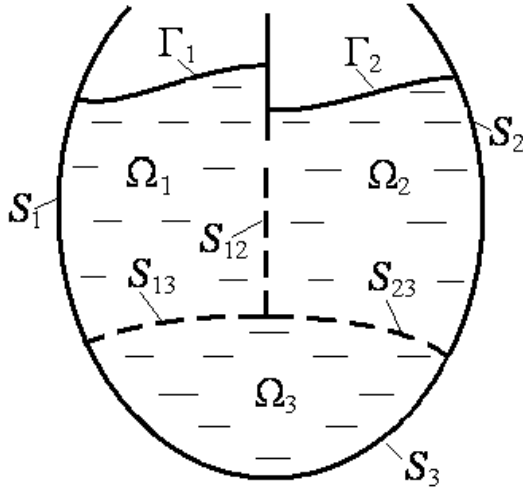


Рис. 1. К постановке задачи

ка усредненной спектральной задачи о собственных нормальных колебаниях жидкости. Подробно рассмотрен случай прямоугольного бака с горизонтальными и (параллельными боковым стенкам сосуда) вертикальными перфорированными перегородками. Приведены результаты расчетов собственных частот колебаний жидкости в зависимости от проницаемости перегородок и геометрических параметров сосуда. Аналогичные результаты получены для кругового цилиндра с кольцевыми, радиальными и горизонтальными перегородками.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются малые (линейные) движения идеальной жидкости в частично заполненном неподвижном сосуде. Предполагается, что внутри полости сосуда установлены тонкие недеформируемые перегородки (см. рис. 1).

Введем декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , жестко связанную с сосудом, направляя ось  $Ox_3$  вертикально вверх. Пусть  $\Omega$  – область, занимаемая жидкостью,  $\Gamma$  – свободная поверхность жидкости,  $S$  – поверхность, ограничивающая полость сосуда. В равновесном состоянии в поле сил тяжести уравнение свободной поверхности  $\Gamma$  имеет вид:  $x_3 = H (= \text{const})$ .

Предположим, что перегородки делят область  $\Omega$  на  $N$  под областей (секций)  $\Omega_k$ ,  $k \in \overline{1, N}$ . Перфорация перегородок выполнена так, что все  $\Omega_k$ ,  $k \in \overline{1, N}$  образуют единую систему сообщающихся секций. Будем считать также, что свободная по-

верхность  $\Gamma$  делится перегородками на отдельные связные части  $\Gamma_k$ , так что  $\Gamma = \bigcup_{k \in \mathcal{I}_\Gamma} \Gamma_k$  где  $\mathcal{I}_\Gamma$  – множество номеров областей  $\Omega_k$ , примыкающих к поверхности  $\Gamma$ . Перегородки со свободным краем в области  $\Omega$  исключим из рассмотрения.

Пусть  $\delta$  – толщина перегородок,  $L$  – характерный линейный размер сосуда. Считая  $\delta \ll L$ , будем отождествлять перегородку между двумя смежными областями  $\Omega_j, \Omega_k$  с ее срединной поверхностью  $S_{jk}$ . Выделим на поверхности  $S_{jk}$  непересекающиеся связные куски (перфорационные отверстия)  $\sigma_{jk}^{(m)} \subset S_{jk}$ ,  $m \in \overline{1, m_{jk}}$ . Пусть  $S'_{jk} := \bigcup_{m=1}^{m_{jk}} \sigma_{jk}^{(m)}$ . Множество  $S''_{jk} := S_{jk} \setminus S'_{jk}$  является, очевидно, непроницаемым участком перегородки между областями  $\Omega_j, \Omega_k$ .

Поверхность контакта жидкости, заполняющей область  $\Omega_k$ , с поверхностью, ограничивающей полость сосуда, будем обозначать через  $S_k$ . Отметим, что для некоторых номеров  $j, k \in \overline{1, N}$  поверхности  $S_{jk}$ ,  $S_k$  могут быть пустыми множествами. Множество пар целочисленных индексов  $(jk)$  таких, что  $j < k$  и  $|S_{jk}| \neq 0$  ( $|S_{jk}|$  – площадь поверхности  $S_{jk}$ ), обозначим через  $\mathcal{I}$ . Множество номеров областей  $\Omega_k$ , примыкающих к поверхности  $S$ , обозначим через  $\mathcal{I}_S$ , так что  $S = \bigcup_{k \in \mathcal{I}_S} S_k$ .

Нормали  $\vec{n}$  к поверхностям перегородок  $S_{jk}$  условимся направлять в сторону области с большим номером; нормали к поверхностям  $\Gamma$  и  $S$  будем считать внешними по отношению к области  $\Omega$ , занимаемой жидкостью.

Пусть  $\zeta^{(k)}(t, x_1, x_2)$  означает отклонение движущейся свободной поверхности жидкости  $\Gamma_k(t)$  от равновесного положения  $\Gamma$ ,  $\varphi^{(k)}(t, \vec{x})$  – потенциал скоростей жидкости в области  $\Omega_k$ . Предположим, что число отверстий в каждом перфорированном участке перегородки достаточно велико, а их размеры и расстояния между ними малы. В этих предположениях малые потенциальные движения жидкости вблизи равновесного состояния приближенно можно описать следующими уравнениями, граничными и начальными условиями [17]:

$$\Delta \varphi^{(k)}(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k \in \overline{1, N}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta^{(k)}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma_k, \quad k \in \mathcal{I}_\Gamma; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial t} + g \zeta^{(k)} = f^{(k)}(t, \vec{x}) + c(t) \quad \text{на } \Gamma_k, \quad k \in \mathcal{I}_\Gamma; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} = q_{jk}(\varphi^{(k)} - \varphi^{(j)}) \quad \text{на } S_{jk}, \quad (jk) \in \mathcal{I}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k \in \mathcal{I}_S; \quad (5)$$

$$\zeta^{(k)}|_{t=0} = \zeta_0^{(k)}(x, y), \quad \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n}|_{t=0} = \zeta_1^{(k)}(x, y), \quad k \in \mathcal{I}_\Gamma. \quad (6)$$

Здесь  $g$  – ускорение силы тяжести,  $f(t, \vec{x})$  – силовая функция возмущений внешнего поля массовых сил,  $\zeta_0^{(k)}(x, y)$ ,  $\zeta_1^{(k)}(x, y)$  – заданные функции, определяющие начальные отклонения и скорости точек свободной поверхности жидкости,  $c(t)$  – произвольная функция времени  $t$ .

Отличительной особенностью усредненной задачи (1)–(6) являются условия сопряжения (4). Функции  $q_{jk} = q_{jk}(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in S_{jk}$  в этих условиях будем называть проницаемостями перегородок. В дальнейшем проницаемости перегородок  $q_{jk}(\vec{x})$  предполагаются известными.

Условия сопряжения (4) являются результатом усреднения точных (в рамках модели идеальной жидкости) граничных условий на перегородках (см. [14], гл. 3):

$$\begin{aligned} \varphi^{(j)} &= \varphi^{(k)}, \quad \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} \quad \text{на } S'_{jk} := \cup_{m=1}^{m_{jk}} \sigma_{jk}^{(m)}; \\ \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S''_{jk} := S_{ij} \setminus S'_{jk}, \quad (ij) \in \mathcal{I}. \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что условиям (7) на проницаемом участке перегородки  $S'_{ij} \in S_{ij}$  отвечает предельный случай условий (4):  $q_{jk}(\vec{x}) = \infty \quad \forall \vec{x} \in S'_{jk} \subset S_{jk}$ . На непроницаемом участке перегородки  $S''_{jk} \subset S_{jk}$  необходимо принять  $q_{jk}(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in S''_{jk}$ ; в этом случае условия (4) и (7) на  $S''_{jk}$  в точности совпадают.

Пусть  $S_{ij}^0 \subset S_{ij}$  – отверстие больших размеров в перегородке  $S_{ij}$ . Из сказанного выше следует, что  $S_{ij}^0$  можно рассматривать как перфорированный участок с бесконечно большой проницаемостью. В этом случае приближенное решение задачи (1)–(6) можно получить, полагая

$$q_{ij}(\vec{x}) = q_{ij}^0 (= \text{const}) \quad \forall \vec{x} \in S_{ij}^0$$

и выбирая константу  $q_{ij}^0$  достаточно большой.

Аналогичный прием позволяет охватить случай перегородок со свободным краем в области, занимаемой жидкостью. Продлевав такую перегородку до пересечения с внешней стенкой бака или с другими перегородками и считая проницаемость дополнительного участка перегородки бесконечно большой, сведем тем самым рассматриваемый случай к предыдущему.

В приведенной постановке усредненной задачи (1)–(6) предполагается, что перфорированный участок  $S'_{ij}$  каждой перегородки, пересекающей свободную поверхность жидкости  $\Gamma$ , отстоит от нее на некотором расстоянии  $\text{dist}(S'_{ij}, \Gamma) >$

$d_0 > 0$ . Это связано с тем, что возникающие колебания жидкости в общем случае сопровождаются разрывами свободной поверхности на перегородках, не учитываемыми усредненными граничными условиями (4). Физически ясно, однако, что решения усредненной задачи (1)–(6) могут быть использованы для приближенного описания колебаний жидкости и в том случае, если проницаемости перегородок в окрестности линий пересечения со свободной поверхностью достаточно малы, или, наоборот, достаточно велики.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением свободных нормальных колебаний жидкости. Эти колебания описываются при  $f(t, \vec{x}) \equiv 0$  решениями задачи (1)–(5) следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \zeta(t, x_1, x_2) \\ \varphi(\vec{x}) \end{pmatrix} = \exp(i\omega t) \begin{pmatrix} u(x_1, x_2) \\ \phi(\vec{x}) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь  $\omega$  – круговая частота собственных колебаний жидкости,  $u(x_1, x_2)$ ,  $\phi(\vec{x})$  – амплитудные множители (моды), определяющие формы колебаний свободной поверхности. Подставляя (8) в уравнения и граничные условия задачи (1)–(5), после отделения экспоненциального множителя получим спектральную краевую задачу (относительно спектрального параметра  $\lambda := \omega^2/g$  и отвечающих ему собственных функций  $\phi(\vec{x})$ ):

$$\Delta \phi^{(k)}(\vec{x}) = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k \in \overline{1, N}; \quad (9)$$

$$\lambda \phi^{(k)} - \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n} = c_\Gamma \quad \text{на } \Gamma_k, \quad k \in \mathcal{I}_\Gamma, \quad \lambda := \omega^2/g; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial n} = \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n} = q_{jk}(\phi^{(j)} - \phi^{(k)}) \quad \text{на } S_{jk}, \quad (jk) \in \mathcal{I}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k \in \mathcal{I}_S, \quad (12)$$

где  $c_\Gamma$  – произвольная постоянная.

Моды колебаний свободной поверхности жидкости определяются по собственным значениям  $\lambda$  и отвечающим им собственным функциям  $\phi$  спектральной задачи (9)–(12) согласно равенству:

$$u^{(k)} = a \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma_k, \quad k \in \mathcal{I}_\Gamma, \quad (13)$$

где  $a$  – произвольный амплитудный множитель. Функции  $u^{(k)}$ ,  $k \in \mathcal{I}_\Gamma$  должны удовлетворять условию

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_\Gamma} \int_{\Gamma_k} u^{(k)} d\Gamma = 0, \quad (14)$$

легко вытекающему из выражений (13), (12), (9).

Как известно [4, 16], спектральная задача о малых колебаниях идеальной жидкости в частично заполненном сосуде в точной постановке имеет дискретный спектр собственных значений  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ , все собственные значения положительны, причем  $\lambda_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ; каждому собственному значению  $\lambda_n$  отвечает конечное число собственных функций  $u_n$ , система собственных функций  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  полна в определенных функциональных пространствах. В [17] показано, что все эти свойства полностью переносятся на спектральную задачу (9)–(13).

## 2. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Приведем вариационную формулировку усредненной спектральной задачи (9)–(12). С этой целью рассмотрим функционал:

$$F(\phi) = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} (\nabla \phi^{(k)})^2 d\Omega + \sum_{(jk) \in \mathcal{I}} \int_{S_{jk}} q_{jk} (\phi^{(j)} - \phi^{(k)})^2 dS - \lambda \sum_{k \in \mathcal{I}_\Gamma} \int_{\Gamma_k} (\phi^{(k)})^2 d\Gamma. \quad (15)$$

Здесь и далее под  $\phi$  понимаются  $N$ -компонентные функции  $\phi(\vec{x}) := (\phi^{(1)}(\vec{x}), \dots, \phi^{(N)}(\vec{x}))$ .

Будем считать, что  $\phi^{(k)}(\vec{x}) \forall k \in \overline{1, N}$  принадлежат пространству Соболева  $\mathcal{H}^1(\Omega_k)$  квадратично суммируемых по области  $\Omega_k$  функций с квадратично суммируемыми (обобщенными) производными первого порядка. Кроме того, потребуем, чтобы функции  $\phi(\vec{x})$  удовлетворяли дополнительному условию:

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_\Gamma} \int_{\Gamma_k} \phi^{(k)}(\vec{x}) d\Gamma = 0. \quad (16)$$

Множество функций  $\phi(\vec{x})$ , удовлетворяющих условию (16), и таких, что  $\phi^{(k)}(\vec{x}) \in \mathcal{H}^1(\Omega_k) \forall k \in \overline{1, N}$ , обозначим через  $\mathcal{H}_\Gamma^1(\Omega)$ .

Варьируя функционал (15), получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta F(\phi; \delta \phi) = & \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \nabla \phi^{(k)} \nabla \delta \phi^{(k)} d\Omega + \\ & + \sum_{(jk) \in \mathcal{I}} \int_{S_{jk}} q_{jk} (\phi^{(j)} - \phi^{(k)}) (\delta \phi^{(j)} - \delta \phi^{(k)}) dS - \\ & - \lambda \sum_{k \in \mathcal{I}_\Gamma} \int_{\Gamma_k} \phi^{(k)} \delta \phi^{(k)} d\Gamma. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя формулу Грина (для оператора Лапласа), преобразуем первую сумму в правой части равенства (17) к виду:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \nabla \phi^{(k)} \nabla \delta \phi^{(k)} d\Omega = & - \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \Delta \phi^{(k)} \delta \phi^{(k)} d\Omega + \\ & + \sum_{(jk) \in \mathcal{I}} \int_{S_{jk}} \left( \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial n} \delta \phi^{(j)} - \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n} \delta \phi^{(k)} \right) dS + \\ & + \sum_{k \in \mathcal{I}_\Gamma} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n} \delta \phi^{(k)} d\Gamma + \sum_{k \in \mathcal{I}_S} \int_{S_k} \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n} \delta \phi^{(k)} dS. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta F(\phi; \delta \phi) = & - \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \Delta \phi^{(k)} \delta \phi^{(k)} d\Omega + \\ & + \sum_{(jk) \in \mathcal{I}} \int_{S_{jk}} \left\{ \left[ \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial n} + q_{jk} (\phi^{(j)} - \phi^{(k)}) \right] \delta \phi^{(j)} - \right. \\ & \left. - \left[ \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n} + q_{jk} (\phi^{(j)} - \phi^{(k)}) \right] \delta \phi^{(k)} \right\} dS + \\ & + \sum_{k \in \mathcal{I}_\Gamma} \int_{\Gamma_k} \left( \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n} - \lambda \phi^{(k)} \right) \delta \phi^{(k)} d\Gamma + \\ & + \sum_{k \in \mathcal{I}_S} \int_{S_k} \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n} \delta \phi^{(k)} dS. \end{aligned} \quad (19)$$

Вариации  $\delta \phi^{(k)}$  функций  $\phi^{(k)}$  должны удовлетворять условию:

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_\Gamma} \int_{\Gamma_k} \delta \phi^{(k)} d\Gamma = 0. \quad (20)$$

Очевидно, что на решениях задачи (9)–(12) первая вариация функционала  $F$  обращается в нуль:

$$\delta F(\phi; \delta \phi) = 0 \quad \forall \delta \phi \in \mathcal{H}_\Gamma^1(\Omega). \quad (21)$$

Верно и обратное утверждение: из условия стационарности функционала  $F$  легко следуют уравнения и граничные условия задачи (9)–(12); постоянная  $\sigma$  в динамическом условии (10) появляется при этом как множитель Лагранжа для условия (20). Таким образом, определение частот и мод колебаний жидкости в сосудах с тонкостенными перфорированными перегородками сводится к определению стационарных точек функционала  $F$ , определенного выражением (15).

Приведем несколько видоизмененную вариационную формулировку спектральной задачи (9)–

(12). Вместо  $F(\phi)$  рассмотрим функционал

$$F_1(\phi) := \left[ \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} (\nabla \phi^{(k)})^2 d\Omega + \sum_{(ik) \in \mathcal{I}} \int_{S_{jk}} q_{jk} (\phi^{(j)} - \phi^{(k)})^2 dS \right] \times \left[ \sum_{k \in \mathcal{I}_\Gamma} \int_{\Gamma_k} (\phi^{(k)})^2 d\Gamma \right]^{-1}. \quad (22)$$

Первое (минимальное) собственное значение  $\lambda_1$  спектральной задачи (9)–(12) совпадает с минимальным значением функционала  $F_1(\phi)$  на множестве функций  $\phi \in \mathcal{H}_\Gamma^1(\Omega)$ . Следующие собственные значения, упорядоченные по возрастанию, определяются как последовательные минимумы функционала  $F_1(\phi)$  на множестве функций  $\phi \in \mathcal{H}_\Gamma^1(\Omega)$ , удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям ортогональности. Задача определения  $n$ -го собственного значения  $\lambda_n$  имеет вид:

$$\lambda_n = \min_{\phi} F_1(\phi), \quad \phi \in \mathcal{H}_\Gamma^1(\Omega), \quad (23)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_\Gamma} \int_{\Gamma_k} \phi^{(k)} \phi_m^{(k)} d\Gamma = 0 \quad \forall m \in \overline{1, (n-1)},$$

где  $\phi_m := (\phi_m^{(1)}, \dots, \phi_m^{(N)})$  – собственная функция рассматриваемой спектральной задачи, отвечающая собственному значению  $\lambda_m$ .

При исследовании общих свойств спектра частот собственных нормальных колебаний жидкости часто более удобным оказывается так называемый максимально-минимальный принцип. Согласно этому принципу собственные значения спектральной задачи (9)–(12) определяются как решения следующей задачи:

$$\lambda_n = \max_{\mathcal{M}_{n-1}} \min_{\phi \perp \mathcal{M}_{n-1}} F_1(\phi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Здесь минимум определяется на ортогональном дополнении к  $(n-1)$ -мерному подпространству  $\mathcal{M}_{n-1}$  в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_\Gamma^1(\Omega)$ , а максимум берется по всем подпространствам  $\mathcal{M}_{n-1}$ .

Опираясь на вариационные формулировки задачи (9)–(12), можно показать, в частности, что первая (минимальная) частота колебаний в сосуде с перегородками не превышает минимальную частоту колебаний в том же сосуде без перегородок. Дополнительное секционирование полости сосуда приводит к понижению собственных частот колебаний жидкости. Пусть  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\lambda'_n\}_{n=1}^\infty$  – спектры собственных значений задачи (9)–(12),

отвечающие проницаемостям перегородок  $q_{jk}, q'_{jk}$ . Если  $q_{jk} < q'_{jk} \quad \forall (ik) \in \mathcal{I}$ , то, как нетрудно показать,  $\lambda_n \leq \lambda'_n, n = 1, 2, \dots$ . Отсюда следует, что увеличение проницаемости перегородок приводит к повышению собственных частот колебаний жидкости  $\omega_n = (g\lambda_n)^{1/2}$ ; некоторые из собственных частот  $\omega_n$  могут оставаться при этом неизменными. Приведенные ниже примеры полностью подтверждают эти выводы.

### 3. ПРИМЕРЫ

#### 3.1. Вертикальный цилиндр, секционированный горизонтальными перегородками.

Рассмотрим вертикальный цилиндрический сосуд с плоским дном, секционированный горизонтальными перфорированными перегородками. Начало системы координат  $Ox_1x_2x_3$  поместим на дно сосуда. Будем считать, что перегородки установлены в поперечных сечениях сосуда  $x_3 = H_k = \text{const}, k \in \overline{1, (N-1)}$ , плоскость  $x_3 = H_N$  отвечает свободной поверхности жидкости, причем  $0 = H_0 < H_1 < \dots < H_N \equiv H$ .

Перегородки делят область, занимаемую жидкостью, на  $N$  слоев  $\Omega_k, k \in \overline{1, N}$ , пронумерованных в направлении от нижнего слоя к верхнему. Толщину  $k$ -го слоя обозначим через  $h_k := H_k - H_{k-1}, k \in \overline{1, N}$ . Проницаемость каждой перегородки будем считать заданной константой,  $q_{k,k+1} = \text{const}, k \in \overline{1, (N-1)}$ .

Опуская промежуточные выкладки, приведем решение спектральной задачи (9)–(12) для цилиндрических сосудов с прямоугольным и круговым поперечными сечениями. В рассматриваемых случаях собственные частоты колебаний и отвечающие им моды потенциала скоростей можно представить в виде:

$$\phi_s^{(k)}(\vec{x}) = \frac{a u_s(x_1, x_2)}{\text{sh } \alpha_s h_k} \left( \prod_{j=k}^N \gamma_{js} \right) \times [\text{ch } \alpha_s (x_3 - H_{k-1}) - \gamma_{k-1,s} \text{ch } \alpha_s (H_k - x_3)],$$

$$\omega_s = \left( \frac{g \alpha_s \text{sh } \alpha_s h_N}{\text{ch } \alpha_s h_N - \gamma_{N-1,s}} \right)^{1/2},$$

$$\vec{x} := (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_k, k \in \overline{1, N}, s = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

Здесь  $a$  – произвольный амплитудный множитель; выражения для функций  $u_s(x_1, x_2)$  и величин  $\alpha_s, \gamma_{ks}$  приведены ниже.

Для прямоугольного бака с горизонтальными размерами  $L_1, L_2$  вдоль осей  $Ox_1, Ox_2$  соответственно, функции  $u_s(x_1, x_2)$  и величины  $\alpha_s$  имеют

вид

$$u_s(x_1, x_2) = \cos \frac{\pi m_s x_1}{L_1} \cos \frac{\pi n_s x_2}{L_2},$$

$$0 < x_j < L_j, \quad j = 1, 2,$$

$$\mathfrak{x}_s = \pi \left[ \left( \frac{m_s}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{n_s}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$m_s, n_s = 0, 1, \dots, \quad m_s + n_s \neq 0, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

где целочисленные параметры  $m_s, n_s$  выбираются так, чтобы волновые числа  $\mathfrak{x}_s$  образовывали строго возрастающую последовательность:  $\mathfrak{x}_1 < \mathfrak{x}_2 < \mathfrak{x}_3 \dots$ . Можно показать, что в этом случае собственные частоты  $\omega_s$  также будут располагаться в возрастающем порядке:  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$ . Принимая строгие неравенства при упорядочивании  $\omega_s$ , необходимо иметь в виду, что в рассматриваемых примерах каждой собственной частоте  $\omega_s$  могут соответствовать несколько различных мод колебаний свободной поверхности жидкости.

Коэффициенты  $\gamma_{ks}$  в (25) определяются рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} \gamma_{0s} &= 0, \quad \gamma_{ks} = q_{k,k+1} \operatorname{sh} \mathfrak{x}_s h_k : \\ &: \{q_{k,k+1} [\operatorname{sh} \mathfrak{x}_s (h_k + h_{k+1}) - \gamma_{k-1,s} \operatorname{sh} \mathfrak{x}_s h_k] + \\ &+ \mathfrak{x}_s \operatorname{sh} \mathfrak{x}_s h_k \operatorname{sh} \mathfrak{x}_s h_{k+1}\} \quad \forall k \in \overline{1, (N-1)}, \quad \gamma_{Ns} = 1, \\ &s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) при заданных значениях проницаемостей перегородок и геометрических параметров сосуда последовательно находятся все  $\gamma_{ks}$  от  $\gamma_{1s}$  до  $\gamma_{N-1,s}$ , что вместе с заданными значениями  $\gamma_{0s}$  и  $\gamma_{Ns}$  позволяет полностью определить частоты и моды собственных колебаний жидкости в случае прямоугольного сосуда.

Для кругового цилиндра радиуса  $R$  равенства (25), (27) остаются справедливыми, а вместо (26) необходимо принять следующие выражения (в полярных координатах  $r, \vartheta$ ):

$$u_s(r, \vartheta) = J_{m_s}(\mathfrak{x}_s r) \begin{cases} \cos m_s \vartheta \\ \sin m_s \vartheta, \end{cases} \quad \mathfrak{x}_s = \kappa_{m_s n_s} / R, \quad (28)$$

$$m_s = 0, 1, \dots, \quad n_s = 1, 2, \dots,$$

где  $J_m(\cdot)$  – функция Бесселя 1-го рода  $m$ -го порядка,  $\kappa_{mn}$  –  $n$ -й положительный корень уравнения:

$$J'_m(\kappa_{mn}) = 0 \quad \left( J'_m(r) := \frac{dJ_m(r)}{dr} \right). \quad (29)$$

Индексы  $m_s, n_s$  в (28), как и в рассмотренном выше случае прямоугольного бака, выбираются так, чтобы  $\mathfrak{x}_s$  и, следовательно, собственные частоты  $\omega_s$  с увеличением  $s$  располагались в возрастающем порядке.

Введем безразмерные собственные частоты колебаний жидкости

$$\bar{\omega}_s := (L/g)^{1/2} \omega_s, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (30)$$

где  $L$  – характерный линейный размер сосуда. В дальнейшем полагаем  $L = S^{1/2}$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения сосуда. Такой выбор характерного линейного размера удобен при сопоставлении собственных частот колебаний жидкости в сосудах с одинаковой площадью поперечного сечения. Собственные частоты  $\bar{\omega}_s$  являются, очевидно, функциями безразмерных параметров  $k_L := L_2/L_1$ ,  $\bar{q}_{k,k+1} = q_{k,k+1}L$ ,  $\bar{h}_k = h_k/L$ , так что

$$\bar{\omega}_s = \bar{\omega}_s(\bar{q}_{1,2}, \dots, \bar{q}_{N-1,N}, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_N, k_L)$$

(для кругового цилиндра параметр  $k_L$  необходимо отбросить).

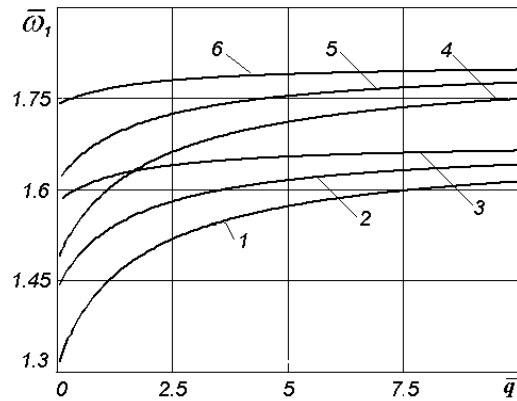


Рис. 2. Зависимость первой собственной частоты  $\omega_1$  от коэффициента проницаемости перегородок  $\bar{q}$  для прямоугольного бака (кривые 1, 2, 3) и кругового цилиндра (кривые 4, 5, 6) при  $\bar{H} = 0.6$ ,  $k_L = 0.7$ : 1, 4 –  $\bar{h} = 0.15$ ; 2, 5 –  $\bar{h} = 0.2$ ; 3, 6 –  $\bar{h} = 0.3$

Для практических приложений наибольший интерес представляют низкие собственные частоты, прежде всего, первая (минимальная) частота колебаний жидкости. На рис. 2 показаны результаты расчетов  $\bar{\omega}_1$  для прямоугольного бака (кривые 1, 2, 3) и кругового цилиндра (кривые 4, 5, 6) в зависимости от коэффициента проницаемости  $\bar{q} = \text{const}$ , одинакового для всех перегородок. Кривые 1, 2, 3, как и 4, 5, 6, отвечают соответственно трем ( $N = 4$ ), двум ( $N = 3$ ) и одной ( $N = 2$ ) перегородкам. Предполагается, что перегородки рас-

предельны равномерно по высоте  $\bar{H} := H/L$  слоя жидкости с шагом  $\bar{h} := \bar{H}/N$ .

Как видно из приведенных графиков, влияние горизонтальных перегородок проявляется тем сильнее, чем меньше их проницаемость. Увеличение количества перегородок приводит к понижению первой собственной частоты колебаний жидкости. При  $\bar{q} \rightarrow \infty$  величина  $\bar{\omega}_1$ , монотонно возрастаая, стремится к значению  $\bar{\omega}_1^0$ , отвечающему первой собственной частоте колебаний жидкости в сосуде без перегородок. Можно показать, что эти выводы остаются справедливыми для всех собственных частот колебаний.

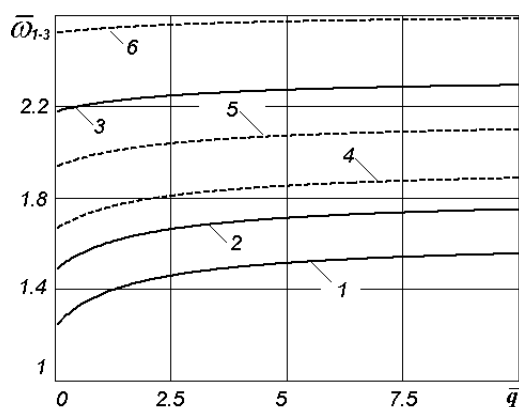


Рис. 3. Зависимости  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$  от коэффициента проницаемости перегородок  $\bar{q}$  для прямоугольного бака (кривые 1-3) и кругового цилиндра (кривые 4-6), секционированных тремя перегородками, при  $\bar{H} = 1, k_L = 0.7, \bar{h} = 0.25$

На рис. 3 показаны зависимости первых трех собственных частот  $\bar{\omega}_{1-3} (= \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)$  от проницаемости перегородок  $\bar{q}$  для прямоугольного бака (сплошные кривые) и кругового цилиндра (пунктирные кривые). Баки секционированы тремя перегородками, равномерно распределенными по высоте  $\bar{H} = 1$  с шагом  $\bar{h} = 0.25$ .

Влияние перегородок наиболее существенно для первой собственной частоты  $\bar{\omega}_1$  и заметно ослабевает для  $\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$  и более высоких частот. Первая собственная частота  $\bar{\omega}_1$  в прямоугольном баке существенно зависит от соотношения горизонтальных размеров  $k_L = L_2/L_1$  и достигает максимального значения при  $k_L = 1$ . Для кругового цилиндра  $\bar{\omega}_1$  больше, чем для прямоугольного бака с произвольным соотношением горизонтальных размеров  $k_L$ . Более того, можно показать, что первая собственная частота  $\bar{\omega}_1$  колебаний жидкости в круговом цилиндре имеет максимальное значение по сравнению с любым другим цилиндрическим сосудом с заданной площадью поперечного сече-

ния (все остальные параметры сравниваемых сосудов предполагаются при этом совпадающими).

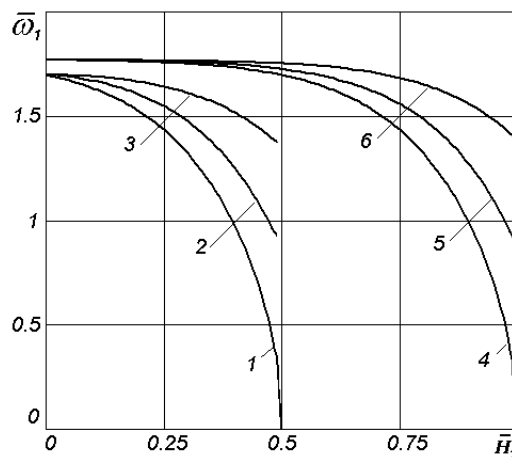


Рис. 4. Зависимость первой собственной частоты  $\omega_1$  от уровня перегородки  $\bar{H}_1$  для прямоугольного бака при  $k_L = 1, \bar{H} = 0, 5$  (кривые 1-3) и  $\bar{H} = 1$  (кривые 4-6): 1, 4 –  $\bar{q} = 0.1$ ; 2, 5 –  $\bar{q} = 3$ ; 3, 6 –  $\bar{q} = 10$ .

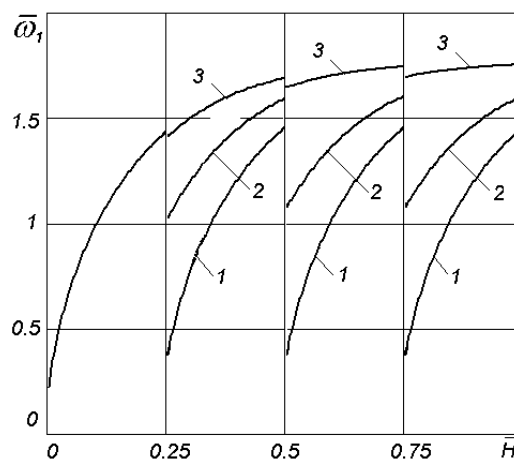


Рис. 5. Зависимость первой собственной частоты  $\omega_1$  от уровня жидкости  $\bar{H}$  для кругового цилиндра при  $\bar{h} = 0.25$ : 1 –  $\bar{q} = 0.1$ ; 2 –  $\bar{q} = 3$ ; 3 –  $\bar{q} = 50$

Предположим, что в сосуде установлена одна горизонтальная перегородка на расстоянии  $\bar{H}_1$  от дна. На рис. 4 представлены результаты расчетов зависимости  $\bar{\omega}_1$  от  $\bar{H}_1$  в прямоугольном баке для двух уровней жидкости  $\bar{H} = 0.5$  и  $\bar{H} = 1$  при  $k_L = 1$  и различных значениях проницаемости перегородки  $\bar{q}$ . Влияние перегородки тем значительнее, чем ближе она расположена к свободной поверхности жидкости. С приближением перегородки к свободной поверхности частота колебаний  $\bar{\omega}_1$  понижается.

Предположим теперь, что перегородки установлены на фиксированных уровнях  $\bar{H}_k = k\bar{h}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , а переменной величиной является уровень жидкости  $\bar{H}$ . Зависимость  $\bar{\omega}_1$  от  $\bar{H}$  в случае кругового цилиндра показана на рис. 5 при  $\bar{h} = 0.25$  для различных значений проницаемости перегородок  $\bar{q}$ . Разрывы на приведенных графиках соответствуют значениям  $\bar{H} = \bar{H}_k$ .

Приведенные результаты позволяют судить о количественном влиянии горизонтальных перегородок на собственные частоты колебаний жидкости.

### 3.2. Прямоугольный бак с вертикальными и горизонтальными перегородками

Рассмотрим прямоугольный бак, секционированный горизонтальными и вертикальными перегородками. Будем считать, что область  $\Omega$ , занимаемая жидкостью, делится перегородками на  $N = N_1 N_2 N_3$  подобластей (секций):

$$\begin{aligned} \Omega_{ijk} = \{ & (x_1, x_2, x_3) : (i-1)l_1 < x_1 < il_1, \\ & (j-1)l_2 < x_2 < jl_2, H_{k-1} < x_3 < H_k \}, \\ & i \in \overline{1, N_1}, j \in \overline{1, N_2}, k \in \overline{1, N_3}. \end{aligned} \quad (31)$$

$$l_1 := L_1/N_1, l_2 := L_2/N_2.$$

Вертикальные перегородки делят при этом свободную поверхность жидкости на прямоугольные ячейки одинаковых размеров  $l_1 \times l_2$  ( $N_1 \cdot N_2$  – количество ячеек):

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} = \{ & (x_1, x_2, x_3) : (i-1)l_1 < x_1 < il_1, \\ & (j-1)l_2 < x_2 < jl_2, x_3 = H \}, \\ & i \in \overline{1, N_1}, j \in \overline{1, N_2}. \end{aligned} \quad (32)$$

В (31), (32) для удобства нумерации принята тройная индексация секций и двойная индексация ячеек.

Проницаемости всех вертикальных перегородок, параллельных боковым стенкам бака  $x_1 = 0, L_1$  или  $x_2 = 0, L_2$ , будем считать для простоты заданными константами  $q_1, q_2$  соответственно. Для горизонтальных перегородок сохраним предположения и обозначения, введенные выше.

В рассматриваемом случае потенциал скоростей  $\phi_s(\vec{x})$  и собственные частоты  $\omega_s$ , как и в предыдущем примере, определяются соотношениями (25), (27) с очевидными поправками, связанными с несколько изменившейся нумерацией секций. Моды колебаний свободной поверхности жидкости и вол-

новые числа  $\alpha_s$  имеют вид:

$$\begin{aligned} u_s^{(ij)}(x_1, x_2) = & [a_{1i} \cos \alpha_{1s}(x_1 - (i-1)l_1) - \\ & - a_{1,i-1} \cos \alpha_{1s}(il_1 - x_1)] \times \\ & \times [a_{2j} \cos \alpha_{2s}(x_2 - (j-1)l_2) - \\ & - a_{2,j-1} \cos \alpha_{2s}(jl_2 - x_2)], \\ & \alpha_s = (\alpha_{1s}^2 + \alpha_{2s}^2)^{1/2}, \\ & i \in \overline{1, N_1}, j \in \overline{1, N_2}, s = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Коэффициенты  $a_{1i}$ ,  $a_{2j}$  и величины  $\alpha_{1s}$ ,  $\alpha_{2s}$  будут определены ниже.

Функции  $\phi_s(\vec{x})$  удовлетворяют уравнениям (9), условиям (11), (12) на горизонтальных перегородках и днище бака, а также первому из условий (11) на вертикальных перегородках. Удовлетворяя второму из условий (11) на вертикальных перегородках и условию (12) на боковых стенках бака, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_{1i}$ ,  $i = \overline{1, N_1}$  и в точности аналогичную систему уравнений относительно коэффициентов  $a_{2j}$ ,  $j = \overline{1, N_2}$ . Условия существования нетривиальных решений этих систем приводят к отысканию корней уравнений (относительно  $\alpha$ )

$$\begin{aligned} (2 \cos \alpha l_\alpha - \frac{\alpha}{q_\alpha} \sin \alpha l_\alpha - \xi_\alpha) \sin \alpha l_\alpha = 0, \\ \alpha = 1, 2, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\xi_\alpha$ , в свою очередь, являются корнями уравнений

$$\sum_{k=0}^{[(N_\alpha-1)/2]} (-1)^k C_{N_\alpha-1-k}^k \xi_\alpha^{N_\alpha-1-2k} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (35)$$

Квадратные скобки в уравнении (35) означают целую часть заключенного в них числа, а  $C_n^k := n!/(k!(n-k)!)$  – биномиальные коэффициенты.

Каждое из уравнений (35) имеет  $(N_\alpha - 1)$  вещественных корней, расположенных на числовой оси симметрично относительно нуля; если  $N_\alpha$  – четное число, то один из корней равняется нулю. Обозначим эти корни через  $\xi_{\alpha\sigma}$ ,  $\sigma \in \overline{1, (N_\alpha - 1)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Уравнение (34) распадается, очевидно, на  $N_\alpha$  независимых уравнений

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha l_\alpha - \frac{\alpha}{q_\alpha} \sin \alpha l_\alpha - \xi_{\alpha\sigma} = 0, \sin \alpha l_\alpha = 0, \\ \sigma \in \overline{1, (N_\alpha - 1)}, \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (36)$$

Каждое из уравнений (36) имеет счетное множество вещественных неотрицательных корней



$\{\mathfrak{a}_{\alpha\sigma m}\}_{m=1}^{\infty}$ ,  $\sigma \in \overline{1, N_{\alpha}}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , причем  $\mathfrak{a}_{\alpha\sigma m}$  при  $\sigma = N_{\alpha}$  означают корни последнего из уравнений (36), легко определяемые в явном виде:

$$\mathfrak{a}_{\alpha N_{\alpha} m} := \pi(m-1)/l_{\alpha}, \quad m = 1, 2, \dots, \alpha = 1, 2.$$

Определим теперь окончательно величины  $\mathfrak{a}_{1s}, \mathfrak{a}_{2s}, \mathfrak{a}_s$ , полагая

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{1s} &:= \mathfrak{a}_{1\sigma_s m_s} \geq 0, & \mathfrak{a}_{2s} &:= \mathfrak{a}_{2\tau_s n_s} \geq 0; \\ \mathfrak{a}_s &:= (\mathfrak{a}_{1s}^2 + \mathfrak{a}_{2s}^2)^{1/2} > 0, & s &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (37)$$

где индексы  $\sigma_s, m_s$ , и  $\tau_s, n_s$  выбраны так, чтобы волновые числа  $\mathfrak{a}_s$  и вместе с ними собственные частоты  $\omega_s$  образовывали возрастающие последовательности.

Коэффициенты  $a_{\alpha k}$  в (33) связаны рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} a_{\alpha 0} &= 0, \quad a_{\alpha 1} = 1, \quad a_{\alpha, k+1} = \xi_{\alpha} a_{\alpha k} - a_{\alpha, k-1}, \\ k &\in \overline{1, (N_{\alpha} - 1)}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (38)$$

Подставляя сюда  $\xi_1 = \xi_{1\sigma_s}, \xi_2 = \xi_{2\tau_s}$ , легко определим коэффициенты  $a_{\alpha k}$  и, тем самым, собственные функции  $u_s(x_1, x_2)$ , отвечающие собственной частоте  $\omega_s$ .

Отметим, что одной и той же частоте  $\omega_s$  могут отвечать несколько различных наборов индексов  $\sigma_s, m_s, \tau_s, n_s$  и, следовательно, несколько различных мод колебаний жидкости  $u_s(x_1, x_2)$ .

Рассмотрим более подробно некоторые частные случаи. Предположим, что вертикальные перегородки установлены в плоскостях симметрии бака  $x_1 = L_1/2$  и  $x_2 = L_2/2$ , так что свободная поверхность жидкости делится ими на 4 ячейки. Будем считать также, что в плоскости  $x_3 = H_1$  расположена горизонтальная перегородка с проницаемостью  $q_3 = \text{const}$ . В рассматриваемом случае  $N_1 = N_2 = N_3 = 2$ , так что полость бака разделена перегородками на 8 отсеков.

Результаты расчетов первых трех собственных частот колебаний жидкости  $\bar{\omega}_{1-3}$  в зависимости от проницаемости вертикальных перегородок  $q_1$  (при фиксированных значениях остальных параметров) показаны на рис. 6. Графики зависимостей  $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1(q_1)$  (сплошная линия 1) и  $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_2(q_1)$  (штриховая линия 2) состоят из двух различных участков, каждый из которых отвечает определенной моде колебаний свободной поверхности жидкости. Горизонтальным участкам отвечают одномерные моды колебаний жидкости  $u_s^{(ij)}(x_2)$ ,  $s = 1, 2$ , определяемые соотношением (33), где необходимо положить  $\mathfrak{a}_{1s} = 0$ . Криволинейным участкам рассматриваемых графиков отвечают моды колебаний

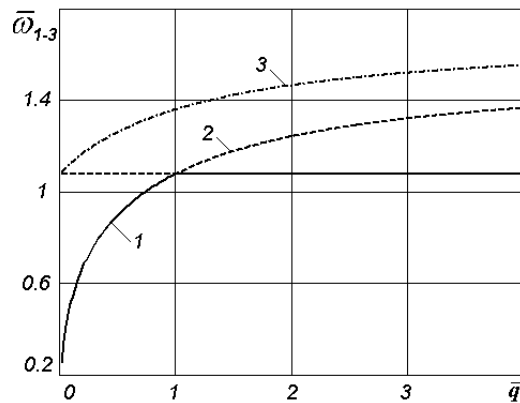


Рис. 6. Зависимости первых трех собственных частот  $\bar{\omega}_{1-3}$  от проницаемости вертикальных перегородок  $\bar{q}_1$  при  $\bar{q}_2 = \bar{q}_3 = 0.3$ ,  $k_L = 0.7$ ,  $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 0.5$ :

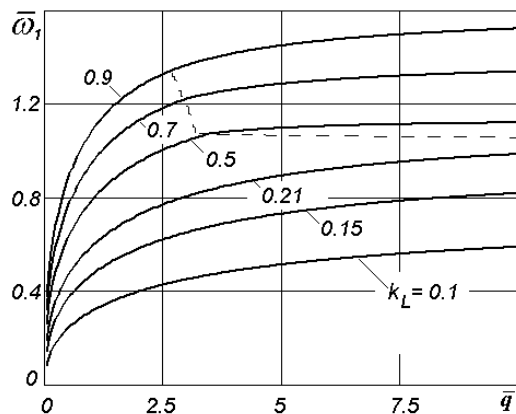


Рис. 7. Зависимость первой собственной частоты  $\bar{\omega}_1$  от  $\bar{q}$  при  $\bar{q}_3 = 0.3$ ,  $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 0.5$ ,  $N_1 = 3$ ,  $N_2 = N_3 = 2$

вида  $u_s^{(ij)}(x_1)$ ,  $s = 1, 2$ , зависящие от пространственной переменной  $x_1$ ; в этом случае в (33) необходимо принять  $\mathfrak{a}_{2s} = 0$ . Таким образом, изменение проницаемости перегородок может приводить к смене мод колебаний жидкости, отвечающих одному и тому же порядковому номеру собственной частоты.

Предположим теперь, что  $N_1 = 3$ ,  $N_2 = N_3 = 2$ . В этом случае вертикальные перегородки делят свободную поверхность жидкости на 6 ячеек, а вместе с горизонтальными перегородками всю полость бака – на 12 отсеков. Будем считать, что проницаемости всех вертикальных перегородок одинаковы,  $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \bar{q} = \text{const}$ . Результаты расчетов первой собственной частоты  $\bar{\omega}_1$  от  $\bar{q}$  для различных значений параметра  $k_L$  показаны на рис. 7.

Штриховая линия на этом рисунке проходит через точки излома соответствующих кривых.

Участки кривых, расположенных ниже штриховой линии, отвечают одномерным модам колебаний  $u_1^{(ij)}(x_1)$ , зависящим от координаты  $x_1$ ; для участков кривых, расположенных выше штриховой линии, моды колебаний  $u_1^{(ij)}(x_2)$  зависят только от координаты  $x_2$ . Нетрудно показать, что  $\bar{\omega}_1 \rightarrow 0$  при  $\bar{q} \rightarrow 0$ . В другом предельном случае бесконечно большой проницаемости перегородок первая собственная частота колебаний стремится к значению  $\bar{\omega}_1^0$ , отвечающему случаю бака без вертикальных перегородок,  $\bar{\omega}_1 \rightarrow \bar{\omega}_1^0$  при  $\bar{q} \rightarrow \infty$ .

### 3.3. Цилиндр кругового сечения с кольцевыми, радиальными и поперечными перегородками

Рассмотрим теперь собственные колебания жидкости в баке, полость которого ограничена непроницаемыми вертикальными коаксиальными цилиндрами и секционирована кольцевыми, радиальными и поперечными (горизонтальными) перегородками. Для отдельных секций, как и в предыдущем примере, примем трехиндексную нумерацию, полагая

$$\Omega_{ijk} = \{(r, \vartheta, x_3) : R_{i-1} < r < R_i,$$

$$\theta_{j-1} < \vartheta \leq \theta_j, H_{k-1} < x_3 \leq H_k\},$$

$$0 \leq R_0 < R_1 < \dots < R_{N_1} := R,$$

$$\theta_0 := 0, \quad \theta_j := 2\pi j/N_2,$$

$$i \in \overline{1, N_1}, j \in \overline{1, N_2}, k \in \overline{1, N_3}.$$

Здесь  $R_0, R$  – радиусы непроницаемых внутреннего и внешнего цилиндров,  $R_i, i \in \overline{1, (N_1 - 1)}$  – радиус  $i$ -ой перфорированной кольцевой перегородки,  $(N_1 - 1)$  – количество кольцевых перегородок. Предполагается, что радиальные перегородки расположены регулярным образом с угловым шагом  $\theta := 2\pi/N_2$ , где  $N_2$  – количество радиальных перегородок.

Отметим, что случай  $R_0 = 0$  отвечает полости бака, ограниченной только одной цилиндрической боковой поверхностью  $r = R$ .

В рассматриваемом случае кольцевые и радиальные перегородки делят свободную поверхность жидкости на отдельные ячейки ( $N_1 N_2$  – общее число ячеек):

$$\Gamma_{ij} = \{(r, \vartheta, x_3) : R_{i-1} < r < R_i,$$

$$\theta_{j-1} < \vartheta < \theta_j, x_3 = H\},$$

$$i \in \overline{1, N_1}, j \in \overline{1, N_2}.$$

Будем считать для простоты, что все кольцевые перегородки имеют одинаковую проницаемость  $q_1 = \text{const}$ , а проницаемость  $q_2$  всех радиальных перегородок определяется соотношением

$$q_2 = q_0/r, \quad q_0 = \text{const},$$

где  $q_0$  – заданная константа. Для горизонтальных перегородок сохраним прежние предположения.

Потенциал скоростей  $\phi_s^{(ijk)}$  и собственные частоты колебаний жидкости  $\omega_s$ , как и ранее, определяются соотношениями (25), (27), где для функций  $u_s^{(ij)}(r, \vartheta)$  необходимо принять следующие выражения:

$$u_s^{(ij)}(r, \vartheta) = [a_i J_{\nu_s}(\alpha_s r) + b_i Y_{\nu_s}(\alpha_s r)] \times \\ \times [c_j \cos \nu_s(\vartheta - \theta_{j-1}) - c_{j-1} \cos \nu_s(\theta_j - \vartheta)], \quad (39)$$

$$R_{i-1} < r < R_i, \quad \theta_{j-1} < \vartheta < \theta_j,$$

$$i \in \overline{1, N_1}, j \in \overline{1, N_2}, s = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь  $J_\nu(\cdot), Y_\nu(\cdot)$  – функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно;  $a_i, b_i, c_j$  – коэффициенты, подлежащие определению (в случае  $R_0 = 0$  следует принять  $b_1 = 0$ ). Порядки  $\nu_s$  функций Бесселя в (39) определяются как упорядоченные определенным образом корни уравнений (относительно  $\nu$ )

$$\cos \nu \theta - \frac{\nu}{2q_0} \sin \nu \theta = \cos m \theta, \quad m \in \overline{0, [N_2/2]}. \quad (40)$$

Коэффициенты  $c_j$  в (39) выбираются равными  $c'_{mj}$  или  $c''_{mj}$ ,

$$c'_{mj} = \cos \frac{2\pi m j}{N_2}, \quad m \in \overline{0, [N_2/2]}, \\ c''_{mj} = \sin \frac{2\pi m j}{N_2}, \quad m \in \overline{1, [(N_2 - 1)/2]}, \quad (41) \\ j \in \overline{0, N_2},$$

где индекс  $m$  определяется при упорядочивании  $\nu_s$ , уточняемом ниже.

Нетрудно проверить, что при таком выборе  $c_j$  решения вида (25), где  $u_s^{(ij)}(r, \vartheta)$  определены равенствами (39), удовлетворяют всем уравнениям и граничным условиям спектральной задачи (9)–(12), за исключением условий (11) на кольцевых перегородках и условия (12) на непроницаемых стенках сосуда  $r = R_0$  и  $r = R$ . Удовлетворяя этим условиям, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_i, b_i$ . Приравнявая нулю определитель этой системы, получим уравнения, определяющие волновые числа  $\alpha_s$ .

В случае одной кольцевой перегородки ( $N_1 = 2$ ) при  $R_0 > 0$  эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} q_1 [F_{\nu_s}(\bar{x}R_1, \bar{x}R_0) G_{\nu_s}(\bar{x}R_1, \bar{x}R_2) - \\ - [F_{\nu_s}(\bar{x}R_1, \bar{x}R_2) G_{\nu_s}(\bar{x}R_1, \bar{x}R_0)] + \\ + \bar{x}G_{\nu_s}(\bar{x}R_1, \bar{x}R_0) G_{\nu_s}(\bar{x}R_1, \bar{x}R_2) = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$s = 1, 2, 3, \dots$$

где

$$\begin{aligned} F_{\nu}(\xi, \eta) &:= J_{\nu}(\xi)Y'_{\nu}(\eta) - Y_{\nu}(\xi)J'_{\nu}(\eta), \\ G_{\nu}(\xi, \eta) &:= J'_{\nu}(\xi)Y'_{\nu}(\eta) - Y'_{\nu}(\xi)J'_{\nu}(\eta), \\ J'_{\nu}(\xi) &:= dJ_{\nu}(\xi)/d\xi, \quad Y'_{\nu}(\eta) := dY_{\nu}(\eta)/d\eta. \end{aligned}$$

При  $R_0 = 0$  вместо (42) необходимо принять уравнения

$$\begin{aligned} \pi \bar{x}^2 R_1 J'_{\nu_s}(\bar{x}R_1) [J'_{\nu_s}(\bar{x}R_1)Y'_{\nu_s}(\bar{x}R_2) - \\ - Y'_{\nu_s}(\bar{x}R_1)J'_{\nu_s}(\bar{x}R_2)] - 2q_1 J'_{\nu_s}(\bar{x}R_2) = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$s = 1, 2, 3, \dots$$

Предположим, что в сосуде установлены одна кольцевая перегородка и три радиальных перегородки, расположенных в плоскостях  $\vartheta = 2\pi j/3, j = \overline{1, 3}$ . Кроме того, будем считать, что в поперечном сечении сосуда  $x_3 = H_1$  установлена горизонтальная перегородка с заданной проницаемостью  $q_3 (= \text{const})$ . В рассматриваемом случае  $N_1 = 2, N_2 = 3, N_3 = 2$ , так что свободная поверхность жидкости разделена на 6 ячеек, а вся полость сосуда – на 12 отсеков. Определение собственных частот колебаний жидкости сводится к предварительному определению корней  $\nu_s$  уравнений (40), вычислению корней  $\bar{x}_s$  уравнений (42) при  $R_0 > 0$  или (43) при  $R_0 = 0$  с последующим упорядочиванием  $\bar{x}_s$  по возрастанию и вычислением  $\omega_s$  согласно (25), (27).

На рис. 8 показаны графики зависимости первой собственной частоты  $\bar{\omega}_1$  от соотношения радиусов  $R_0/R$ , ограничивающих полость бака, для различных значений проницаемости  $\bar{q}_1$  кольцевой перегородки. Безразмерные собственные частоты колебаний жидкости, как и ранее, определены соотношениями (30), где в качестве характерного линейного размера выбрана величина  $L = (\pi(R^2 - R_0^2))^{1/2}$ .

Зависимость первой собственной частоты  $\bar{\omega}_1$  от параметра  $q_0$ , определяющего проницаемость радиальных перегородок, при  $R_0 = 0$  показана на рис. 9. Характерной особенностью приведенных графиков являются их изломы, объясняемые, как

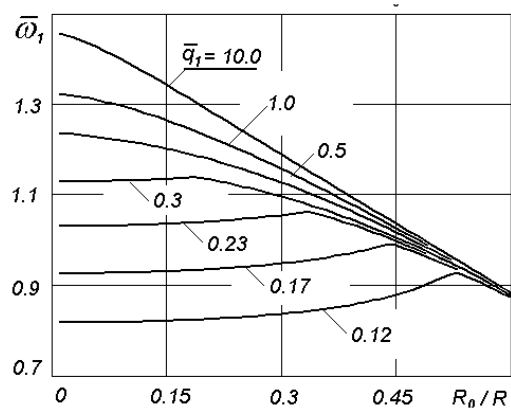


Рис. 8. Зависимость первой собственной частоты  $\bar{\omega}_1$  от соотношения радиусов  $R_0/R$  при  $\bar{q}_0 = 0.3, \bar{q}_3 = 0.3, R_1/R_2 = 0.7, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 0.5$

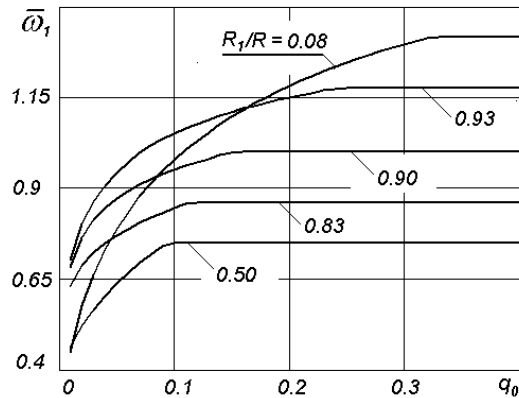


Рис. 9. Зависимость первой собственной частоты  $\bar{\omega}_1$  от параметра  $q_0$  при  $R_0 = 0, \bar{q}_1 = 0.1, \bar{q}_3 = 0.3, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 0.5$

и в предыдущих примерах, сменой мод колебаний свободной поверхности жидкости. С увеличением проницаемости радиальных перегородок моды колебаний общего вида  $u_1^{(ij)}(r, \vartheta)$  сменяются осесимметричными модами колебаний свободной поверхности  $u_1^{(ij)}(r)$ . Осесимметричным колебаниям отвечают горизонтальные участки приведенных графиков.

На рис. 10 показаны графики зависимости первой собственной частоты колебаний  $\bar{\omega}_1$  от соотношения  $R_1/R$  радиусов кольцевой перегородки и внешней стенки сосуда при  $R_0 = 0$ . В рассматриваемом случае с увеличением проницаемости  $q_1$  кольцевой перегородки собственная частота колебаний  $\bar{\omega}_1$  монотонно возрастает. Для достаточно больших значений  $q_1$  (при фиксированных значениях остальных параметров) первой собственной

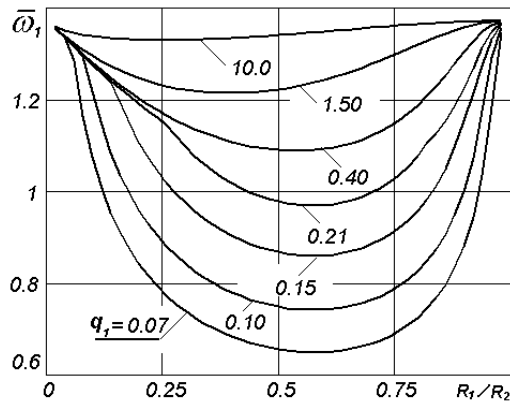


Рис. 10. Зависимость первой собственной частоты  $\bar{\omega}_1$  от соотношения радиусов  $R_1/R$  при  $R_0 = 0$ ,  $\bar{q}_0 = 0.3$ ,  $\bar{q}_3 = 0.3$ ,  $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 0.5$

частоте  $\bar{\omega}_1$  отвечают осесимметричные моды колебаний свободной поверхности жидкости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Переход к усредненным граничным условиям на перегородках существенно упрощает задачу о малых колебаниях жидкости в сосуде с перфорированными перегородками. На примере цилиндрических баков с прямоугольным и круговым поперечными сечениями показано, в частности, что перегородки могут приводить к значительному изменению собственных частот колебаний жидкости. Этот эффект представляет определенный практический интерес, так как во многих случаях по условиям эксплуатации резервуаров с жидким наполнением на собственные частоты колебаний накладываются достаточно жесткие ограничения. С помощью перегородок можно ослабить, например, резонансный отклик жидкости на внешние воздействия определенной частоты.

Полученные результаты могут быть использованы для экспериментальной проверки предлагаемой математической модели, уточнения эмпирических или полуэмпирических зависимостей, определяющих коэффициенты проницаемости перегородок. В связи с этим следует отметить, что теоретическое определение этих коэффициентов является сложной задачей, не имеющей удовлетворительного решения в наиболее интересных для практики случаях.

Вариационные формулировки спектральной задачи могут быть положены в основу эффективных

численных методов определения собственных частот и мод колебаний жидкости.

1. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 440 с.
2. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. – М.: Машиностроение, 1971. – 563 с.
3. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
4. Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. – Киев: Наукова думка, 1984. – 232 с.
5. Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – Киев: Наукова думка, 1990. – 296 с.
6. Лимарченко О. С., Ясинский В. В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ КПП, 1997. – 338 с.
7. Галицин Д. А., Троценко В. А. К расчету частот и присоединенных масс жидкости в прямоугольном контейнере с перегородками в поперечной плоскости его симметрии // Прикладна гідромеханіка. – 2000. – N 1. – С. 20–27.
8. Галицин Д. А., Троценко В. А. Колебания жидкости в подвижном прямоугольном контейнере с упругими перегородками // Прикладна гідромеханіка. – 2000. – N 4. – С. 11–23.
9. Троценко В. А. О влиянии кольцевых перегородок на эффективность гашения волновых движений жидкости в сосуде // Доповіді НАНУ. – 2005. – N 6. – С. 50–56.
10. Bisval K.C., Bhattacharyya S.K., Sinha P.K. Dynamic Characteristics of Liquid Filled Rectangular Tank with Baffles // J. Inst. Civil Engineering. – 2003. – V.84. – С. 145–148.
11. Chwang A.T. A porous-wavemaker theory // J. Fluid Mech. – 1983. – V.132. – С. 395–406.
12. Yip T.L., Sahoo T., Chwang A.T. Wave Oscillation in a Circular Harbor With Porous Wall // J. Appl. Mech. – 2001. – V.68(4). – С. 603–607.
13. Рахматулин Х.А., Гувернюк С.В. О постановке задач обтекания проницаемых тел несжимаемой средой // Парашюты и проницаемые тела. – М.: Изд-во МГУ. – 1987. – С. 5–24.
14. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наукова думка, 1974. – 280 с.
15. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Усредненные модели микронеоднородных сред. – Киев: Наукова думка, 2005. – 550 с.
16. Копачевский Н. Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
17. Борисов Д.И. Малые движения идеальной жидкости в сосуде с перфорированными перегородками // Вісник Харківського національного університету. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. – 2006. – № 749. – С. 85–96.