НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ГІДРОМЕХАНІКИ

На правах рукопису

ЩЕРБАК Тетяна Миколаївна

УДК 532.591

ТРАНСФОРМАЦІЯ ПОВЕРХНЕВИХ ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ НА ДОННИХ ПЕРЕШКОДАХ

01.02.05 –механіка рідини газу та плазми

Дисертація
на здобуття ученого ступеня
кандидата фізіко-математичних наук

Науковий керівник
НІКІШОВ Володимир Іванович
член-кореспондент НАН України
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми.

Інтенсивне освоєння шельфової зони морів і океанів обумовлює розробку і створення ефективних засобів захисту гідротехнічних конструкцій, які знаходяться у прибережній частині водойм, і берегів від руйнівної дії поверхневих хвиль. Встановлення штучних берегозахисних споруд є одним із дійових засобів захисту конструкцій та берегів. При взаємодії поверхневих хвиль із спорудами хвилі трансформуються, змінюється їх просторово-часові характеристики, вони укручуються, можуть руйнуватись. Підвищення ефективності берегозахисних споруд досягається, в тому числі, за рахунок ускладнення конструкції, використання проникних матеріалів і т.і.

Розробка споруд із поліпшеними характеристиками є однією із важливих задач у проблемі, що розглядається. Цій задачі присвячено багато теоретичних та експериментальних досліджень процесів взаємодії хвиль із берегозахисними спорудами. Свідченням інтересу до цієї проблеми можуть служити чисельні публікації результатів досліджень. Незважаючи на велику кількість робіт, присвячених цій темі, існує низка важливих питань, що потребують уваги і відповідного розгляду.

Теоретичне дослідження процесу взаємодії поверхневих хвиль із берегозахисною спорудою довільної форми вимагає застосування складної системи рівнянь гідромеханіки для врахування усіх факторів і чисельного моделювання. Через труднощі врахування всіх факторів, що впливають на процес взаємодії хвиль з перешкодами, стає доцільним використовувати наближені моделі, на основі яких можна отримувати цілком адекватні результати. В рамках таких моделей може здійснюватись як спрощення моделі середовища, так і самої конструкції. Це дозволяє використовувати чисельно-аналітичний підхід до розв’язання подібних завдань. Такий підхід, як свідчать сучасні публікації, є продуктивним з точки зору отримання результатів, оцінки ефективності берегозахисної споруди. Підтвердженням цьому є велика кількість публікацій, в яких розвиваються такі методи стосовно конкретної ситуації.

Інформація про просторово-часових характеристиках хвиль необхідна для правильної оцінки можливого розмиву берегової лінії, силового навантаження хвиль на гідротехнічні конструкції, що дозволяє дати прогноз стійкості споруд і їх надійного функціонування. Така інформація є дуже важливою при розробці і виконанню проектних робіт по створенню ефективних засобів для зменшення хвильового навантаження. Можна зробити висновок про те, що розвиток чисельно-аналітичних методів для розрахунку трансформації поверхневих хвиль на перешкодах, є актуальним.

В даний час розроблено чисельно-аналітичні методи, що призначені для розрахунку характеристик процесу розсіювання поверхневих хвиль штучними спорудами і визначенню просторово-часових характеристик хвильового поля. Математично відповідна гранична задача досить складна, оскільки у точці зміни граничних умов (в околі кутових точок) можуть існувати особливості по швидкості, що обумовлюють необмежене зростання швидкості при наближенні до особливої точки. Це призводить до значних складнощів при виконанні чисельних розрахунків. У зв'язку з цим докладне вивчення гідромеханічних характеристик повинно ґрунтуватись на використанні методу, що адекватно описує наявність вказаних особливостей.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Проведені в дисертаційній роботі дослідження виконувалися згідно з бюджетною темою “Закономірності генерації гідродинамічних полів, викликаних дією вітру та рухомими суднами, і їх взаємодії з береговими спорудами та берегами ”, шифр теми 1.10.1.6.Р16, номер державної реєстрації 0112U000293.

Мета досліджень.

Метою даної роботи є дослідження трансформації поверхневих гравітаційних хвиль на перешкодах, які, як правило, є складовою частиною складних хвилезахисних споруд, в тому числі на уступі, на підводному барі, та тонкому бар'єрі, установка яких на дно призводять до різкої зміни глибини рідини. Довільний профіль донної поверхні може бути представлений в ступінчастому вигляді, і особливості розповсюдження поверхневих хвиль над таким профілем може бути досліджено шляхом розв'язання задачі про трансформацію хвиль заданою сукупністю ступінчастих структур.

Для досягнення цієї мети розглядаються наступні завдання:

- Розвиток чисельно-аналітичного методу до розв'язання задач розсіювання хвиль на перешкодах, що дозволяє на основі декомпозиції області та використання методу нормальних мод звести граничні задачі до розв'язку нескінченної системи алгебраїчних рівнянь;
- Розвиток методу покращеною редукції стосовно зазначеної системи рівнянь шляхом знаходження асимптотичної поведінки невідомих коефіцієнтів розкладання;
- Аналіз результатів розрахунку характеристик поверхневих хвиль при їх поширенні над підводними перешкодами різної форми (уступ, перешкода кінцевої довжини, бар'єр);
- Визначення просторово-часових характеристики нерегулярного хвилювання при трансформації поверхневих гравітаційних хвиль на берегозахисних спорудах.

Об'єктом дослідження є процес поширення і трансформації поверхневих хвиль при взаємодії із хвилезахисними спорудами у вигляді уступу, бару, бар'єру.

Предметом дослідження є аналіз впливу параметрів підводних перешкод різної форми на просторово-часові характеристики полів поверхневих хвиль.

Методи дослідження. В роботі використовувались чисельно-аналітичні методи розв'язку граничних задач. Розрахунки хвильових полів грунтувались на методі декомпозиції водойми на окремі під області і здійснювались на основі подання розв'язків в окремих підобластях у вигляді рядів за власними функціями, а потім виконання умов спряження розв'язків. Коефіцієнти розкладів знаходились шляхом чисельного розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Враховуючи наявність особливостей по швидкості в околі точок зі зміною граничних умов, визначено асимптотичні властивості невідомих коефіцієнтів розкладів на основі апріорних знань про характер цих особливостей. Це дозволило отримати фізично обґрунтовані розв'язки, які відображають особливості хвильових процесів, а також провести коректну редукцію нескінченої системи рівнянь, і тим самим розробити ефективний алгоритм для кількісної оцінки характеристик хвильового поля в довільних точках області.

Наукова новизна отриманих результатів.

В роботі отримано розв'язки класу задач про трансформацію поверхневих лінійних хвиль, що мають дисперсійні властивості, на підводних перешкодах різної форми (уступ, бар, бар'єр). На основі застосування декомпозиції каналу на підобласті задачі, зведено до виконання відповідних умов спряження розв'язків, що отримано для кожної області методом нормальних мод. Використано метод поліпшеної редукції для визначення невідомих коефіцієнтів розкладання розв'язків в ряди за власними функціями, що враховує асимптотичні властивості цих невідомих.

На основі розвиненого чисельно-аналітичного метод для розв'язання задач розсіювання хвиль на перешкодах отримано нові результати:

- знайдено коефіцієнти відбиття та проходження поверхневих хвиль при їх набіганні на перешкоди різної форми. Наведено оцінки точності виконання граничних умов і умов спряження;

- виявлено, що зміна висоти симетричної перешкоди призводить до зсуву значень хвильових чисел, при яких спостерігається нульове відбиття хвилі. Це пов'язано зі зміною фазових характеристик хвилі, яка поширюється над перешкодою в прямому і зворотному напрямках, і відповідною зміною умов інтерференції з відбитою від перешкоди хвилі;

- проведено аналіз впливу асиметрії форми і параметрів перешкоди кінцевої довжини на ці коефіцієнти відбиття та проходження. Показано, що при відсутності симетрії характер поведінки коефіцієнта відбиття залишається осцилюючим, однак його значення в точках локального мінімуму відрізняються від нуля на відміну від симетричного випадку, коли коефіцієнти відбиття стають рівними нулю (“Брегівське” розсіювання). Ця відмінність стає істотною зі зростанням висоти перешкоди і зростанням глибини рідини за перешкодою;

- для симетричної перешкоди в рамках плоско-хвильового наближення ("plane-wave approximation") знайдено аналітичні залежності для коефіцієнтів відбиття і проходження. Знайдено умови, коли коефіцієнт відбиття дорівнює нулю;

- показано, що відбувається суттєва перебудова спектрів поверхневого хвилювання, коли хвилі поширюються над уступом. Виявлено, що змінюються максимальні значення у відповідності до коефіцієнту проходження, тобто амплітуди хвиль зростають. Крім того, довжина хвиль зменшується і хвилі стають більш крутими. Ці ефекти підсилюються зі зменшенням глибини водойми за перешкодою.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень, висновків і рекомендацій.

Достовірність отриманих в роботі результатів забезпечується:

- коректною постановкою граничних задач;

- використанням апробованого методу нормальних мод для побудови розв’язків в окремих областях;

- використанням апробованого методу покращеною редукції для розв’язання системи алгебраїчних рівнянь;

- відповідністю отриманих результатів даним, що отримано іншими авторами.

Практичне значення отриманих результатів. Практична значимість розглянутих вище проблем розсіювання поверхневих хвиль на різних перешкодах, які часто є складовою великих берегозахисних споруд, полягає в отриманні конкретної інформації про характеристики хвиль, зокрема, про коефіцієнти відбиття і проходження, які поширюються над підводними перешкодами. Розроблений метод розрахунку може бути використаний для розрахунку хвильових полів і для більш складних конфігурацій хвилеломів.

Результати роботи можуть бути використані для розрахунків просторово-часових характеристик поверхневих хвиль при їх поширенні над довільним профілем донної поверхні, який може бути представлений як сукупність ступінчатих структур.

Частина результатів дисертаційної роботи увійшла як складова частина у вигляді розділу проміжного звіту зазначеної вище бюджетної теми.

Публікації та особистий внесок здобувача. Основні результати досліджень, представлені у дисертації, опубліковані в 8 роботах. Із них п'ять робіт [2-6] у фахових виданнях, згідно з переліком ДАК України, одна [7] у журналі, який входить в науко-метричні бази даних EBSCO International Services, Index Copernicus International, SSM, і 2 тези доповідей на наукових конференціях [8,9]. Одна стаття [5] індексується у науко-метричній базі Zentralblatt Math. В опублікованих у співавторстві роботах особистий внесок здобувача включає:

- зведення граничних задач до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь;

- використання методу покращеною редукції для вирішення системи рівнянь;

- розробку алгоритмів програм і їх чисельну реалізацію:

- участь в проведення розрахунків і аналізі хвильових полів.

Апробація результатів дисертації.

Окремі результати дисертаційної роботи доповідалися на

- Консонанс-2015, Акустичний симпозіум, Київ, 2015, Інститут гідромеханіки НАН України;

- 5 міжнародній науково-практичній конференції “Комп'ютерна гідромеханика”, ІГМ НАНУ, Київ, 2016, Інститут гідромеханіки НАН України;

Дисертаційна робота доповідалась на Республіканському семінарі з механіки рідини і газу під керівництвом академіка НАН України В.Т. Грінченка, обговорювалася на семінарах відділу технічної гідромеханіки Інституту гідромеханіки НАН України.

Структура дисертації. Дисертація складається з вступу, п'яти розділів. Вона містить 132 сторінок машинописного тексту, висновків і списку використаної літератури, 36 ілюстрацій, 1 таблиця. Бібліографія містить 98 джерел.

РОЗДІЛ 1
СТАН ПРОБЛЕМИ ТРАНСФОРМАЦІЇ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ НА ПІДВОДНИХ ПЕРЕШКОДАХ

1.1. Огляд літератури.

Проблема розповсюдження поверхневих гравітаційних хвиль в водоймах кінцевої глибини при наявності різного роду топографічних неоднорідностей донної поверхні або занурених у рідину (в тому числі частково) штучних конструкцій, призначених для захисту берегової зони від руйнування, залишається актуальною і в теперішній час, про що свідчать численні публікації результатів досліджень. Серед робіт присвячених даній тематиці можна виділити клас задач, в яких розглядаються хвильові рухи в займаній рідиною області, схематично розділеної на окремі області, які мають вертикальні границі, а глибина, в кожній із них, є постійною. До них відносяться задачі поширення і розсіювання поверхневих хвиль на прямокутній перешкоді, тобто при різкій зміні глибини басейну, на плаваючій перешкоді, на западині донної поверхні та інші. Більш того, довільний профіль донної поверхні може бути представлений в ступінчастому вигляді, і особливості розповсюдження поверхневих хвиль над таким профілем може бути досліджено шляхом розв’язання задачі про трансформацію хвиль заданою сукупністю ступінчастих структур.

Одним із ефективних підходів до задач розсіюванні поверхневих хвиль на перешкодах, тобто при наявності різкої зміни глибини басейну, являється представлення розв’язку для потенціалу швидкості в кожній із областей у вигляді розкладу по системі власних функцій, характерних для конкретної області, а потім задоволення умовам спряження цих розв’язків на вертикальних границях. В результаті, задача зводиться до нескінченної системи лінійних інтегральних рівнянь. Потім, використовуючи умову ортогональності власних функцій, після застосування операції редукції, отримуємо скінченновимірну систему алгебраїчних рівнянь, яка обраховується за допомогою методу найменших квадратів [34], який є, по суті, інтегральним методом, або шляхом безпосереднього розв’язання вказаної системи рівнянь чисельним методом.

Добре відомий розв’язок задачі про трансформації довгих хвиль на підводному уступі [15]. Базуючись на рівнянні збереження маси і умові неперервності розподілу висоти підйому вільної поверхні, в цій роботі отриманні вирази для коефіцієнтів відбиття і проходження поверхневої хвилі. Відмітимо, що для отримання вказаного розв’язку докладної інформації про характер течії в околі граней уступу в наближенні довгих хвиль не потрібно. Більш точний підхід до вирішення цієї проблеми було здійснено в роботі [25], в якій задача була зведена до інтегрального рівняння відносно горизонтальної компоненти швидкості $U(z)$, однак, розв’язок рівняння було знайдено тільки у граничному випадку довгих хвиль. Наступний крок був зроблений в роботі [71], в якій розглянуто нормальне падіння поверхневої хвилі на зону різкої зміни донної поверхні (між областями з кінцевою і нескінченою глибинами). Автор отримав інтегральне рівняння, подібне рівнянню, розглянутому в роботі [25], і звів його до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь шляхом розкладання $U(z)$ в ряд по власних функціях, характерним для області кінцевої глибини, і використання властивості їх ортогональності. Отримана система рівнянь вирішувалася чисельно, причому враховувався внесок до 80 мод, що не поширюються. Було показано, що в довгохвильовому наближенні результати знаходяться у відповідності з результатами роботи [15]. Відзначимо, що в іншій роботі [72] автор застосував аналогічний підхід до розгляду поширення поверхневих хвиль над довгою симетричною перешкодою в рідині кінцевої глибини.

Поширення поверхневих хвиль над уступом в рідині кінцевої глибини вивчено в роботі [70] на основі побудови так званої "матриці розсіювання", яка пов'язує коефіцієнти, що характеризують внески мод, що поширюються, по обидві сторони стрибка глибини. Характерною особливістю даного підходу є використання асимптотичного наближення плоских хвиль ("plane-wave approximation"), при якому по обидві сторони від області різкої зміни глибини потоку розглядаються тільки моди, що поширюються, і впливом мод, що не поширюються, нехтується.

У роботі [35] розглядалася задача про поширення поверхневих хвиль в каналі, глибина в якому змінюється випадковим чином. Передбачалося, що неоднорідності донної поверхні мають ступінчасту форму, а випадковим є довжина кожної сходинки, тобто кожна неоднорідність має на кінцях вид уступу. Автори сформулювали постановку граничної задачі для потенціалу, проте конкретні розрахунки проводилися шляхом побудови "матриці розсіювання", тобто слідуючи роботі [70]. При цьому впливом виникаючих неоднорідних хвиль нехтувалось. Таке спрощення можливо, якщо впливом неоднорідних мод, що генеруються на межах кожної сходинки, можна знехтувати, коли вони досягають наступної або попередньої сходинки і стають малими. Підставою для використання зазначеного спрощення служило введене обмеження на довжину сходинки.

У роботі [69] розглядається розсіювання поверхневих хвиль на прямокутній перешкоді в рідині кінцевої глибини. Використано варіаційне формулювання задачі. Проводилось урахування внеску неоднорідних хвиль з метою перевірки збіжності розв’язку. Встановлено, що при збільшенні відношення глибини рідини над перешкодою до загальної глибині потоку потрібно збільшувати число неоднорідних хвиль, що враховуються, для досягнення необхідної точності. Продемонстровано осцилюючий характер поведінки коефіцієнта відбиття в залежності від хвильового числа, причому зі збільшенням довжини перешкоди число осциляцій збільшується. Цей висновок узгоджується з висновками роботи [72], в якій розглянуто поширення хвиль над довгою перешкодою в рідині кінцевої глибини. Фізичне пояснення виникнення осциляцій в поведінці коефіцієнта відбиття наведено в роботі [69], в якій продемонстровано, що коефіцієнт відбиття може досягати нульових значень (прозорий хвилевід). Така поведінка зазначеного коефіцієнта полягає у взаємодії хвиль, відбитих від різних кінців перешкоди.

Одними з перших робіт, в яких був застосований метод розкладання розв'язку по системі власних функцій с подальшим зведенням задачі до розв'язку нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, були роботи [89, 90]. У першій з них розглядалася задача про розсіювання поверхневих хвиль, що падають нормально на нерухому поверхневу перешкоду кінцевої довжини. У другій, в якості перешкоди розглядався поріг кінцевої довжини. Цей підхід був розвинений в роботі [50], в якій вивчалася дифракція хвиль на двовимірній підводній прямокутній западині для випадку похилого падіння. Особливу увагу було зосереджено при розгляді випадку великих кутів падіння. Показано, що для нормального падіння результати відповідають даним роботи [53].

Розвинений підхід для отримання точного розв'язку задачі був застосований в ряді робіт при вивченні розсіювання поверхневих хвиль на порозі (западині) довільної конфігурації. В цьому випадку поверхня порогу замінювалась низкою сходинок прямокутної форми, і в кожній області, що відповідає даній сходинці, будувалися розв'язки на основі описаного вище підходу [79]. Для розрахунків був використаний також метод, розвинений в роботі [35], коли впливом неоднорідних хвиль нехтується. У цьому методі розв'язання задачі, що ґрунтується на розбитті області, займаної перешкодою, на більш дрібні підобласті, є, однак, природне обмеження. Воно пов'язане з вимогою, щоб області, займані неоднорідними хвилями (модами, що не поширюються), які випромінюються коло сторін розривів, були малими в порівнянні з відстанями між сходинками. Розміри цих областей можна оцінити чисельно шляхом обчислення відносного вкладу неоднорідних хвиль, які емітуються від кожної з двох прилеглих сходинок [38].

Відмітимо, що в роботі [79] отримано також розв'язок задачі за допомогою підходу, на основі побудови «матриці розсіювання» Майлса.

Виявлено, що виникає помітна різниця в результатах, отриманих на основі повної моделі (з урахуванням мод, що не поширюються) і апроксимаційної моделі Майлса при зменшені довжини бару. Зокрема, розподіл амплітуди хвилі зазнає розрив у вертикальній площині, що відповідає межі бару. Це пов'язано з тим, що "матриці розсіювання" Майлса будується на основі використання наближення плоских хвиль ("plane-wave approximation"), які можуть описувати хвильове поле в дальній зоні, але не поблизу вертикальних площин бару, де проявляється сильний вплив мод, що не поширюються. Тут же проведене порівняння теоретичних і експериментальних результатів авторів. Показано, що має місце непогане їх узгодження. Аналізується вплив форми кута бару на характер хвиль. Показано, що при наявності гострої кромки має місце згортання вихрових збурень, викликаних кромкою, в результаті формуються вихори, які можуть проникати в потік. Згладжування кромки приводить до зникнення такого ефекту. Цікаво відзначити, що було зроблено спробу здійснити моделювання закруглення кромки низкою сходинок (до 10 сходинок), однак ніяких оцінок впливу мод, що не поширюються і емітуються з одного кінця сходинки на інший, не наведено.

У роботі [26] вивчено поширення поверхневих хвиль над підводною траншеєю. Розглянуто випадки симетричної і несиметричної форм з вказаними донними заглибленнями. Показано, що в симетричному випадку коефіцієнт відбиття носить осциллюючий характер і його локальні мінімуми досягають нуля (Брегівське розсіювання). Відсутність симетрії форми траншеї призводить до того, що цей коефіцієнт відмінний від нуля, хоча і осциллює.

Деякий різновид обговорюваного методу розвинений в роботі [92], в якій вивчається розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль на неоднорідності донної поверхні, що розглядається у вигляді ступінчастої структури, а також на деяких видах окремих перешкод. На основі умов спряження для горизонтальних компонентів швидкості на вертикальних межах, які відповідають границям окремих сходинок в загальній ступінчастій структурі, автори отримали систему інтегральних рівнянь. Використовуючи розклад виразу для швидкості по системі власних функцій, в чому і полягає головна відмінність від розглянутого вище підходу, коли здійснювалося розкладання в ряд величини потенціалу швидкості, автори на основі властивості ортогональності власних функцій звели зазначену систему до системи алгебраїчних рівнянь. В роботі проведено порівняння розрахованих інтегральних параметрів задачі (коефіцієнтів відбиття і проходження) з результатами, отриманими в інших роботах на основі традиційного підходу. Показано, що точність даного методу не гірша традиційного, продемонстровано відповідність результатів. Обговорюються переваги запропонованого підходу. У роботі [75] також розглядалося поширення поверхневих хвиль над ступінчастою підводною структурою, за допомогою якої здійснювалося моделювання гладкого довільного профілю донної поверхні. Використовувався метод розв’язання задачі, розроблений в роботі [35], який полягав в побудові "матриці розсіювання" Майлса з подальшим застосуванням до ступінчастої конфігурації донної поверхні. Автори виконали розрахунки коефіцієнтів відбиття і проходження для простих конфігурацій (одна і дві сходинки) при врахуванні мод, що не поширюються, тобто в повній постановці. Показано, що розрахунки за розробленою методикою непогано узгоджуються з точним розв’язком. Виявлено, що для складних профілів донної поверхні і для ділянок з крутими схилами точність розрахунків падає. Аналіз результатів роботи [35], в якій, як зазначено вище, були введені певні обмеження на довжину сходинки (довжина повинна бути великою в порівнянні з локальною глибиною потоку), показав, що описана широко-інтервальна апроксимація (wide-spacing approximation) може бути зведена до плоско-хвильової апроксимації, якщо відношення висоти сходинки до локальної глибині потоку менше, ніж 002.

Слід також відзначити роботу [23], в якій розглянуто поширення поверхневих гравітаційних хвиль над підводною перешкодою кінцевої ширини. Для розв’язку задачі був використаний метод представлення розв’язку по системі власних функцій, як в роботах [50, 89, 90]. Отримана нескінченна система алгебраїчних рівнянь вирішувалася методом редукції. Було розглянуто також наближений розв'язок, отриманий на основі плоско-хвильового наближення (plane-wave approximation), а також в довгохвильовому наближенні. Показано, що для певних частот виникає відоме резонансне явище, коли коефіцієнт відбиття приймає нульове значення, а фаза хвилі змінюється на 180 градусів (хвиля "не відчуває" перешкоди).

Подальший розвиток підходу, який полягає в моделюванні довільного профілю донної поверхні низкою східчастих структур можна знайти в роботі [83]. В роботі побудована нова "матриця розсіювання", що враховує внесок мод, що не поширюються. Стверджується, що за допомогою розробленого методу можна ефективно вирішувати практичні проблеми розсіювання поверхневих хвиль на донній поверхні складної форми з високою точністю. Однак, слід зазначити, що ці висновки засновані на розрахунках таких інтегральних параметрів, як коефіцієнти розсіювання або проходження.

При розгляді розсіювання поверхневих хвиль на підводних перешкодах кінцевої довжини необхідно також згадати про роботи, що присвячені вивченню впливу донних заглиблень, що примикають до перешкоди, які мають довільні схили, або поглиблення без виступаючих над дном перешкод, але зі схилами.

Так в роботі [55] досліджується трансформація поверхневих хвиль при проходженні над підводною перешкодою трапецієподібної форми, причому глибини потоку перед перешкодою і за нею відрізняються один від одного. У наближенні довгих хвиль отримані вирази, що описують залежність коефіцієнта відбиття R від відносної довжини схилів і довжини горизонтальної поверхні у верхній частині конструкції, а також від відносних глибин перед конструкцією і за нею. Відзначимо, що розв'язання задачі в області над схилами представлено у вигляді залежностей від функцій Бесселя першого і другого роду. Показано, що в граничних випадках розв'язання зводиться до відомих розв’язків, описаних в літературі.

Зацікавленість в даній роботі викликають результати, що стосуються коефіцієнта відбиття в разі, коли існує тільки передній схил. Знайдено, що при його відсутності поведінка зазначеного коефіцієнта збігається з описаним в монографії [69], коли розглядається розсіювання хвиль на прямокутній перешкоді. При збільшенні довжини переднього схилу, величина R спочатку зростає, а потім зменшується осцилюючим чином. Період осциляцій стає функцією не тільки від довжини верхньої горизонтальної частини, а й довжини переднього схилу. Показано, що коефіцієнт відбиття R не перетворюється в нуль (випадок прозорого проходження хвилі), якщо довжина переднього схилу відмінна від нуля.

У роботі [44] вивчається поширення поверхневих хвиль над асиметричним поглибленням донної поверхні, причому схили заглиблення мають різні форми, тобто глибина схилів змінюється довільним чином, в тому числі лінійним і стрибкоподібним. На основі методу степеневих рядів знайдені аналітичні рішення задачі: (I) в наближенні довгих хвиль, (II) на основі розв'язку рівняння, що відповідає випадку малих ухилів (MSE - "mild-slope equation"). Показано, що аналітичне розв'язання в довгохвильовому наближенні дає збіжний розв'язок для геометричних умов, які відповідають даному наближенню. Складність отримання аналітичного розв'язку MSE-рівняння полягає в необхідності отримання залежностей фазової і групової швидкості від глибини. Автори використовували наближений розв'язок (4-го порядку апроксимації), наведений в роботі [43]. Показано, що розв'язок збігається, за винятком випадків, коли глибина в центральній частині заглиблення стає більша, ніж глибина потоку.

Аналітичні розв'язки задачі про поширення поверхневих хвиль над донними перешкодами різної форми (лінійний схил, узвишшя параболічної форми, косінусоподібне узвишшя, синусоїдальні донні ріфелі) отримані в роботі [57] на основі розв'язку модифікованого рівняння малих ухилів

(MMSE - "modified mild-slope equation "), виведеного в роботі [31]. Відзначимо, що це рівняння відрізняється від MSE рівняння наявністю двох додаткових членів, які враховують кривизну і квадрат нахилу донної поверхні. Показані переваги даного рівняння при розрахунках характеристик поверхневих хвиль. Порівняння результатів розрахунку коефіцієнта відбиття поверхневих хвиль від прямокутної перешкоди з прилягаючими до нього заглибленнями донної поверхні, отриманих із застосуванням згаданих рівнянь, виконано в роботі [58]. Показано відмінність характеристик хвилювання і обговорені умови, що обмежують застосування цих рівнянь. Досліджено вплив розмірів заглиблень на характер відбиття хвиль. Показано, що коефіцієнт відбиття є осцилюючою залежністю від хвильового числа зі змінною амплітудою, і він досягає нульових значень для симетричного випадку. Як показує аналіз наведених результатів, спостерігається слабка відміна від нуля для асиметричного випадку.

Слід зазначити результати, отримані в роботах [59, 96], в яких в довгохвильовому наближенні знайдено аналітичні розв'язки, що описують коефіцієнти відбиття поверхневих хвиль від хвилерізу або заглиблення в дні. У першій з них розглянуто розсіювання поверхневих хвиль на прямокутній перешкоді з двома примикаючими до нього заглибленнями, у другій розглядаються хвилерізи і поглиблення з різними криволінійними схилами. Показано, що загальне відбиття зростає, якщо вони звужуються (крутизна зростає) і досягає максимального значення для прямокутного хвилерізу. На відміну від симетричного випадку, коли коефіцієнт відбиття може досягати нульових значень, його величина відмінна від нуля при наявності несиметричних схилів.

На відміну від розглянутих вище випадків, коли вивчалося розсіювання поверхневих хвиль на різних видах перешкоди, що мають гостру грань, поблизу якої розподілення швидкості рідини має особливість степеневого вигляду ($\propto r^{-1/3}$), є численні роботи, присвячені дослідженню поширення поверхневих хвиль над тонкими бар'єрами. Такі бар'єри являють собою модель найпростішого хвилерізу, який часто є складовою частиною складної берегозахисної системи. Слід, однак, мати на увазі, що характер сингулярності в вершині бар'єру істотно змінюється: швидкість пропорційна $r^{-1/2}$. Це призводить до того, що для розв'язання системи алгебраїчних рівнянь, до якої зводиться задача у випадку використання методу розкладання розв'язку по власних функціях, доводиться суттєво збільшувати кількість рівнянь для отримання прийнятних результатів, тобто число врахованих мод, що не поширюються, має зростати.

Залежно від умов застосовують частково занурені у воду бар'єри і бар'єри з проміжним зазором, зокрема, всередині гаваней для зменшення висоти хвиль до необхідного рівня [54]. Проблеми розсіювання поверхневих хвиль зазначеними типами хвилеломів, що мають вид вертикального тонкого бар'єру, інтенсивно вивчаються протягом багатьох років. Результати експериментального дослідження трансформації поверхневих хвиль вертикальним тонким бар'єром для випадку нормального падіння хвиль наведені у роботі [95]. Автор також представив апроксимаційну залежність для коефіцієнта проходження, яка отримана на основі припущення, що потік енергії, який проходить за бар'єр, дорівнює частині падаючого потоку енергії, що відноситься до області під бар'єром.

Докладне вивчення дифракції нормально падаючих поверхневих хвиль на зануреному хвилеломі, який представляв собою тонкий бар'єр, здійснено у роботі [22]. Автор використав метод подання розв’язку у вигляді ряду за власними функціями задачі. Використання властивості ортогональності зазначених функцій дозволило звести задачу до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу, яка вирішувалася методом середньоквадратичних відхилень, а потім редукції, розробленим у роботі [34]. Проведено чисельні розрахунки коефіцієнтів проходження і відбиття, проведено порівняння з відомими результатами. У наближеннях плоско-хвильової апроксимації і довгих хвиль, отримані аналітичні вирази для вказаних коефіцієнтів. Випадок похилого падіння поверхневих хвиль на тонкий бар'єр вивчений в роботі [61]. Автори також застосовували метод розкладання розв'язку по системі власних функцій, нескінченну систему алгебраїчних рівнянь також розв’язували, як і в роботі [22]. Збіжність чисельних розв’язків одержаної системи була повільною, що призводило до необхідності збільшувати число рівнянь. Як зазначено в роботах [56, 78], для отримання точності до другого знаку доводиться розглядати порядока $N = 400$ рівнянь.

Особливістю розглянутих конструкцій хвилеломів є, як зазначено вище, наявність гострої кромки на вершині бар'єру. Це призводить до появи кореневої сингулярності у виразі для швидкості потоку [12], що й обумовлює необхідність збільшення числа використовуваних рівнянь, тобто врахуванню мод вищого порядку. Для ряду задач розсіювання хвиль тонкими вертикальними бар'єрами у роботі [78] пропонується використовувати у якості базисних функцій поліноми Чебишева для отримання прийнятних чисельних результатів з помірно великою кількістю рівнянь.

Особливо важливим стає досягнення необхідної точності обчислень у задачах розсіювання хвиль системою вертикальних бар'єрів, коли розглядаються резонансні явища, пов'язані з виникненням стоячої хвилі у проміжку між бар'єрами. Для точного визначення частоти запирання при розгляді хвиль високої частоти, як показано у роботі [66], необхідно використовувати більш 400 рівнянь. Це викликано наявністю особливості розподілу швидкості поблизу вершини бар'єру. У роботі [45] наведено суперечливе твердження про зникнення локальної особливості по швидкостям при розгляді бар'єру кінцевої товщини. Локальна особливість по швидкостях, обумовлена існуванням точки зміни типу граничних умов, що не зникає при заміні нескінченно тонкого бар'єру на бар'єр кінцевої товщини. У цьому випадку, тобто при обліку кінцевої товщини бар'єру, виникає ступенева особливість з іншим показником ступеня [12], і труднощі обчислення нескінченної системи алгебраїчних рівнянь залишаються.

Як було зазначено раніше, важливою характеристикою розглянутих задач розсіювання поверхневих хвиль на підводній перешкоді прямокутної форми є наявність особливості по швидкостях, ($\propto r^{-1/3}$, де r - радіальна координата полярної системи координат з центром у вершині гострої грані), в околі гострих граней, що докладніше буде розглянуто пізніше. Поки ж відзначимо, що в роботах [29, 30, 47, 48] було використано розкладання розв'язку в ряд по власних функціях. Потім з використанням інверсійної формули Хавелока і виконанням умов спряження на вертикальній площині, що проходить через кутову кромку перешкоди, задача зводиться до інтегрального рівняння для невідомої горизонтальної компоненти швидкості. Це інтегральне рівняння розв'язувалося шляхом розкладання по Гальоркіна, причому в якості координатних функцій застосовувалися ультрасферичні поліноми Гегенбауера ступеня 1/6, що дозволило врахувати згадану ступеневу особливість. Більш детально вказаний підхід висвітлений у монографії [62].

Для вивчення розсіювання поверхневих хвиль тонкими бар'єрами, коли особливість по швидкості в вершині бар'єру має кореневий характер, застосовується подібний підхід (виводиться інтегральне рівняння відносно горизонтальної компоненти швидкості), але в якості базисних функцій для галеркінского розкладання беруться, як запропоновано в роботі [78], поліноми Чебишева [24], що дозволяє частково спростити обчислення, оскільки враховується існування особливості по швидкостях.

Ускладнення описаних вище задач відбувалося шляхом розгляду більш складних конфігурацій перешкод. У роботі [94] вивчався хвильовий рух над групою горизонтально розташованих пластин, в роботі [93] - над двома пластинами, одна з яких знаходилася на вільній поверхні. У роботі [20] розглядалося поширення поверхневих хвиль над прямокутною перешкодою з виступаючою пластиною, розташованою на перешкоді. Конструкція, що складається з перешкоди, що знаходиться над підводним баром розглядалася в роботі [84] і т.д. Слід також згадати про роботи, в яких досліджується розсіювання поверхневих хвиль на проникних і перфорованих перешкодах, які є розсіювачами, але на них також відбувається дисипація енергії руху. Складність в цих задачах пов'язана з необхідністю коректно представити граничні умови, оскільки для опису хвильових рухів, як правило, використовується модель ідеальної рідини, в той же час рух в проникному середовищі підпорядковується закону Дарсі, або для перфорованих перепон необхідно розглядати відрив потоку на гострих гранях та подальшу турбулізацію руху. У роботі [34] дисипація енергії всередині проникної структури враховується шляхом лінеаризованого виразу з коефіцієнтом тертя. Стверджується, що плоско-хвильова апроксимація рівнянь досить добре описує поведінку хвиль. У роботі [98] розглядається дифракція хвиль на напівнескінченому пористому хвилеломі (тонкому бар'єрі) на основі лінеаризованої теорії. Автор застосував граничну умову на бар'єрі, в основу якого покладено припущення про те, що різниця тисків через бар'єр пропорційна локальній швидкості потоку крізь нього. Ця умова заснована на моделі, розробленої в роботі [88], де розглядається рух рідини у пористому середовищі, який змінюється за гармонічним законом. Як зазначено в роботі [67], в таких роботах дисперсійне рівняння стає комплексним, тобто і корені стають комплексними на відміну від раніше розглянутих робіт, коли корені були або дійсними, або чисто уявними. Проведено аналіз поведінки цих коренів. Важливо відзначити, що в зазначених і в наступних роботах, присвячених вивченню розсіювання поверхневих хвиль на пористих структурах, практично не розглядається питання про існування особливостей за швидкостями поблизу гострих граней. Тим більше, використання виразів, що характеризують особливість у розподілі швидкості в околі гострих граней, таких же, як і для непроникних перешкод (див. наприклад, роботу [80]) вимагає обґрунтувань.

Практична значимість розглянутих вище проблем розсіювання поверхневих хвиль на різних перешкодах, які часто є складовою великих берегозахисних споруд, полягає в отриманні інформації про характеристики хвиль. На основі такої інформації може бути здійснена правильна оцінка можливого розмиву берегової лінії, отримані дані про силову дію хвиль на гідротехнічні конструкції, виконані проектні роботи по створенню ефективних механізмів для зменшення впливу хвиль. Сучасні споруди є складними механічними системами, часто великих розмірів. Їх відповідна реакція на хвильовий вплив є частотно залежною, тому для успішного функціонування цих систем і для їх конструювання необхідно мати інформацію про амплітудно-частотні характеристики хвилювання. Ця інформація може бути отримана на основі обробки даних натурних вимірювань, які представляються у вигляді енергетичних спектрів хвилювання. Такі спектри вітрового хвилювання містять в собі необхідну інформацію про розподіл аплікат, періодів хвиль, ухилів водної поверхні та ін., але вся ця інформація носить статистичний характер. Можна сказати [52], що енергетичний спектр являє собою універсальний засіб для отримання даних про характеристики хвилювання.

Морські хвилі являють собою ансамбль окремих хвиль, що мають різні частоти і напрями поширення. Хвильовий спектр описує розподіл хвильової енергії за частотою і напрямками поширення. Більш точно, розподіл хвильової енергії тільки по частоті, $S(\omega)$, безвідносно напрямку поширення, називають частотним спектром, в той же час розподіл енергії, виражений у вигляді функції від частоти і напрямки - спрямованим хвильовим спектром $S(\omega,\vartheta)$. Останній може бути представлений в наступному вигляді [37] $S(\omega,\vartheta)=S(\omega)G(\omega,\vartheta)$, де $G(\omega,\vartheta)$ називають спрямованою функцією поширення або кутовою функцією розподілу, причому $\int_{-\pi}^{\pi} G(\omega,\vartheta)\,d\vartheta = 1$. В роботі розглядаються тільки односпрямовані хвилі, тому мова нижче йтиме тільки про частотний спектр вітрового хвилювання.

На основі обробки натурних даних розроблено ряд математичних моделей, що описують спектр поверхневого хвилювання. Основна увага в цих роботах приділена хвильовим спектрам з урахуванням умов глибокого моря. Ці моделі описані в роботах [13, 51, 52, 63, 73, 97]. Існує досить багато форм спектрів, які визначаються місцем розташування області спостережень, тривалістю і довжиною розгону хвиль, стадією зростання, гідрометеоумовами. Однак є деякі основоположні риси, властиві спектрам поверхневого хвилювання [64]. До них можна віднести існування верхньої межі щільності хвильової енергії для даних умов навколишнього середовища. При досягненні режиму насичення підведення енергії від вітру балансується втратами енергії внаслідок обвалення хвиль або виникненням капілярних хвиль. Цей інтервал частот називається інтервалом рівноваги [21]. Аналіз розмірностей дає наступну формулу для спектральної щільності в діапазоні частот вище спектрального піка $S(\omega) \propto g^2 \omega^{-5}$, де g - прискорення сили тяжіння, ω - кругова частота.

У роботі [77] на основі обробки результатів вимірювань характеристик вітрового хвилювання в північній Атлантиці запропоновано вираз, що описує форму всього спектра. Подальший розвиток даної апроксимації, представленої в роботі [77], з метою уточнення форми спектральної щільності поблизу частоти спектрального максимуму ω_m в умовах обмежених розгонів вітру було здійснено на основі аналізу результатів експерименту "JONSWAP" в роботі [40].

Запропоновано і інші апроксимуючі залежності від спектру вітрового хвилювання, які адаптовані до конкретних зовнішніх умов, як це було згадано вище. Відзначимо, що спектр JONSWAP є одним з найбільш використовуваних для моделювання характеристик вітрового хвилювання.

У розглянутих вище моделях спектрів не входить явно глибина рідини. Інформація про розподіл спектральної щільності у випадку рідини кінцевої глибини є безперечно важливою, враховуючи використання її в океанографічних і інженерних додатках. У роботі [49] отриманий подальший розвиток підходу, заснований на використанні принципів подібності стосовно опису рівноважного інтервалу у випадку глибокої води, і автори перенесли цю концепцію Філліпса на випадок рідини кінцевої глибини H. У роботі [28] запропонована видозмінена форма спектра JONSWAP, у якій враховується кінцева глибина рідини. Цей спектр являє собою добуток спектра JONSWAP і поправки Китайгородського, що враховує ефект кінцевої глибини, так званий TMA спектр.

Вище розглядалися спектри, які описують тільки частину спектра, пов'язану з дією вітру, одномодальні спектри. Однак, реальні хвильові спектри зазвичай виявляють деякі відхилення від цих стандартних форм, зокрема, коли брижі співіснують із вітровими хвилями. У цьому випадку в спектрі з'являється другий спектральний пік на частоті, що відповідає періоду хвиль брижі [37, 65]. Іноді спостерігаються і спектри з трьома піками, особливо в умовах рідини кінцевої глибини [13, 64]. Часто дуже важко описати форму таких спектрів простою формулою. Один з плідних підходів до вирішення такої проблеми - це уявлення спектра у вигляді суперпозиції спектрів з різними частотами спектральних максимумів: більш низькочастотної і більш високочастотної. Коли спектральні піки відокремлені один від одного, спектр має два окремих спектральних максимума [13, 37]. У роботі [39] була запропонована модель, яка описує як вітрове хвилювання, так і хвилі брижі з використанням JONSWAP спектра для двох різних частот. У роботі [91] також використаний подібний підхід для опису спектра змішаного хвилювання, але на відміну від [39] автор ввів додаткові параметри для більш адекватного опису кожного з спектрів. Таке ж подання спектру змішаного хвилювання здійснено в роботах [33, 76], коли спектр змішаного хвилювання (вітрові хвилі і хвилі брижі) був представлений у вигляді суперпозиції двох спектрів типу JONSWAP з різними частотами спектральних максимумів.

Як приклад використання спектральних залежностей для визначення різних статистичних характеристик вітрового хвилювання, можна відзначити роботи [32, 76]. У цих роботах на основі лінійної суперпозиції спектральних компонентів з випадковими фазами отримано тимчасові залежності відхилень вільної поверхні і шляхом використання методу перетинів нульового рівня [87] знайдено статистичні розподіли амплітуд і періодів хвилювання.

1.2. Основні рівняння і граничні умови.

Інтерес до вивчення поверхневих гравітаційних хвиль пов'язаний з багатьма причинами. По-перше, у зв'язку з інтенсивним освоєнням шельфової зони і необхідністю захисту берегів і гідротехнічних споруд, актуальними є роботи по створенню захисних споруд, для конструювання яких та стійкого функціонування необхідні результати фізичного та математичного моделювання процесів взаємодії хвиль з перешкодами. До таких даних в першу чергу відносяться розраховані (або виміряні в лабораторних умовах) залежності коефіцієнтів відбиття і проходження поверхневих хвиль, що дає можливість оцінити параметри трансформованих хвиль, визначити амплітуди хвиль і провести оцінку можливого розмиву берегової смуги і навантажень, що діють на гідротехнічні конструкції у сукупності з берегозахисною спорудою. Для вирішення такого завдання в даний час розроблені численні методи розрахунку, засновані на моделях ідеальної або в'язкої рідин. Відзначимо, що в останньому випадку доводиться використовувати для опису руху рідини рівняння Нав'є-Стокса, що пов'язано з помітною трудомісткістю процесу обчислень і необхідністю використовувати потужну обчислювальну техніку. Але в результаті ми отримуємо точні дані щодо полів швидкості і тиску при взаємодії поверхневих гравітаційних хвиль із перешкодою. Об'єм розрахунків суттєво зростає у випадку складної берегозахисної споруди або при необхідності мати інформацію про просторово-часові характеристики хвильового процесу на великому інтервалі вздовж напрямку поширення хвиль. Використання моделі ідеальної рідини для розрахунку трансформації поверхневих гравітаційних хвиль на підводних перешкодах суттєво спрощує проблему.

Об’єм розрахунків значно зменшується і самі розрахунки стають менш трудомісткими. Крім того, в деяких випадках з’являється можливість отримання аналітичних залежностей при використанні тих чи інших наближень в рамках моделі ідеальної рідини. Слід також згадати про чисельно-аналітичний метод розрахунку хвильових полів, який знайшов широке застосування у проблемі, що розглядається.

Слід підкреслити, що розрахунки по тій або іншій моделі успішно доповнюють один одного. Так аналітичні залежності можуть служити тестами для чисельних розрахунків в граничних випадках. Зрозуміла також важливість порівняння розрахунків по моделі ідеальної рідини з даними чисельного моделювання.

Серед моделей, які розглядаються в механіці хвильових рухів рідини, одне з важливих місць займає модель ідеальної нестисливої рідини. На основі використання цієї моделі отримано фундаментальні результати, які служать основою для подальшого розвитку теорії поверхневих хвиль. Коротко опишемо основні рівняння, що використовуються в роботі.

Відомо [16], що рух в'язкої нестисливої рідини описується рівнянням Нав'є-Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\,\nabla\right)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\,\Delta\vec{v}\,, \tag{1.1}$$

де

$\vec{v}$ - вектор швидкості потоку рідини,

p - тиск,

ν - кінематичний коефіцієнт в'язкості,

ρ - густина рідини,

t - час.

Рівняння безперервності для нестисливої рідини набуває вигляду

$$\nabla\,\vec{v} = 0 \tag{1.2}$$

У даній роботі розглядаються лінійні гравітаційні хвилі. Швидкість руху рідких частинок мала, і в рівнянні Нав'є-Стокса можна знехтувати конвективною складовою в порівнянні з першою складовою. Зробимо відповідну оцінку. За характерний час (порядку періоду хвилі) рідкі частинки проходять відстань близько амплітуди хвилі a, тобто $v \propto a/T$. З іншого боку, швидкість помітно змінюється на відстані довжини хвилі λ протягом зазначеного періоду, тобто $(\vec{v}\,\nabla)\vec{v} \propto 1/\lambda \cdot (a/T)^2$. У підсумку отримуємо, що $a << \lambda$ [16] і рівняння (1.1) приймає наступний вигляд

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \, \Delta \vec{v} \,. \qquad (1.3)$$

Застосуємо до цього рівняння операцію rot, отримаємо

$$\frac{\partial \vec{\varsigma}}{\partial t} = \nu \, \Delta \vec{\varsigma} \,, \qquad (1.4)$$

де $\vec{\varsigma}$ - вектор завихреності.

Розглянемо тепер вплив в'язкості. Поблизу твердих меж формується тонкий примежовий шар, товщина якого має порядок $\delta = (2\nu/\omega)^2$ [69]. Тут ω - частота хвилі. Для води в разі типового періоду хвилі, рівного 1 сек,. $\delta \approx 0.056$ Якщо навіть розглядати турбулентну в'язкість, яка на два порядки перевершує ламінарну, товщина примежового шару для хвиль брижі з періодом 10 сек, залишається менше 10 см. [69]. Таким чином, область примежового шару займає малу частину загального об'єму, спільномірного з довжиною хвилі і впливом в'язкості можна знехтувати.

У випадку $\vec{\varsigma} = \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{v}} = 0$, рівняння (1.4) виконується автоматично, а при підстановці $\vec{v} = \mathrm{div}\,\Phi$ рівняння (1.2) стає таким

$$\Delta \Phi = 0 \,. \qquad (1.5)$$

Тут Φ - потенціал швидкості.

Вибір того чи іншого розв'язку рівняння Лапласа залежить від граничних умов, які і визначають постановку задачі.

Межа рідини складається з твердої донної поверхні і вільної поверхні. На твердій донній поверхні в якості граничних умов слід прийняти умову непротікання рідини, тобто нормальна до поверхні швидкість рідини має дорівнювати нулю

$$v_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \qquad (1.6)$$

Для отримання граничної умови на вільній поверхні скористаємося інтегралом Коші [14], який для потенційного руху ідеальної нестисливої рідини при наявності тільки сил тяжіння може бути записаний у вигляді

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho} = F(t).$$

Тут вертикальна вісь z направлена вверх.

Враховуючи неоднозначність вибору потенціалу, можна до нього додати деяку функцію від часу і прийняти функцію $F(t)$ рівною нулю

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho} = 0.$$

Нехтуючи квадратичним членом через його малість, знаходимо

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - g\,z. \qquad (1.7)$$

Розглянемо точку на вільній поверхні, що має координату η уздовж вертикальної осі. Ясно, що має місце функціональна залежність від часу і горизонтальних координат, $\eta = \eta(t, x, y)$. В разі відсутності зсувів $\eta = 0$, можна розглядати величину η як деформацію вільної поверхні. Якщо до вільної поверхні докладено тиск p_0 (атмосферний тиск), то з (1.7) маємо

$$p_0 = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho\, g\, \eta.$$

Знову ми можемо перевизначити потенціал, додавши до нього не залежну від координат функцію, і тоді цю умову можна записати в такий спосіб

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=\eta} + g\eta = 0 . \qquad (1.8)$$

З іншого боку, зв'язок потенціалу швидкості і відхилення вільної поверхні від умов рівноваги η може бути знайдений з таких міркувань. Оскільки амплітуда хвилі мала, то можна вважати, що вертикальна компонента швидкості w дорівнює похідній відхилення η, тобто $w = \partial\eta/\partial t$. Але за визначенням потенціалу $w = \partial\Phi/\partial z$. Звідси випливає наступний зв'язок

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} . \qquad (1.9)$$

Знову таки в силу малості амплітуди (значить і η мале) в (1.8) і (1.9) можна обчислювати похідні при $z = 0$ замість $z = \eta$. Тоді об'єднуючи (1.8) і (1.9) отримуємо умову на вільній поверхні

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \qquad (1.10)$$

Таким чином, задача звелася до рівняння Лапласа (1.5) з граничними умовами для потенціалу швидкості: на горизонтальному дні - (1.6) і на вільній поверхні - (1.10).

Обтікання кутів перешкод. Оскільки основна увага в роботі приділена розсіюванню поверхневих хвиль на перешкодах простих конфігурацій, у яких є кутові точки, розглянемо характер розв'язання рівняння Лапласа поблизу цих точок. У цих точках вираз для швидкості рідини має особливість (кореневу або ступеневу в залежності від типу перешкоди) [12,16]. При існуванні локальних особливостей в характеристиках хвильових полів, як правило, виникає неоднозначність в розв'язанні граничної задачі. При цьому можлива побудова декількох розв’язків, які відповідають основним рівнянням задачі і відрізняються тільки швидкістю прагнення до нескінченності тієї чи іншої характеристики поля. Тоді для побудови єдиного розв'язку необхідно визначити характер особливості.

Частинний розв'язок рівняння Лапласа для потенціалу швидкості поблизу кутової точки А (див. рис. 1) в полярній системі координат з початком в кутовій точці

$$\Delta\Phi(r,\theta)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi(r,\theta)}{\partial\theta^2}=0 \qquad (1.11)$$

можна представити у вигляді

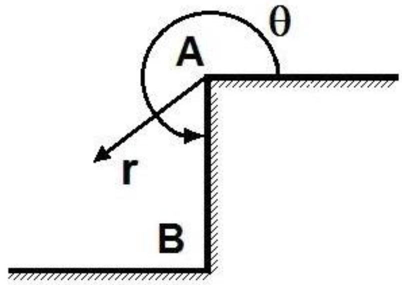

Рис. 1.1. Розташування системи координат

$$\Phi_\alpha=r^\alpha\left(A\sin\alpha\,\theta+B\cos\alpha\,\theta\right) \qquad (1.12)$$

де α - довільне дійсне число. Задовольняючи граничним умовам на стінках, у даному випадку умовам непротікання

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_\alpha(r,\theta)}{\partial\theta}=0 \qquad \text{при } \theta=0 \text{ і } \theta=\frac{3\pi}{2}, \qquad (1.13)$$

знаходимо $B=0$ і можливі значення параметра α_n , $\alpha_n=\frac{2n}{3}$. При цьому постійна А в кожному окремому розв'язку залишається довільною.

Оскільки система функцій $\cos\alpha_n\theta$ (n = 1, 2, ..) є повною в інтервалі $0\le\theta\le 3\pi/2$, то розв'язок рівняння Лапласа, що шукається, можна представити у формі нескінченного ряду [10, 18]

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,r^{\alpha_n}\cos\alpha_n\theta\ . \qquad (1.14)$$

Тоді вирази для компонентів швидкості середовища мають вигляд

$$v_r = \frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n r^{\alpha_n - 1} \cos \alpha_n \theta, \tag{1.15}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial \theta} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n r^{\alpha_n - 1} \sin \alpha_n \theta. \tag{1.16}$$

Аналіз показує, що коли розмір кута перевищує число π (в даному випадку $3\pi/2$), у виразах (1.15) і (1.16) з'являється доданок, що містить множник r з показником ступеня менше нуля (в даному випадку "-1/3"), тобто при підході до гострої грані швидкість рідини прагне до нескінченності. З іншого боку, в точці В кут становить менше π, і вираз для швидкості не має особливостей.

Подібні залежності можна отримати і для інших значень кута. Ступінь показника визначається як раз величиною кута. Можна показати, що, наприклад, для кута величиною 2π (обтікання тонкого бар’єру) у виразі, що описує поле швидкості в околі вершини бар’єру, є коренева особливість.

РОЗДІЛ 2

ТРАНСФОРМАЦІЯ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ НА ПІДВОДНОМУ УСТУПІ

2.1. Вступ.

Проблема поширення поверхневих гравітаційних хвиль в водоймах кінцевої глибини при наявності різного роду топографічних неоднорідностей донної поверхні або занурених у рідину (в тому числі частково) штучних конструкцій, призначених для захисту берегової зони від руйнування, залишається актуальною і в даний час, про що свідчать численні публікації результатів досліджень. Серед робіт присвячених даній тематиці можна виділити клас задач, в яких розглядаються хвильові рухи в займаній рідиною області, схематично розділеної на окремі підобласті, що мають вертикальні межі (декомпозиція області), а глибина в кожній з них є постійною. До них відносяться задачі поширення і розсіювання поверхневих хвиль на прямокутній перешкоді, тобто при різкій зміні глибини басейну, на плаваючій перешкоді, на западині донної поверхні і ін. Цікаво відзначити, що вплив різких змін глибини на шельфі може приводити не тільки до зміни просторово-часових характеристик хвильових полів, але і до зміни типу обвалення хвиль. Це, зокрема, використовується при створенні спеціальних зон штучних рифів, призначених для серфінгу. Низка таких конструкцій обговорюється в роботі [27].

Типовий підхід до задач розсіювання поверхневих хвиль на перешкодах, тобто при наявності різкої зміни глибини басейну, полягає в представленні розв'язку для потенціалу швидкості в кожній з підобластей у вигляді розкладів по системі власних функцій, характерних для конкретної підобласті, а потім використання умов спряження цих рішень на вертикальних межах. В результаті задача зводиться до нескінченної системи лінійних функціональних рівнянь. Далі, використовуючи умову ортогональності власних функцій, система функціональних рівнянь перетворюється до нескінченої системи алгебраїчних рівнянь, для розв’язку якої застосовується операції редукції, в результаті чого отримуємо скінченновимірну систему алгебраїчних рівнянь, що розв’язується за допомогою методу найменших квадратів [34], який є, по суті, інтегральним методом, або шляхом безпосереднього розв’язання зазначеної системи рівнянь чисельним методом.

Характерною особливістю розглянутих задач є наявність кутових точок на перешкоді. У цих точках вираз для швидкості рідини має особливість (кореневу або ступеневу, в залежності від характеру межі) [12, 16]. При існуванні локальних особливостей в характеристиках хвильових полів, як правило, виникає неоднозначність в розв'язанні граничної задачі. При цьому можлива побудова декількох розв’язків, які відповідають основним рівнянням задачі і відрізняються тільки швидкістю прагнення до нескінченності тієї чи іншої характеристики поля. Тоді для побудови єдиного розв'язку необхідно визначити характер особливості.

Особливо важливим стає досягнення необхідної точності обрахунків в задачах розсіювання хвиль системою вертикальних бар'єрів, коли розглядаються резонансні явища, пов'язані з виникненням стоячої хвилі в проміжку між бар'єрами. Як було зазначено вище, використання властивостей ортогональності системи власних функцій призводить задачу до необхідності розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів розкладів. Традиційні підходи до розв’язання такої системи - це метод простої редукції. Однак, як зазначено в роботах [56, 78], для отримання точності до другого знака доводиться розглядати достатньо велику кількість рівнянь, порядку $N = 400$. Це наочно продемонстровано в роботі [66], в якій вивчалося розсіювання хвиль системою вертикальних бар'єрів. Було показано, що для визначення частоти запирання високочастотних хвиль високої частоти необхідно використовувати понад 400 рівнянь.

У даній роботі розглядається задача розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль одиничним уступом в разі нормального падіння без обмежень на висоту уступу. Виконано виділення описаної вище особливості за швидкостями в кутовій точці. На основі розвинення цієї особливості в ряд по власних функціях задачі знаходиться асимптотика невідомих коефіцієнтів розкладу для великих порядків. Це дозволило поліпшити якість розв'язання при використанні меншої кількості рівнянь, в той же час внесок високочастотних складових проводиться асимптотично. Проведено порівняння застосованого методу поліпшеної редукції зі звичайною редукцією. Здійснено перевірку точності виконання граничних умов і умов спряження. Показано переваги методу в порівнянні з методом звичайної редукції. Виконано порівняння з відомими результатами.

2.2. Постановка задачі про поширення хвиль над уступом.

Розглянемо розсіювання монохроматичних поверхневих гравітаційних хвиль в каналі при різкій зміні рівня донної поверхні, тобто на уступі. На уступ падає хвиля з частотою ω_{dim}, що поширюється уздовж горизонтальної вісі x з $x=-\infty$. Глибина рідини до уступу дорівнює H_1 і після - становить H_2. Розташування уступу і системи координат з початком відліку на вільній поверхні представлено на рис. 2.1. Рідина вважається ідеальною, нестисливою.

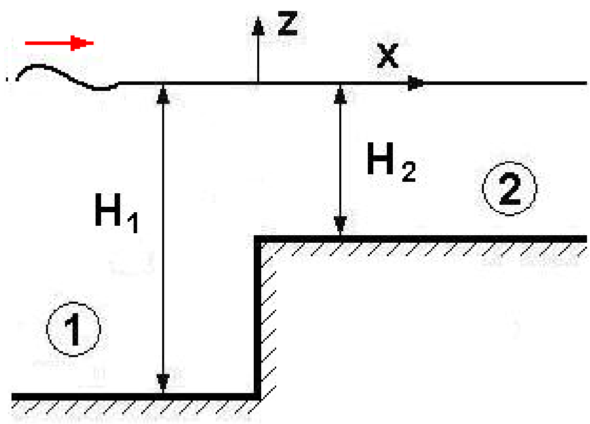

Рис.2.1. Розташування уступу і системи координат.

Поведінка лінійних поверхневих хвиль, що поширюються уздовж вільної поверхні ідеальної нестисливої рідини, описується рівнянням Лапласа для потенціалу швидкості з відповідними граничними умовами на вільній поверхні і на дні (1.5), (1.6), (1.10)

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = -H, \tag{2.3}$$

де g - прискорення сили тяжіння.

Вважаємо, що змінні змінюються в часі за гармонічним законом $e^{-i\omega t}$. Поділяємо змінні у рівнянні (2.1), тобто будемо шукати розв’язок у вигляді $\Phi(x,z) = X(x)\cdot Z(z)$. Тоді це рівняння можна представити наступним чином

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{d x^2} = -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{d z^2} = -k^2,$$

де k - поки що невідомий параметр незалежний від координат.

Розв’язок рівняння

$$\frac{d^2 Z(z)}{d z^2} - k^2 Z(z) = 0$$

має наступний вигляд

$$Z(z) = A\cosh k z + B\sinh k z .$$

Задовольняючи граничній умові на дні, маємо

$$Z(z) = A\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh k H}.$$

Розв’язок рівняння

$$\frac{d^2 X(x)}{d x^2} + k^2 X(x) = 0$$

можна записати наступним чином

$X(x) = C\exp(i\,k\,x) + D\exp(-i\,k\,x).$

Зазвичай ми розглядаємо прогресивну поверхневу хвилю з хвильовим числом k, що поширюється у додатному напрямку вісі x: $\eta = a\exp(k\,x - \omega t)$, де a - амплітуда хвилі. Тоді, підсумовуючи отримані розв'язки, вираз для потенціалу швидкості, що описує поверхневу хвилю, можна записати у наступному вигляді

$$\Phi = -\frac{i\,a\,g}{\omega}\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh k\,h}e^{i(k\,x-\omega t)}. \tag{2.4}$$

Відзначимо, що існує зсув по фазі між відхиленням вільної поверхні η від положення рівноваги і потенціалом Φ.

Після підстановки виразу (2.4) у граничну умову (2.2) отримуємо наступне дисперсійне рівняння

$$\omega_{dim}^2 = k\,g\tanh k\,H\,. \tag{2.5}$$

Хвильове число падаючої хвилі k є дійсним позитивним коренем цього дисперсійного рівняння.

Приведемо всі величини до безрозмірного вигляду, вводячи характерні масштаби довжини $L_{ch} = H_1$ і часу $T_{ch} = \sqrt{H_1/g}$, де H_1 - глибина каналу до уступу. Тоді в безрозмірному вигляді вираз для потенціалу (2.4) в області 1, тобто при $x < 0$, і дисперсійного рівняння (2.5) можна представити в такий спосіб (гармонічний співмножник за часом та фаза опущені):

$$\Phi_1^{pr} = \frac{a}{\omega}\frac{\cosh k_1(z+H_1)}{\cosh k_1 H_1}\varphi_1(z)e^{i\,k_1\,x}, \tag{2.6}$$

$$\omega^2 = k_1\,H_1\tanh k_1\,H_1\,. \tag{2.7}$$

Для зручності величина H_1 тут і в подальшому залишається в попередньому вигляді, проте її значення дорівнює одиниці.

Величина k_1 є дійсним додатнім коренем дисперсійного рівняння (2.7). Це рівняння має також безліч чисто уявних коренів κ_n, які знаходяться як розв'язок наступного рівняння:

$$\omega^2 = -\kappa_n H_1 \tan \kappa_n H_1. \qquad (2.8)$$

Корені рівняння (2.8) характеризують неоднорідні (що не поширюються) хвилі, які генеруються вниз та проти потоку. Ці хвилі змінюються в часі по гармонічному закону і затухають із відстанню. Вказаними коренями дисперсійного рівняння (2.7) $(ik_1, \kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_N, \ldots)$ відповідає ортогональна система функцій

$$\cos k_1 (z + H_1), \cos \kappa_1 (z + H_1), \ldots, \cos \kappa_N (z + H_1), \ldots .$$

Енергія, пов'язана з падаючою хвилею, яка зіштовхується із різкою зміною донної поверхні (уступом), частково переноситься за межу уступа в під область менших в даному випадку глибин і частково відбивається і переноситься у зворотному напрямку. Результуючий хвильовий рух в області 1 (див. Рис. 2) складається з падаючої і відбитої хвиль, в той час як в області 2 формується хвиля, що пройшла. Наводячи вираз для потенціалу в області 2 до безрозмірного вигляду, використовуючи відповідні характерні параметри, нормоване по відношенню до потенціалу падаючої хвилі, значення потенціалу, що відповідає моді, що розповсюджується в другій області, можна представити таким чином

$$\Phi_2^{pr} = T \frac{\cosh k_2 (z + H_2)}{\cosh k_2 H_2} e^{i k_2 x}, \qquad (2.9)$$

де T - коефіцієнт проходження хвилі.

Дійсне хвильове число, яке відповідає моді, що розповсюджується, в даному випадку визначається наступним дисперсійним рівнянням

$$\omega^2 = k_2 H_2 \tanh k_2 H_2. \qquad (2.10)$$

Дисперсійне рівняння (2.10), як і рівняння (2.7), має безліч чисто уявних коренів α_n, які визначаються наступним рівнянням

$$\omega^2 = -\alpha_n H_2 \tan \beta_n H_2 . \qquad (2.11)$$

Даним кореням дисперсійного рівняння $(ik_2, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N, \ldots)$ відповідає наступна система ортогональних власних функції

$$\cosh k_2 (z + H_2), \cos \alpha_1 (z + H_2), \ldots, \cos \alpha_N (z + H_2), \ldots$$

Підсумовуючи, з урахуванням існування мод, що не поширюються, запишемо розв'язок в області 1 ($x < 0$)

$$\Phi_1 = \left(e^{i k_1 x} + R\, e^{-i k_1 x} \right) \varphi_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\kappa_n x} B_n f_n(z) , \qquad (2.13)$$

і в області 2 ($x > 0$)

$$\Phi_2 = T\, e^{i k_1 x} \varphi_2(z) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n x} C_n \psi_n(z) , \qquad (2.14)$$

де

$$\varphi_1(z) = \frac{\cosh k_1 (z + H_1)}{\cosh k_1 H_1}, \qquad \varphi_2(z) = \frac{\cosh k_2 (z + H_2)}{\cosh k_2 H_2},$$

$$f_n(z) = \frac{\cos \kappa_n (z + H_1)}{\cos \kappa_n H_1}, \qquad \psi_n(z) = \frac{\cos \alpha_n (z + H_2)}{\cos \alpha_n H_2},$$

R, T - комплекснозначні коефіцієнти відбиття і проходження хвилі, відповідно.

Можна бачити, що в даному випадку маємо невизначені комплекснозначні коефіцієнти R, T, B_n, C_n у виразах (2.13) і (2.14). Для їх визначення формулюємо умови спряження фізичних полів на межі підобластей 1 і 2, які випливають із умови суцільності середовища, зокрема в рідині горизонтальні компоненти швидкості дорівнюють одна одній по обидві боки від межі. Крім того, горизонтальна складова швидкості в області 1 при $-H_1 < z < -H_2$ дорівнює нулю, оскільки в цьому інтервалі це є нормальна складова до твердої поверхні. Другою умовою спряження в даному випадку є рівність тиску в рідині по обидва боки від межі. Як можна бачити із інтеграла Коші

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - g\,z\,,$$

другу умову спряження можна записати у вигляді рівності значень потенціалу швидкості у рідині по різні боки від межі розділу.

Таким чином, умови спряження на межі під областей, тобто в площині $x = 0$, можна представити у наступному вигляді

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \text{при } -H_2 < z < 0, \\ 0 & \text{при } -H_1 < z < -H_2\,. \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{при} \quad -H_2 < z < 0\,. \tag{2.16}$$

2.3. Метод редукції

Традиційний шлях розв'язання подібної задачі полягає у представленні розв’язків для кожної із під областей 1 і 2 у вигляді рядів по власним функціям (2.13) і (2.14) з наступною підстановкою цих розв’язків в умови спряження (2.15) і (2.16) Коротко опишемо процедуру, завдяки якій отримуємо систему алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів $R,\ T,\ B_n$ і C_n.

Підстановка залежностей (2.13) і (2.14) в умову (2.15) приводить до функціонального рівняння

$$i\,k_1(1-R)\varphi_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n\, B_n\, f_n(z) =$$
$$= \begin{cases} i\,k_2 T \varphi_2(z) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, C_n\, \psi_n(z) & \text{при} -H_2 < z < 0 \\ 0 & \text{при} -H_1 < z < -H_2 \end{cases} \tag{2.17}$$

Множимо (2.17) на $\cosh k_1(z + H_1)$ і інтегруємо по змінній z від $-H_1$ до 0. Використовуючи властивість ортогональності власних функцій на інтервалі $(-H_1, 0)$, отримуємо наступне алгебраїчне рівняння щодо невідомих коефіцієнтів $R, T,\ B_n, C_n$

$$\frac{i\,k_1(1-R)}{\cosh k_1 H_1}\frac{1}{N_1} = \frac{i\,k_2\,T}{\cosh k_2 H_2}P_1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n\, C_n}{\cos \alpha_n H_2}P_2\,. \tag{2.18}$$

Потім множимо (2.17) на $\cos\alpha_m(z+H_1)$ і інтегруємо по тому ж інтервалу, тобто від $-H_1$ до 0. Враховуючи, що функції $\cos\alpha_m(z+H_1)$ є ортогональними на цьому інтервалі, в результаті отримуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\kappa_m B_m}{M_m \cos\alpha_m H_1} = \frac{i k_2 T}{\cosh k_2 H_2} P_3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n C_n}{\cos\alpha_n H_2} P_5^{(mn)} . \qquad (2.19)$$

Тут

$$P_1 = \frac{\sinh(k_1 H_1 + k_2 H_2)}{2(k_1+k_2)} + \frac{\sinh(k_1 H_1 - k_2 H_2)}{2(k_1-k_2)} - \\ - \frac{k_1}{k_1^2-k_2^2} \sinh(k_1 H_1 - k_1 H_2) , \qquad (2.20)$$

$$P_2 = k_1 \frac{\sinh k_1 H_1 \cos\alpha_n H_2}{k_1^2+\alpha_n^2} + \alpha_n \frac{\cosh k_1 H_1 \sin\alpha_n H_2}{k_1^2+\alpha_n^2} - \\ - k_1 \frac{\sinh(k_1 H_1 - k_1 H_2)}{k_1^2+\alpha_n^2}, \qquad (2.21)$$

$$P_3 = k_2 \frac{\sinh k_2 H_2 \cos\kappa_m H_2}{k_2^2+\kappa_m^2} + \kappa_m \frac{\cosh k_2 H_2 \sin\kappa_n H_2}{k_1^2+\kappa_n^2} - \\ - \kappa_m \frac{\sin(\kappa_m H_1 - k_m H_2)}{k_2^2+\kappa_m^2}, \qquad (2.22)$$

$$P_5^{(mn)} = \frac{\sin(\kappa_m H_1 - \alpha_n H_2)}{2(\kappa_m - \alpha_n)} + \frac{\sin(\kappa_m H_1 + \alpha_n H_2)}{2(\kappa_m + \alpha_n)} - \\ - \frac{\kappa_m}{\kappa_m^2 - \alpha_n^2} \sin(\kappa_m H_1 - \alpha_n H_2), \qquad (2.23)$$

$$N_1 = \frac{4k_1}{\sinh 2k_1 H_1 + 2k_1 H_1}, \quad M_m = \frac{4\kappa_m}{\sin 2\kappa_m H_1 + 2\kappa_m H_1} .$$

Аналогічним чином поступаємо з умовою спряження (2.16), підставляючи в яке залежності (2. 13) і (2.14), знаходимо функціональне рівняння

$$(1+R)\varphi_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n f_n(z) = T\varphi_2(z) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(z) \qquad (2.24)$$

і після використання ортогональних властивостей власних функцій під області 2 на відповідному інтервалі після інтегрування на інтервалі $(-H_2, 0)$ отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\frac{1+R}{\cosh k_1 H_1} P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\cos \kappa_n H_1} P_3 = \frac{T}{\cosh k_2 H_2} \frac{1}{N_2}, \tag{2.25}$$

$$\frac{1+R}{\cosh k_1 H_1} P_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\cos \kappa_n H_1} P_4^{(nm)} = \frac{C_m}{\cos \alpha_m H_2} \frac{1}{W_m}. \tag{2.26}$$

Тут

$$\begin{gathered} P_4^{(nm)} = \frac{\sin(\kappa_n H_1 - \alpha_m H_2)}{2(\kappa_n - \alpha_m)} + \frac{\sin(\kappa_n H_1 + \alpha_m H_2)}{2(\kappa_n + \alpha_m)} - \\ - \frac{\kappa_n}{\kappa_n^2 - \alpha_m^2} \sin(\kappa_n H_1 - \alpha_m H_2), \end{gathered} \tag{2.27}$$

$$N_2 = \frac{4k_2}{\sinh 2k_2 H_2 + 2k_2 H_2}, \quad W_m = \frac{4\alpha_m}{\sin 2\alpha_m H_2 + 2\varepsilon_m H_2}.$$

Таким чином, задовольняючи умовам спряження, після процедури алгебраїзації отримано нескінченну систему рівнянь (2.18), (2.19), (2.25), (2.26) щодо невідомих коефіцієнтів R, T, B_n, C_n. Такі системи вирішуються, як правило, методом редукції. Треба зауважити, що в даному випадку поле швидкостей має степеневу особливість в околі вершини уступу і в самому куті швидкість прямує до нескінченості. Це призводить поганої збіжності розв'язання і до необхідності збільшувати розмірність отриманої системи алгебраїчних рівнянь. Слід зауважити, що важливим з цієї точки зору стає питання про виконання граничних умов і умов спряження, чому в більшості робіт не приділяється належної уваги.

2.4. Метод поліпшеної редукції

На відміну від традиційного способу редукції, в роботі пропонується застосувати метод покращеної редукції, який полягає у використанні асимптотичних уявлень для коефіцієнтів розкладу B_n і C_n для великих значень n. Ці асимптотичні уявлення знаходяться на основі розгляду конкретного виду сингулярності, що виникає в задачі. Для розглянутого типу задач характерне існування локальних особливостей за швидкостями. Прагнення до нескінченності швидкості частинки рідини в околі вершини бар'єру в рамках моделі ідеальної рідини ставить питання про достовірність отриманого розв'язку. У зв'язку з цим відзначимо, що виникнення локальних особливостей слід розглядати як "розплату" за занадто грубе моделювання реального процесу. При цьому мається на увазі не тільки моделювання властивостей середовища (ідеальна рідина), але і постановка граничної задачі в цілому, мова йде про моделювання характеру границі, яка представляє собою також істотну ідеалізацію [11].

При існуванні локальних особливостей в характеристиках хвильових полів, як правило, виникає неоднозначність в розв'язанні граничної задачі. При цьому можлива побудова декількох розв’язків, які відповідають основним рівнянням задачі і відрізняються тільки швидкістю прагнення до нескінченності тієї чи іншої характеристики поля. Тоді для побудови єдиного розв'язку необхідно визначити характер особливості. Як було показано раніше (Розділ 1), вираз для швидкості в околі вершини уступу пропорційний $r^{-1/3}$ (тут r - радіальна координата локальної полярної системи координат з початком у вершині уступу).

У площині спряження $x = 0$ вираз для горизонтальної компоненти швидкості в області 1, як випливає з (2.13), має вигляд

$$U_1(z) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = ik_1(1-R)\varphi_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n B_n f_n(z). \qquad (2.28)$$

У виразах для швидкості (1.15) і (1.16) є складові, які характеризуються множником $r^{-1/3}$, зокрема, розподіл швидкості в околі вершини бар'єру в площині $x = 0$ можна записати у вигляді

$$U_1(z)\Big|_{x=0} = \frac{V_1}{\left(H_2^2 - z^2\right)^{1/3}} \text{ при } z \to -H_2 + 0\,, \qquad (2.29)$$

де V_1 - деяка константа, що підлягає визначенню.

Крім того,

$$U_1(z)\Big|_{x=0} = 0 \ \text{ при } \ z \to -H_2 - 0. \tag{2.30}$$

Запишемо вираз (2.28) наступним чином

$$U_1\Big|_{x=0} = ik_1(1-R)\varphi_1(z) + \left[\sum_{n=1}^{\infty}\kappa_n B_n f_n(z) - \frac{V_1}{\left(H_2^2 - z^2\right)^{1/3}}\right] + \frac{V_1}{\left(H_2^2 - z^2\right)^{1/3}}.$$

Представимо функцію $1\big/\left(H_2^2 - z^2\right)^{1/3}$ у вигляді ряду по описаній вище системі ортогональних функцій задачі Штурма-Ліувілля

$$\frac{1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} = E_0\,\varphi_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n f_n(z), \tag{2.31}$$

і підставляємо його замість другого доданку у квадратних дужках

$$\begin{aligned} U_1\Big|_{x=0} &= ik_1(1-R)\varphi_1(z) - V_1 E_0\varphi_1(z) + \\ &+ \left[\sum_{n=1}^{\infty}\kappa_n B_n f_n(z) - V_1\sum_{n=1}^{\infty} E_n f_n(z)\right] + \frac{V_1}{\left(H_2^2 - z^2\right)^{1/3}}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Ясно, що поведінка швидкості поблизу кутової точки описується, головним чином, модами високого порядку. Зважаючи на це, можна припустити, що при $n \to \infty$ коефіцієнти B_n визначаються розглянутими особливостями розподілу швидкості і при досить великому $n > N$ можна записати

$$\kappa_n B_n \cong V_1 E_n \quad \text{при} \quad n \ge N. \tag{2.33}$$

Тоді вираз (2.32) матиме вигляд

$$\begin{aligned} U_1\Big|_{x=0} &= ik_1(1-R)\varphi_1(z) - V_1 E_0\varphi_1(z) + \\ &+ \left[\sum_{n=1}^{N}\kappa_n B_n f_n(z) - V_1\sum_{n=1}^{N} E_n f_n(z)\right] + \frac{V_1}{\left(H_2^2 - z^2\right)^{1/3}}. \end{aligned}$$

Підставимо у нього вираз (2.31), знаходимо

$$U_1\Big|_{x=0} = ik_1(1-R)\varphi_1(z) + \sum_{n=1}^{N}\kappa_n B_n f_n(z) + V_1\sum_{n=N+1}^{\infty} E_n f_n(z). \tag{2.34}$$

Для знаходження коефіцієнтів E_n множимо вираз (2.31) на $\cos\kappa_m(z+H_1)$ і інтегруємо від $-H_1$ до 0. З урахуванням властивостей ортогональності власних функцій отримуємо

$$\int_{-H_1}^{0}\frac{\cos\kappa_m(z+H_1)}{(H_2^2-z^2)^{1/3}}\,dz=\frac{E_m}{M_m\cos\kappa_m H_1}. \qquad (2.35)$$

З іншого боку, використовуючи табличні інтеграли [19]

$$\int_0^a\left(a^2-t^2\right)^{\beta-1}\begin{Bmatrix}\sin bt\\ \cos bt\end{Bmatrix}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2a}{b}\right)^{\beta-1/2}\Gamma(\beta)\begin{Bmatrix}\mathrm{H}_{\beta-1/2}(ab)\\ J_{\beta-1/2}(ab)\end{Bmatrix}, \qquad (2.36)$$

де $\Gamma(\beta)$ - гамма-функція, $\mathrm{H}_{\beta\text{-}1/2}(ab)$ - модифікована функція Струве, $J_{\beta-1/2}(ab)$ функція Бесселя першого роду, знаходимо

$$E_m=\sqrt{M_m}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2H_2}{k_1}\right)^{1/6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\times$$
$$\times\left[\cos\kappa_m H_1\times J_{1/6}(\kappa_m H_2)+\sin\kappa_m H_1\times H_{1/6}(\kappa_m H_2)\right], \qquad (2.38)$$

де

$$S_1\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\,\kappa_n H_2}}\left[\cos\left(\kappa_n H_2-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{9}\frac{1}{\kappa_n H_2}\sin\left(\kappa_n H_2-\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$S_2\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\,\kappa_n H_2}}\left[\sin\left(\kappa_n H_2-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{9}\frac{1}{\kappa_n H_2}\cos\left(\kappa_n H_2-\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$S_3\approx\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{\kappa_n H_2}\right)^{5/6}.$$

Аналогічним чином поступаємо і з виразом для горизонтальної компоненти швидкості в області 2. Розподіл швидкості в околі вершини бар'єру в площині $x=0$ описується наступним виразом

$$U_2\Big|_{x=0}=\frac{V_2}{\left(H_2^2-z^2\right)^{1/3}}\quad \text{при}\quad z\to -H_2+0, \qquad (2.39)$$

де V_2 - деяка константа, що підлягає визначенню.

Розкладаємо функцію $1/\left(H_2^2 - z^2\right)^{1/3}$ в ряд по власних функціях, відповідним області 2

$$\frac{1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} = G_0\,\varphi_2(z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \psi_n(z). \qquad (2.40)$$

Після ряду перетворень, подібних до тих, які використовувалися для області 1, знаходимо

$$U_2\Big|_{x=0} = ik_2\,T\,\varphi_2(z) - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\,C_n\,\psi_n(z) - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} G_n\,\psi_n(z). \qquad (2.40)$$

Тут було зроблене припущення, що при досить великих значеннях n (більших деякого N) характер постійних розкладань визначається поведінкою швидкості поблизу ребра. При досить великому N можна записати

$$\alpha_n\,C_n \cong V_2\,G_n \quad \text{при} \quad n \geq N. \qquad (2.41)$$

Для знаходження коефіцієнтів G_n множимо вираз (2.40) на $\cos\alpha_m\,(z + H_2)$ і інтегруємо від $-H_2$ до 0. Використовуючи властивість ортогональності власних функцій по аналогії з (2.35) отримуємо

$$\int_{-H_2}^{0} \frac{\cos\alpha_m\,(z + H_2)}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}}\,d\,z = \frac{G_m}{W_m \cos\alpha_m H_2}\,.$$

Інтеграл обчислюється на основі табличного інтеграла (2.36) і після використання асимптотик функцій Струве і Бесселя для великих значень n знаходимо вираз для G_n

$$G_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} W_n \cos\alpha_n H_2 \left(\frac{2H_2}{\alpha_n}\right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left[Q_1 \cos\alpha_n H_2 + (Q_2 + Q_3)\sin\alpha_n H_2\right], \quad (2.42)$$

де

$$Q_1 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\,\alpha_n H_2}}\left[\cos\left(\alpha_n H_2 - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{9}\sin\left(\alpha_n H_2 - \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$Q_2 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\,\alpha_n H_2}}\left[\sin\left(\alpha_n H_2 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{9}\cos\left(\alpha_n H_2 - \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$Q_3 \approx \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{\alpha_n H_2}\right)^{5/6}.$$

Подальша процедура зводиться до тієї, яка використовується в методі звичайної редукції, про що було сказано в попередньому підрозділі: задача визначення коефіцієнтів R, T, B_n, C_n полягає у виконанні умов спряження (2.15) і (2.16), проте в даному випадку для великих значень n використовуються асимптотичні вирази для B_n і C_n.

Підставляємо в умови спряження вирази для потенціалів швидкості, записані з урахуванням асимптотичних властивостей невідомих,

$$\Phi_1 = \left(e^{i k_1 x} + R\, e^{-i k_1 x}\right)\varphi_1(z) + \sum_{n=1}^{N} e^{\kappa_n x} B_n f_n(z) + V_1 \sum_{n=N+1}^{N} \frac{E_n}{\kappa_n} e^{\kappa_n x} f_n(z),$$

$$\Phi_2 = T\, e^{i k_1 x}\varphi_2(z) + \sum_{n=1}^{N} e^{-\alpha_n x} C_n \psi_n(z) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{G_n}{\alpha_n} e^{-\alpha_n x}\psi_n(z),$$

і для відповідних горизонтальних компонентів швидкості отримуємо

$$i k_1(1-R)\varphi_1(z) + \sum_{n=1}^{N}\kappa_n B_n f_n(z) + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n f_n(z) =$$
$$= \begin{cases} ik_2 T\varphi_2(z) - \sum\limits_{n=1}^{N}\alpha_n C_n \psi_n(z) - V_2 \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} G_n \psi_n(z) & \text{при } -H_2 < z < 0, \\ 0 & \text{при } -H_1 < z < -H_2, \end{cases} \tag{2.43}$$

$$(1+R)\varphi_1(z) + \sum_{n=1}^{N} B_n f_n(z) + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{E_n}{\kappa_n} f_n(z) = T\varphi_2(z) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} C_n \psi_n(z) + V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{G_n}{\alpha_n}\psi_n(z) \quad \text{при } -H_2 < z < 0, \tag{2.44}$$

Подальша процедура розрахунків проводиться за аналогією з методом звичайної редукції. Множимо вираз (2.43) послідовно на власні функції $\cosh\, k_1(z+H_1)$ і $\cos\kappa_m(z+H_1)$ $(m = 1,2,\ldots,N)$, а потім інтегруємо по проміжку від $-H_1$ до 0. В результаті отримуємо

$$\frac{i k_1 (1-R)}{N_1 \cosh k_1 H_1} = \frac{i k_2 T}{\cosh k_2 H_2} \cdot P_1 - \sum_{n=1}^{N} C_n \frac{\alpha_n}{\cosh \alpha_n H_2} \cdot P_2 - \\ - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{G_n}{\cosh \alpha_n H_2} \cdot P_2, \tag{2.45}$$

$$\frac{\kappa_m}{M_m \cos \kappa_m H_1} B_m = \frac{i k_2 T}{\cosh k_2 H_2} \cdot P_3 - \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{\cos \alpha_n H_2} C_n \cdot P_5^{(mn)} - \\ - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{G_n}{\cos \alpha_n H_2} \cdot P_5^{(mn)}, \tag{2.46}$$

Аналогічним чином помножимо рівняння (2.44) послідовно на власні функції $\cosh\, k_2(z+H_2)$ і $\cos\alpha_m(z+H_2)$ та інтегруємо від $-H_2$ до 0. Знаходимо

$$\frac{(1+R)}{\cosh k_1 H_1} P_1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{B_n}{\cos \kappa_n H_1} P_3 + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{E_n}{\kappa_n \cos \kappa_n H_1} P_3 = \\ = \frac{T}{N_2 \cosh k_2 H_2}, \tag{2.47}$$

$$\frac{(1+R)}{\cosh \kappa_1 H_1} P_2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{B_n}{\cos \kappa_n H_1} P_4^{(nm)} + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{E_n}{\kappa_n \cos \kappa_n H_1} P_4^{(nm)} = \\ = \frac{C_m}{W_n \cos \kappa_n H_1}. \tag{2.48}$$

Тут параметри $P_1, P_2, P_3, P_4^{(nm)}, P_5^{(mn)}$ описуються формулами (2.20), (2.21), (2.22), (2.27), (2.23).

У результаті ми отримали систему $2N+2$ рівнянь (2.45) - (2.48) з $2N+2$ невідомими, але також з поки невизначеними постійними V_1 іV_2. Останні вибиралися з умови, що при досить великому N виконуються співвідношення (2.33) і (2.41). Тоді можна записати

$V_1 = \kappa_N B_N / E_N$ і $V_2 = \alpha_N C_N / G_N$.

Характерною особливістю отриманої системи рівнянь є те, що ця система другого роду, тобто система є добре обумовленою. Граничні задачі, які зводяться до системи другого роду, як правило, дають стійкі і прийнятні результати при простій редукції системи. Це проявляється в тому, що, починаючи з деякого N, величини коефіцієнтів відбиття R і проходження T практично не змінюються. У розглянутій задачі, починаючи з 50 членів ряду (розглядалося також 100 і 150 членів ряду), значення для коефіцієнта відбиття R і проходження T збігаються до 5 значущих цифр незалежно від того враховується чи не враховується особливість за швидкостями. Однак, для виконання умов спряження, проста редукція в більшості випадків вимагає врахування великої кількість членів ряду в розкладах N (2.13), (2.14) для потенціалу і в відповідних виразах, що описують швидкість. Вибір величини N визначається точністю виконання умов спряження.

На рис. 2.2 приведена похибка виконання умов спряження, за швидкостями для випадку $H_2 = 0.5$. Тут вздовж вертикальної вісі відкладено модуль різниці швидкостей $\delta U(z) = \left| U_1(z)\big|_{x \to -0} - U_2(z)\big|_{x \to +0} \right|$ для області $-H_2 < z < 0$ і $\delta U(z) = \left| U_1(z)\big|_{x \to -0} \right|$ для області $-H_1 < z < -H_2$. Пунктирна крива 1 відповідає похибці при простій редукції системи, тобто без урахування особливості за швидкостями, а суцільна крива 2 - з урахуванням особливості. В обох випадках розглядалося 50 членів ряду, але апріорне знання асимптотичної поведінки невідомих коефіцієнтів поліпшеною редукції дозволяє істотно збільшити кількість врахованих мод, в даному випадку число мод досягало 600. Як видно з рисунку врахування особливості за швидкостями дозволяє значно збільшити точність виконання умов спряження і зменшити область поблизу особливої точки, в якій умови спряження виконуються погано.

2.5. Аналіз результатів

У попередньому розділі було розглянуто метод розв'язання граничної задачі. Метою подальшого викладу є аналіз особливостей чисельної реалізації та оцінка точності виконання граничних умов. В рамках використаного методу визначалися, через відомий характер особливості за швидкостями, асимптотичні властивості невідомих. Це дозволило враховувати велику кількість членів ряду в поданні для поля ($\Phi_{(1,2)}$) і його похідної ($U_{(1,2)}$), в той же час нескінченні системи алгебраїчних рівнянь замінялися кінцевими.

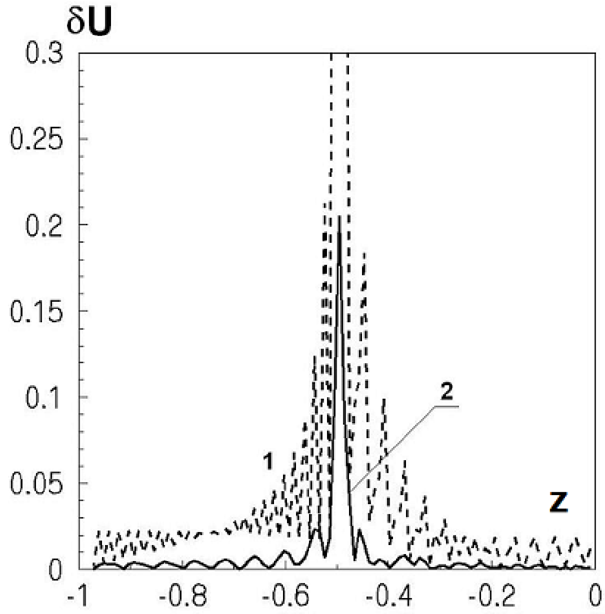

Рис. 2.2. Похибки виконання умов спряження

При цьому виникають похибки, обумовлені як редукцією системи, так і вибором величини N, починаючи з якого переходимо до асимптотичних значень невідомих. У цій ситуації головним критерієм якості отриманого рішення є контроль точності виконання умов спряження. Відзначимо, що в розглянутому класі задач, як правило, точність виконання граничних умов на поверхнях $z = 0$, $z = -H_1$, $z = -H_2$ не перевіряється, так як ці умови виконуються зі значно більшою точністю, ніж умови спряження. В якості додаткових критеріїв правильності отриманого розв'язку можна розглядати збіжність отриманого розв'язку при збільшенні порядку кінцевої системи рівнянь.

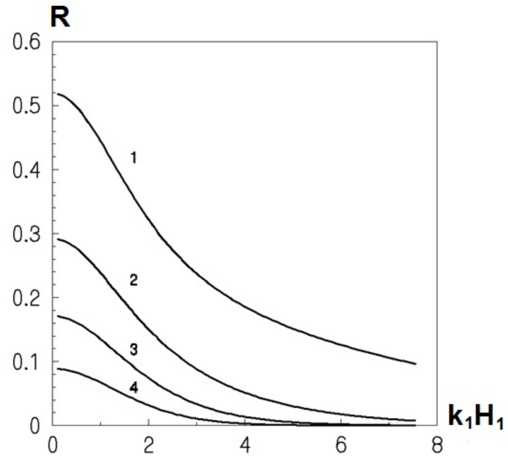

Рис.2.3. Залежність коефіцієнта відбиття від параметрів падаючої хвилі. Криві 1, 2, 3, 4 відповідають таким значенням глибини H_2: 0.1, 0.3, 0.5, 07.

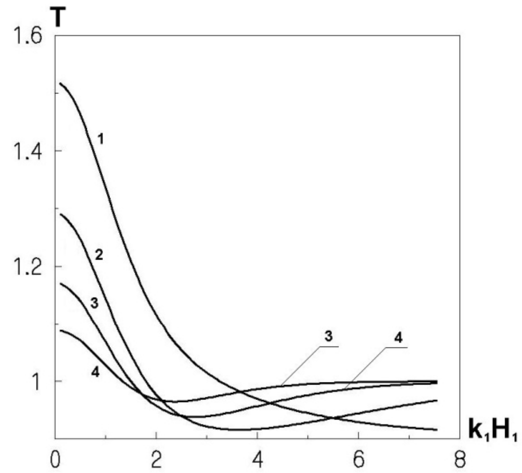

Рис.2.4. Залежність коефіцієнта проходження від параметрів падаючої хвилі. Криві 1, 2, 3, 4 відповідають таким значенням глибини H_2: 0.1, 0.3, 0.5, 07.

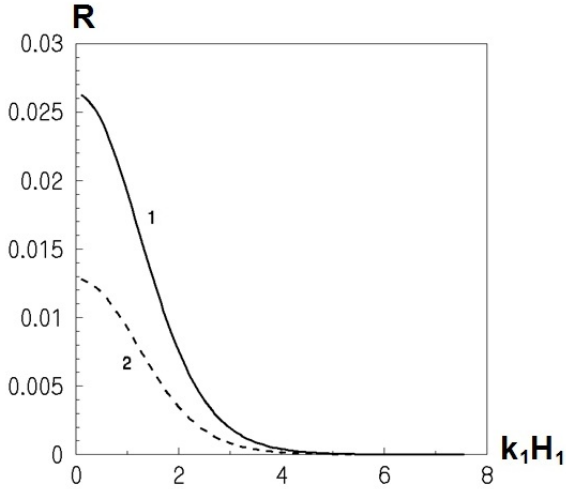

Рис. 2.5. Залежність коефіцієнта відбиття від параметрів падаючої хвилі. Криві 1,2 відповідають таким значенням глибини: 0.9, 0.95.

На основі системи рівнянь (2.45) - (2.48) були розраховані величини модулів коефіцієнтів відбиття і проходження в залежності від величини $k_1 H_1$, тобто параметрів падаючої хвилі для різних значень глибини області за уступом H_2. На рис.2.3-2.5 представлені зазначені залежності у випадку, коли $N = 100$, а у других сумах у виразах (2.45) - (2.48) замість нескінченності враховували 600 членів ряду.

З рисунків видно, що зі зменшенням величини уступу, тобто зменшенням глибини області над уступом, відбиття хвилі сильно зменшується. Коефіцієнт проходження сильно зростає в довгохвильовій частині. Слід зазначити, що розраховані залежності коефіцієнтів відбиття і проходження з графічною точністю збігаються з результатами робіт [75, 92].

2.6. Наближення довгих хвиль

Розглянемо спочатку так звану плоско хвильову апроксимацію ("plane wave approximation") [23, 61], в якій розв'язки в кожній з розглянутих вище областей не містять моди, що поширюються і розглядаються тільки хвилі, що поширюються.

В цьому випадку хвильове поле описується наступними виразами для потенціалу:

в області 1 ($x < 0$)

$$\Phi_1 = \left(e^{i\,k_1 x} + R\, e^{-i\,k_1 x}\right)\varphi_1(z), \tag{2.49}$$

в області 2 ($x > 0$)

$$\Phi_2 = T\, e^{i\,k_1 x}\,\varphi_2(z). \tag{2.50}$$

Для знаходження коефіцієнтів відбиття і проходження задовольняємо умовам спряження, (2.15) і (2.16). В результаті отримуємо такі функціональні рівняння

$$i\,k_1(1-R)\varphi_1(z) = \begin{cases} ik_2 T\varphi_2(z) & \text{при } -H_2 < z < 0 \\ 0 & \text{при } -H_1 < z < -H_2, \end{cases} \tag{2.51}$$

$$(1+R)\,\varphi_1(z)=T\varphi_2(z) \quad \text{при} \quad -H_2<z<0\,. \tag{2.52}$$

Далі, здійснюємо алгебраїзацію рівняння (2.51) шляхом його множення на власну функцію $\cosh\, k_1(z+H_1)$ і інтегруванням від $-H_1$ до 0. Аналогічним чином поступаємо з рівнянням (2.52), яке множимо на власну функцію $\cosh k_2(z+H_2)$ і інтегруємо від $-H_2$ до 0. В результаті отримуємо систему рівнянь

$$k_1\,(1-R)\frac{1}{N_1\cosh k_1\,H_1}=k_2\,T\frac{1}{\cosh k_2 H_2}\cdot P_1$$

$$(1+R)\frac{1}{\cosh k_1\,H_1}\cdot P_1=T\frac{1}{N_2\cosh k_2 H_2}$$

Звідси знаходимо

$$R=\frac{k_1-k_2N_1N_2P_1^2}{k_1+k_2N_1N_2P_1^2}\,, \tag{2.53}$$

$$T=\frac{2k_1N_2P_1}{k_1+k_2N_1N_2P_1^2}\frac{\cosh k_2H_2}{\cosh k_1H_1}\,. \tag{2.54}$$

В даному випадку застосування плоско-хвильового наближення дає можливість отримати аналітичні вирази для коефіцієнтів відбиття і проходження. Вони можуть бути використані, наприклад, для оцінки вищезгаданих коефіцієнтів на достатньо великий відставні від межі уступа, де вплив неоднорідних хвиль незначний.

Розглянемо тепер випадок довгих хвиль. З (2.53) і (2.54) знаходимо такі вирази для коефіцієнтів відбиття і проходження [69]

$$R=\frac{k_1H_1-k_2H_2}{k_1H_1+k_2H_2}\,, \tag{2.55}$$

$$T=\frac{2k_1H_1}{k_1H_1-k_2H_2}\,. \tag{2.56}$$

Можна привести ці вирази до більш традиційного виду. Для довгих хвиль з (2.7) випливає, що $\widetilde{\omega}=kH$ (тут $\widetilde{\omega}$ - безрозмірна частота) і в розмірних величинах маємо $kH=\omega(H/g)^{1/2}$. Тоді вирази (2.55) і (2.56) стануть [15]

$$R = \frac{\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}}{\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}} = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad T = \frac{2\sqrt{H_1}}{\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}} = \frac{2c_1}{c_1 + c_2}.$$

На рис. 7 представлені результати розрахунків коефіцієнтів відбиття і проходження хвилі для випадку $H_2 = 0.5$. Криві 1 розраховані за формулами (2.55) і (2.56), тобто для випадку довгих хвиль; криві 3 - на основі формул плоско-хвильового наближення, коли не враховуються моди, що не поширюються. Розрахунки при врахуванні неоднорідних мод (крива 2) виконувалися, коли число членів ряду дорівнювало 100 і врахування особливості за швидкостями проводилося шляхом врахування додаткових 500 неоднорідних мод. Як і слід було очікувати, результати розрахунків для довгохвильового наближення справедливі тільки для малих значень $k_1 H_1$, при збільшенні цього параметра спостерігається суттєва відмінність від інших підходів. Розрахунки коефіцієнта проходження, що відповідають плоско-хвильовому наближенню, практично збігаються з точним розв’язком, але коефіцієнт відбиття помітно відрізняється від точного розв'язку і різниця зростає з ростом $k_1 H_1$. Порівняння результатів для великих значень $k_1 H_1$ не проводилося, оскільки із зменшенням довжини хвилі роль мод, що не поширюються, зростає і використання даних наближень стають некоректними. Слід зазначити, що зміна глибини H_2, не призводить до помітної зміни результатів порівняння. Це пов'язано з тим, що у виразах (41) - (44) величина глибини входить у вигляді добутку $k_2 H_2$, і зменшення величини H_2 частково компенсується збільшенням хвильового числа k_2 згідно дисперсійним співвідношенням, і навпаки. Подібного ефекту не повинно спостерігатися при поширенні акустичних хвиль, які є недисперсійними.

2.7. Висновки до розділу 2

В даному розділі розглянуто задачу розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль на одиночному різкому піднятті донної поверхні (уступі). Розглянуто випадок нормального падіння. Відомо, що одним з ефективних методів розв'язку такого роду задач є розклад розв’язків в ряд по власних функціях завдання. [56]. Розподіл швидкості потоку має ступеневу особливість поблизу вершини уступу. В результаті розв'язання задачі зводиться до виконання умов спряження, над уступом і рівності нулю нормальних до вертикальної межі компонентів швидкості. Використання властивостей ортогональності системи власних функцій приводить задачу до необхідності розв'язку нескінченної системи алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів розкладів. Традиційні підходи до розв’язання такої системи - це метод простої редукції. Однак, як зазначено в роботах [56, 78], для отримання точності до другого знака доводиться розглядати достатньо велику кількість рівнянь, порядку $N = 400$.

Особливо важливим стає досягнення необхідної точності обчислень в задачах розсіювання хвиль системою перешкод, коли розглядаються резонансні явища, пов'язані з виникненням стоячої хвилі в проміжку між перешкодами. Необхідність істотно збільшувати розмір системи рівнянь для точного визначення частоти запирання при розгляді хвиль високої частоти, пов'язане з наявністю особливості розподілу швидкості поблизу вершини кутових точок.

В даному розділі для розгляду задач розсіяння поверхневих гравітаційних хвиль на уступі здійснено виділення зазначених особливостей. Були використані асимптотичні залежності, які визначаються видом зазначених особливостей, для невідомих коефіцієнтів розкладання для великих значень N. Це дає можливість зменшити не тільки розмір системи алгебраїчних рівнянь, а й істотно розширити область в околі точки зміни типу граничних умов, в якій поліпшується точність отриманого розв'язку.

Здійснено перевірку точності виконання умов спряження. Отримано залежності коефіцієнтів відбиття і проходження від параметрів падаючої хвилі.

Знайдено аналітичні залежності для коефіцієнтів відбиття і проходження в плоско-хвильовому наближенні. Показано, що для довгих хвиль вони переходять у відомі залежності.

Проведене порівняння результатів, отриманих на основі застосованого методу і методу простої редукцією, показало, що запропонований підхід поліпшеної редукції є більш ефективним для розрахунку задач розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль перешкодами.

РОЗДІЛ 3

РОЗСІЮВАННЯ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ НА ПІДВОДНІЙ ПЕРЕШКОДІ КІНЦЕВОЇ ДОВЖИНИ

3.1. Вступ.

Відомо, що під впливом хвиль може відбуватися руйнування розташованих в шельфовій зоні гідротехнічних споруд, ерозія берегів, тому залишається актуальною задача захисту цих споруд і берегів за допомогою штучних конструкцій різноманітної форми, яка залежить від хвильового клімату, нахилу берегів, глибини місця установки хвилерізу, а також доступністю і вартістю матеріалів. Найбільш поширені хвилерізи являють собою кам'яні накидання і бетонні конструкції або комбінація обох типів. Оскільки до хвилеломів ставляться високі вимоги, їх конструкції стають все більш складними, і вони проектуються з урахуванням розуміння процесів взаємодії хвиль із структурами і берегами. Приклади конструкцій хвилеломів можна знайти в узагальнюючих монографіях [36, 46, 81].

Задача розрахунку параметрів хвиль, що поширюються над хвилеломами, продовжує викликати цікавість у дослідників в зв'язку з необхідністю вдосконалення їх характеристик, поліпшення екологічних якостей. Розуміння процесу взаємодії хвиль з перешкодами ґрунтується на вивченні простих, "канонічних" форм хвилеломів, типу уступ, бар'єр, бар'єр кінцевих розмірів та ін. Більш складні конструкції хвилеломів представляють собою, як правило, різні комбінації простих форм хвилеломів. Цим пояснюється цікавість до теоретичного аналізу розсіювання хвиль на хвилеломах простих форм.

Особливістю конструкцій хвилеломів, що представляють собою прямокутну перешкоду, що знаходиться на дні, є наявність у них гострих кромок. Це призводить до появи степеневої сингулярності ($\propto r^{-1/3}$, де r - радіальна координата полярної системи координат з центром у вершині гострої грані) у виразі для швидкості потоку [12], що обумовлює необхідність збільшення числа використовуваних рівнянь, тобто врахування мод вищого порядку. Відмітимо, що в роботах [29, 47] було використано розкладання розв'язання в ряд по власних функціях, потім з використанням інверсійної формули Хавелока і виконання умов спряження на вертикальній площині, що проходить через кутову кромку перешкоди, задача зводиться до інтегрального рівняння для невідомої горизонтальної компоненти швидкості. Це інтегральне рівняння вирішувалося шляхом розкладання по Гальоркіну, причому в якості координатних функцій застосовувалися ультрасферичні поліноми Гегенбауера ступеня 1/6, що дозволило врахувати згадану ступеневу особливість. Більш детально вказаний підхід висвітлений у монографії [62]. Слід, однак, зауважити, що використання для галеркінского розкладання функцій, які дозволяють врахувати сингулярність розподілу швидкості, призводить до необхідності перевіряти граничні умови задачі, на відміну від розкладання по власних функціях, коли ці умови задовольняються, по крайній мірі, функціонально, хоча перевірку чисельного розв'язку проводити все ж таки необхідно. В основній масі робіт, присвячених даним задачам, такі перевірки відсутні, і перевіряється тільки збіжність розв'язку, причому за інтегральними параметрами: коефіцієнтам відбиття і проходження.

В даному розділі на основі розкладання в ряд по власних функціях розглянуто задачу розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль підводною прямокутною перешкодою в разі нормального падіння. Виконано врахування описаних особливостей розподілу швидкості в околі гострих кромок перешкоди. Знайдена асимптотика невідомих коефіцієнтів розкладання для великих n. Врахування вкладу мод високих порядків дозволило поліпшити якість одержаного розв'язку при зменшенні розмірності системи для знаходження коефіцієнтів розкладання. Розглянуто симетричне розташування перешкоди, в тому числі в наближенні плоских хвиль. Вивчено вплив асиметрії конструкції, коли глибини потоку до і після перешкоди відрізняються одна від одної.

3.2. Постановка задачі

Розглядається плоска задача про розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль на неоднорідності донної поверхні в рідині кінцевої глибини. Припускається, що монохроматична хвиля з частотою ω_{dim} падає нормально на неоднорідність, яка являє собою прямокутну перешкоду довжини $2b$ з різкими кромками. Хвиля поширюється уздовж горизонтальної вісі x з $x = -\infty$. Спрямована вгору вертикальна вісь z декартової системи координат проходить через середину верхньої межі перешкоди з початком відліку на вільній поверхні. Розташування перешкоди і системи координат представлено на рис.3.1. Вважається, що глибина рідини перед перешкодою, H_1, в загальному випадку не дорівнює глибині за перешкодою, H_3. Глибина рідини над перешкодою становить H_2. Згідно з рисунком розбиваємо всю область, зайнятою рідиною, на три області:

область 1 - $-\infty < x < -b$;

область 2 - $-b < x < b$;

область 3 - $b < x < \infty$.

Рідина вважається ідеальною і нестисливою.

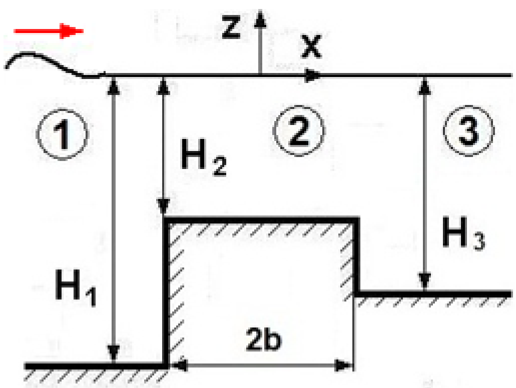

Рис.3.1. Розташування прямокутної перешкоди і системи координат

Поведінка лінійних поверхневих хвиль, які поширюються уздовж вільної поверхні в рідині глибиною H_1 (область 1) описується рівнянням Лапласа для потенціалу швидкості (див. Розділ 1)

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0\,. \tag{3.1}$$

Граничні умови мають такий вигляд

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -H_1, \tag{3.3}$$

де g - прискорення сили тяжіння.

Вираз для потенціалу швидкості має вигляд (див. (2.4))

$$\Phi = -\frac{i\,a\,g}{\omega}\frac{\cosh k_1(z + H_1)}{\cosh k_1 H_1}e^{i(kx - \omega t)},$$

де a - амплітуда падаючої хвилі, k - хвильове число, яке є коренем дисперсійного рівняння

$$\omega^2_{dim} = k_1\, g \tanh k_1 H_1\,.$$

Наведемо зазначені рівняння до безрозмірного вигляду, з огляду на такі характерні масштаби довжини $L_{ch} = H_1$ і часу $T_{ch} = \sqrt{H_1/g}$. Тоді вираз для потенціалу і відповідне дисперсійне рівняння приймуть вигляд (фазовий множник опущено)

$$\Phi = \frac{a}{\omega}\frac{\cosh k_1(z + H_1)}{\cosh k_1 H_1}e^{i(k_1 x - \omega t)}, \tag{3.4}$$

$$\omega^2 = k_1 H_1 \tanh k_1 H_1, \tag{3.5}$$

де a і ω тепер вже безрозмірні величини амплітуди і частоти, відповідно. Величину H_1 для зручності залишимо в попередньому вигляді, хоча вона і дорівнює 1.

Хвильове число k_1 є дійсним додатнім коренем дисперсійного рівняння (3.5) і характеризує хвилю, що поширюється. Крім цього кореня, вказане рівняння має безліч чисто уявних коренів, які відносяться до неоднорідних хвиль і визначаються рівнянням

$$\omega^2 = -\alpha_n H_1 \tan \alpha_n H_1. \tag{3.6}$$

Кореням дисперсійного рівняння k_1, α_n відповідає ортогональна система власних функцій $\cosh k_1(z+H_1)$, $\cos\alpha_n(z+H_1)$, де $n = 1,2,\ldots N,\ldots$

По аналогії з виразами для потенціалу швидкості для області 1 знаходимо подібні залежності для областей 2 і 3. Тоді отримуємо такі вирази для потенціалів швидкості в областях 1-3 (множник $e^{-i\omega t}$ опускаємо).

$$\Phi_1 = \left(e^{ik_1(x+b)} + \mathrm{R}e^{-ik_1(x+b)}\right)\varphi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\alpha_n(x+b)} A_n \varphi_n(z), \tag{3.7}$$

$$\Phi_2 = \left(B_0 \cos k_2 x + C_0 \sin k_2 x\right)\psi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n \frac{\cosh\beta_n x}{\cosh\beta_n b} + C_n \frac{\sinh\beta_n x}{\sinh\beta_n b}\right)\psi_n(z), \tag{3.8}$$

$$\Phi_3 = Te^{ik_3(x-b)} f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma_n(x-b)} D_n f_n(z). \tag{3.9}$$

Таким чином, вирази для потенціалів швидкостей представлено у вигляді рядів по власним функціям, де $\varphi_0(z),\varphi_n(z)$ - власні функції, що відповідають області 1, $\psi_0(z),\psi_n(z)$ - області 2 і $f_0(z), f_n(z)$ - області 3:

$$\varphi_0(z) = \frac{\cosh k_1 (z+H_1)}{\cosh k_1 H_1}, \qquad \varphi_n(z) = \frac{\cos\alpha_n (z+H_1)}{\cos\alpha_n H_1},$$

$$\psi_0(z) = \frac{\cosh k_2 (z+H_2)}{\cosh k_2 H_2}, \qquad \psi_n(z) = \frac{\cos\beta_n (z+H_2)}{\cos\beta_n H_2},$$

$$f_0(z) = \frac{\cosh k_3 (z+H_3)}{\cosh k_3 H_3}, \qquad f_n(z) = \frac{\cos\gamma_n (z+H_3)}{\cos\gamma_n H_3}.$$

Хвильові числа $k_2, \beta_n, k_3, \gamma_n$ - це корені відповідних дисперсійних рівнянь

$$\omega^2 = k_2 H_2 \tanh k_2 H_2, \quad \omega^2 = -\beta_n H_2 \,\mathrm{tg}\, \beta_n H_2,$$

$$\omega^2 = k_3 H_3 \tanh k_3 H_3, \; \omega^2 = -\gamma_n H_3 \,\mathrm{tg}\, \gamma_n H_3.$$

Розв'язання задачі полягає в знаходженні комплекснозначних коефіцієнтів відбиття і проходження R, T і комплекснозначних коефіцієнтів розкладів A_n, B_n, C_n, D_n шляхом задоволення умовам спряження виразів для потенціалів і швидкостей в площинах $x=-b$ і $x=b$, які розділяють всю течії. Як і у попередньому розділі, умови спряження повинні бути сформульовані відносно фізичних характеристик, в даному випадку це горизонтальні компоненти швидкості і поле тиску. Вони можуть бути подані у наступному вигляді:

в площині $x=-b$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \text{при } -H_2 < z < 0, \\ 0 & \text{при } -H_1 < z < -H_2 \end{cases}, \tag{3.10}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{при } -H_2 < z < 0 \tag{3.11}$$

і в площині $x=b$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \text{при } -H_2 < z < 0, \\ 0 & \text{при } -H_1 < z < -H_3 \end{cases}, \tag{3.12}$$

$$\Phi_3 = \Phi_2 \quad \text{при } -H_2 < z < 0\,. \tag{3.13}$$

3.3. Метод розв'язання

Підставляючи вирази для потенціалів (3.7) - (3.9) в умови спряження (3.10) - (3.13) отримуємо нескінченну систему функціональних рівнянь. Шляхом їх множення на відповідні власні функції і інтегрування по вертикальній вісі із врахуванням властивостей ортогональності цих функцій цю систему перетворюємо в нескінченну систему алгебраїчних рівнянь. Таким чином задача зводиться до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів відбиття і проходження R, T і коефіцієнтів розкладів A_n, B_n, C_n, D_n. Отримана система розв'язується, як правило, методом редукції. Але наявність особливості по швидкості в кутових точках призводить до того, що збіжність розв'язання погана і виникає необхідність врахування великої кількості неоднорідних мод, що призводить до істотного збільшення розмірності системи.

На відміну від простої редукції в роботі пропонується використовувати асимптотичні вирази коефіцієнтів розкладань при великих значеннях n, які можуть бути отримані виходячи з конкретного виду сингулярності, в даному випадку сингулярності за швидкістю ступеневого вигляду. Детально процедура отримання асимптотичних уявлень зазначених коефіцієнтів для великих n викладена в попередньому розділі при розгляді задачі про трансформацію поверхневих хвиль на уступі.

Розглянемо цю процедуру більш детально. З (3.7) випливає, що вираз для горизонтальної компоненти швидкості в області 1 при $x=-b$ має вигляд

$$U_1\Big|_{x=-b} = ik_1(1-R)\frac{\cosh k_1(z+H_1)}{\cosh k_1 H_1} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n A_n \frac{\cos\alpha_n(z+H_1)}{\cos\alpha_n H_1}. \tag{3.14}$$

Раніше було зазначено, що швидкість рідини в околі кутової точки в даному випадку має особливість порядку $r^{-1/3}$. Звідси випливає, що поведінка горизонтальної компоненти швидкості в площині $x=-b$ при $z \to -H_2 + 0$ описується наступним виразом

$$U_1(z)\Big|_{x=-b} = \frac{V_1}{\left(H_2^2 - z^2\right)^{1/3}}, \tag{3.15}$$

де V_1 - константа, що вимагає визначення.

Подамо вираз (3.15) у вигляді ряду за власними функціями

$$\frac{V_1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} = V_1 E_0 \frac{\cosh k_1(z+H_1)}{\cosh k_1 H_1} + V_1 \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{\cos\alpha_n(z+H_1)}{\cos\alpha_n H_1}. \tag{3.16}$$

Додаємо і віднімаємо від правої частини (3.14) вираз (3.15) і після ряду перетворень, подібних до тих, що застосовувались в розділі 2, де розглядалась трансформацію поверхневих хвиль на уступі, отримуємо

$$\begin{aligned} U_1\Big|_{x=-b} &= ik_1(1-R)\frac{\cosh k_1(z+H_1)}{\cosh k_1 H_1} + \sum_{n=1}^{N}\kappa_n A_n \frac{\cos\alpha_n(z+H_1)}{\cos\alpha_n H_1} + \\ &+ V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n \frac{\cos\alpha_n(z+H_1)}{\cos\alpha_n H_1}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Вираз (3.17) в наведеному вигляді знайдено на основі припущення, що при великих значеннях n, більших деякого N, характер коефіцієнтів A_n визначається поведінкою швидкості в околі кутової точки. Наступна рівність відображає цей зв'язок

$$\alpha_n A_n \cong V_1 E_n \quad \text{при} \quad n \geq N, \tag{3.18}$$

Для коефіцієнтів E_n знаходимо асимптотичну залежність для великих значень n. Для цього множимо вираз (3.16) на $\cos \alpha_m (z + H_1)$ і інтегруємо по інтервалу $[-H_1, 0]$. З урахуванням ортогональності власних функцій отримуємо

$$\int_{-H_1}^{0} \frac{\cos \alpha_m (z + H_1)}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} d z = \frac{E_m}{N_m \cos \alpha_m H_1}.$$

Обчислюючи інтеграл, що розташовано в лівій частині рівності, на основі табличного інтеграла (2.36), знаходимо

$$\begin{gathered} E_m = \sqrt{N_m} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2H_2}{k_1} \right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3} \right) \times \\ \times \left[\cos \alpha_m H_1 \times J_{1/6}(\alpha_m H_2) + \sin \alpha_m H_1 \times H_{1/6}(\alpha_m H_2) \right] \end{gathered} \tag{3.19}$$

Тут $\Gamma(\beta)$ - гамма-функція, $\mathrm{H}_\beta (a\, b)$ - модифікована функція Струве, $J_\beta (a\, b)$ - функція Бесселя першого роду,

$$N_m = \frac{4\alpha_m}{\sinh 2\alpha_m H_1 + 2\alpha_m H_1}.$$

Для розрахунків використовувалися асимптотичні вирази для коефіцієнтів E_m для великих значень m, які знаходились з використанням асимптотик функцій Струве і Бесселя з урахуванням відомої залежності α_m від m [42]: $\alpha_m H \approx (m-1)\pi$.

В результаті отримуємо

$$E_m = \frac{\sqrt{\pi}}{2} N_m \cos \alpha_m H_1 \left(\frac{2H_2}{\alpha_m} \right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3} \right) \times \left[S_1 \cos \alpha_m H_1 + (S_2 + S_3) \sin \alpha_m H_1 \right], \tag{3.20}$$

де

$$S_1 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_m H_2}}\left[\cos\left(\alpha_m H_2 - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{9}\frac{1}{\alpha_m H_2}\sin\left(\alpha_m H_2 - \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$S_2 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_m H_2}}\left[\sin\left(\alpha_m H_2 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{9}\frac{1}{\alpha_m H_2}\cos\left(\alpha_m H_2 - \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$S_3 \approx \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{\alpha_m H_2}\right)^{5/6}.$$

Перейдемо до області 2. Зупинимось на цьому трохи докладніше. Запишемо вираз для горизонтальної швидкості в площині $x = b$, виходячи з (3.8). Додаємо і віднімаємо вираз, що характеризує сингулярність в кутовій точці

$$\begin{aligned} U_2\big|_{x=b} &= k_2\left(-B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b\right)\psi_0(z) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(B_n \frac{\sinh \beta_n b}{\cosh \beta_n b} + C_n \frac{\cosh \beta_n b}{\sinh \beta_n b}\right)\psi_n(z) - \\ &- (V_3^+ + V_3^-)\frac{1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} + (V_3^+ + V_3^-)\frac{1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Тут V_3^+ і V_3^- невідомі константи, які підлягають визначенню.

Розкладаємо $1/(H_2^2 - z^2)^{1/3}$ в ряд по власних функціях, що відповідають області 2

$$\frac{1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} = R_0\psi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \psi_n(z). \tag{3.22}$$

Тоді вираз (3.21) можна записати в такий спосіб

$$\begin{aligned} U_2\big|_{x=b} &= k_2(-B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b)\psi_0(z) - V_3^+ R_0\,\psi_0(z) - V_3^- R_0\,\psi_0(z) + \\ &+ \left[\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n B_n \frac{\sinh \beta_n b}{\cosh \beta_n b}\psi_n(z) - V_3^+ \sum_{n=1}^{\infty} R_n\,\psi_n(z)\right] + \\ &+ \left[\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n C_n \frac{\cosh \beta_n b}{\sinh \beta_n b}\psi_n(z) - V_3^- \sum_{n=1}^{\infty} R_n\,\psi_n(z)\right] + (V_3^+ + V_3^-)\frac{1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ясно, що поведінка швидкості поблизу кутової точки буде визначатися вищими модами. Тоді на основі припущення, що при великих значеннях n, більших деякого N, характер коефіцієнтів B_n і C_n визначається поведінкою швидкості в околі кутової точки, тобто вищими модами, після ряду перетворень представимо (3.23) у вигляді, замінивши останній доданок його розкладанням (3.22)

$$U_2\big|_{x=b} = k_2(-B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b)\psi_0(z) + \sum_{n=1}^{N} \beta_n B_n \frac{\sinh \beta_n b}{\cosh \beta_n b} \psi_n(z) +$$
$$+\sum_{n=1}^{N} \beta_n C_n \frac{\cosh \beta_n b}{\sinh \beta_n b} \psi_n(z) + V_3^+ \sum_{n=N+1}^{\infty} R_n \psi_n(z) + V_3^- \sum_{n=N+1}^{\infty} R_n \psi_n(z). \qquad (3.24)$$

Ухвалена пропозиція, по суті, виражається наступними рівностями, які виконуються для значень n, більших деякого N, $n > N$

$$V_3^+ R_n = \beta_n B_n \mathrm{th}\, \beta_n b, \qquad (3.25)$$

$$V_3^- R_n = \beta_n C_n \mathrm{cth}\, \beta_n b. \qquad (3.26)$$

Для горизонтальної компоненти швидкості в області 2 в площині $x = -b$, проводячи ті ж перетворення, знаходимо

$$U_2\big|_{x=-b} = k_2(B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b)\psi_0(z) - \sum_{n=1}^{N} \beta_n B_n \frac{\sinh \beta_n b}{\cosh \beta_n b} \psi_n(z) +$$
$$+\sum_{n=1}^{N} \beta_n C_n \frac{\cosh \beta_n b}{\sinh \beta_n b} \psi_n(z) - V_3^+ \sum_{n=N+1}^{\infty} R_n \psi_n(z) + V_3^- \sum_{n=N+1}^{\infty} R_n \psi_n(z). \qquad (3.27)$$

Повертаючись до (3.22), помножимо його на $\cos \beta_m (z + H_2)$ і інтегруємо від $-H_2$ до 0. Використовуючи властивість ортогональності власних функцій, а також скориставшись табличним інтегралом (2.36) за аналогією з (3.19) знаходимо асимптотичні вирази для коефіцієнтів B_n і C_n так само, як і при обчисленні E_n. Після ряду перетворень отримуємо

$$R_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} M_n \cos \beta_n H_2 \left(\frac{2H_2}{\beta_n}\right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \times \left[L_1 \cos \beta_n H_2 + (L_2 + L_3) \sin \beta_n H_2\right],$$

$$L_1 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \beta_n H_2}} \left[\cos\left(\beta_n H_2 - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{9} \frac{1}{\beta_n H_2} \sin\left(\beta_n H_2 - \frac{\pi}{3} \right) \right],$$

$$L_2 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \beta_n H_2}} \left[\sin\left(\beta_n H_2 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{9} \frac{1}{\beta_n H_2} \cos\left(\beta_n H_2 - \frac{\pi}{3} \right) \right],$$

$$L_3 \approx \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} \right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3} \right)} \left(\frac{2}{\beta_n H_2} \right)^{5/6}, \quad M_n = \frac{4\beta_n}{\sinh 2\beta_n H_2 + 2\beta_n H_2}.$$

Переходимо до області 3. Поведінка горизонтальної компоненти швидкості в площині $x = b$ при $z \to -H_2 + 0$ описується виразом, що є подібним до (3.15)

$$U_3(z)\big|_{x=b} = \frac{V_4}{\left(H_2^2 - z^2\right)^{1/3}},$$

де V_4 - константа, що вимагає визначення.

Поступаючи аналогічним чином, як для області 1, знаходимо вираз, що описує горизонтальну компоненту швидкості в площині $x = b$

$$U_3\big|_{x=b} = ik_3 T \frac{\cosh k_3 (z + H_3)}{\cosh k_3 H_{13}} - \sum_{n=1}^{N} \gamma_n D_n \frac{\cos\gamma_n (z + H_3)}{\cos\gamma_n H_3} - \\ - V_4 \sum_{n=N+1}^{\infty} S_n \frac{\cos\gamma_n (z + H_3)}{\cos\gamma_n H_3}. \quad (3.28)$$

Тут припускалось, що характер коефіцієнтів D_n визначається поведінкою швидкості в околі кутової точки, тобто вищими модами. Звідси знаходимо

$$V_4 S_n = \gamma_n D_n. \quad (3.29)$$

Розкладаючи вираз $1/(H_2^2 - z^2)^{1/3}$ в ряд по власних функціях, що відповідають даній області,

$$\frac{1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} = S_0 f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n f_n(z),$$

і використовуючи табличний інтеграл (2.36), знаходимо асимптотичний вираз, що описує коефіцієнти розкладання.

$$S_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} P_n \cos\gamma_n H_3 \left(\frac{2H_2}{\gamma_n}\right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \times \left[L_{10}\cos\gamma_n H_3 + (L_{11} + L_{12})\sin\gamma_n H_3\right],$$

$$L_{10} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_n H_2}} \left[\cos\left(\gamma_n H_2 - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{9}\frac{1}{\gamma_n H_2}\sin\left(\gamma_n H_2 - \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$L_{11} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_n H_2}} \left[\sin\left(\gamma_n H_2 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{9}\frac{1}{\gamma_n H_2}\cos\left(\gamma_n H_2 - \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$L_{12} \approx \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{\gamma_n H_2}\right)^{5/6}, \quad P_n = \frac{4\gamma_n}{\sinh 2\gamma_n H_3 + 2\gamma_n H_3}.$$

Запишемо тепер вирази для потенціалів, в яких враховуються введені асимптотичні залежності для коефіцієнтів розкладання при великих значеннях n:

$$\Phi_1 = \left(e^{ik_1(x+b)} + \mathrm{R}e^{-ik_1(x+b)}\right)\varphi_0(z) + \sum_{n=1}^{N} e^{\alpha_n(x+b)} A_n \varphi_n(z) + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{E_n}{\alpha_n} e^{\alpha_n(x+b)} \varphi_n(z),$$

$$\Phi_2 = \left(B_0\cos k_2 x + C_0 \sin k_2 x\right)\psi_0(z) + \sum_{n=1}^{N}\left(B_n \frac{\cosh\beta_n x}{\cosh\beta_n b} + C_n \frac{\sinh\beta_n x}{\sinh\beta_n b}\right)\psi_n(z) +$$

$$+ V_3^+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n \tanh\beta_n b}\frac{\cosh\beta_n x}{\cosh\beta_n b}\psi_n(z) + V_3^- \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n \coth\beta_n b}\frac{\sinh\beta_n x}{\sinh\beta_n b}\psi_n(z),$$

$$\Phi_3 = Te^{ik_3(x-b)} f_0(z) + \sum_{n=1}^{N} e^{-\gamma_n(x-b)} D_n f_n(z) + V_4 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{S_n}{\gamma_n} e^{-\gamma_n(x-b)} f_n(z).$$

Тепер переходимо до виконання умов спряження. Для цього підставляємо отримані вище вирази для $\Phi_1.\Phi_2,\Phi_3$ і відповідні формули для горизонтальних компонентів швидкості (3.17), (3.24), (3.27), (3.28) в умови (3.10) - (3.13). Спочатку розглянемо (3.10). Підстановка приводить до наступної системи функціональних рівнянь

$$ik_1(1-R)\varphi_0(z)+\sum_{n=1}^{N}\kappa_n\,A_n\,\varphi_n(z)+V_1\sum_{n=N+1}^{\infty}E_n\,\varphi_n(z)=$$

$$=\begin{cases} k_2(B_0\sin k_2 b+C_0\cos k_2 b)\psi_0(z)+\sum\limits_{n=1}^{N}\beta_n(-B_n\tanh\beta_n b+C_n\coth\beta_n b)\psi_n(z)- \\ -(V_3^+-V_3^-)\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}R_n\psi_n(z) \qquad \text{при} \quad -H_2<z<0, \\ \qquad\qquad 0 \quad \text{при} \quad -H_1<z<-H_2. \end{cases}$$

Здійснюємо процедуру алгебраїзації: множимо спочатку на $\cosh k_1(z+H_1)$ і інтегруємо від $-H_1$ до 0, а потім множимо на $\cos\alpha_m(z+H_1)$ і також інтегруємо з цього ж проміжку. Скориставшись властивістю ортогональності власних функцій, отримуємо в першому випадку рівняння

$$\frac{ik_1(1-R)}{\cosh k_1 H_1}\frac{1}{N_0}=k_2(B_0\sin k_2 b+C_0\cos k_2 b)\frac{I_{00}}{\cosh k_2 H_2}+$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\beta_n(-B_n\tanh\beta_n b+C_n\coth\beta_n b)\frac{I_{0n}}{\cos\beta_n H_2}- \tag{3.30}$$
$$-(V_3^+-V_3^-)\sum_{n=N+1}^{\infty}R_n\frac{I_{0n}}{\cos\beta_n H_2},$$

і в другому – наступне

$$\frac{\alpha_m}{N_m\cos\alpha_m H_1}A_m=k_2(B_0\sin k_2 b+C_0\cos k_2 b)\frac{I_{m0}}{\cosh k_2 H_2}+$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\beta_n(-B_n\tanh\beta_n b+C_n\coth\beta_n b)\frac{I_{mn}}{\cos\beta_n H_2}- \tag{3.31}$$
$$-(V_3^+-V_3^-)\sum_{n=N+1}^{\infty}R_n\frac{I_{mn}}{\cos\beta_n H_2}.$$

Виконуючи умову спряження (3.11), отримуємо

$$(1+R)\varphi_0(z)+\sum_{n=1}^{N}A_n\,\varphi_n(z)+V_1\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{E_n}{\alpha_n}\varphi_n(z)=(B_0\cos k_2 b-C_0\sin k_2 b)\psi_0(z)+$$
$$+\sum_{n=1}^{N}(B_n-C_n)\psi_n(z)+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{R_n}{\beta_n}\left(\frac{V_3^+}{\tanh\beta_n b}-\frac{V_3^-}{\coth\beta_n b}\right)\psi_n(z).$$

Як і вище, множимо отримане співвідношення спочатку на $\cosh k_2(z+H_2)$, а потім на $\cos\beta_m(z+H_2)$. У кожному разі інтегруємо по інтервалу від $-H_2$ до 0, і відповідно, знаходимо

$$(1+R)\frac{I_{00}}{\cosh k_1 H_1}+\sum_{n=1}^{N}A_n\frac{I_{n0}}{\cos\alpha_n H_1}+V_1\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{E_n}{\alpha_n\cos\alpha_n H_1}I_{n0}=$$
$$=(B_0\cos k_2 b-C_0\sin k_2 b)\frac{1}{\cosh k_2 H_2}\frac{1}{M_0}, \tag{3.32}$$

$$(1+R)\frac{I_{0m}}{\cosh k_1 H_1}+\sum_{n=1}^{N}A_n\frac{I_{nm}}{\cos\alpha_n H_1}+V_1\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{E_n}{\alpha_n\cos\alpha_n H_1}I_{nm}=$$
$$=(B_m-C_m)\frac{1}{\cosh k_2 H_2}\frac{1}{M_m} \tag{3.33}$$

Рівняння (3.30) - (3.33) представляють собою систему $2N+2$ рівнянь, отриманих в результаті задовільнення умов спряження в площині $x=-b$. У рівняння входять наступні величини

$$I_{00}=\frac{\sinh(k_1H_1+k_2H_2)}{2(k_1+k_2)}+\frac{\sinh(k_1H_1-k_2H_2)}{2(k_1-k_2)}-\frac{k_1}{k_1^2-k_2^2}\sinh(k_1H_1-k_1H_2)$$

$$I_{0n}=k_1\frac{\sinh k_1H_1\cos\beta_nH_2}{k_1^2+\beta_n^2}+\beta_n\frac{\cosh k_1H_1\sin\beta_nH_2}{k_1^2+\beta_n^2}-k_1\frac{\sinh(k_1H_1-k_1H_2)}{k_1^2+\beta_n^2},$$

$$I_{m0}=k_2\frac{\sinh k_2H_2\cos\alpha_mH_2}{k_2^2+\alpha_m^2}+\alpha_m\frac{\cosh k_2H_2\sin\alpha_mH_2}{k_1^2+\alpha_m^2}-\alpha_m\frac{\sin(\alpha_mH_1-\alpha_mH_2)}{k_2^2+\alpha_m^2},$$

$$I_{mn}=\frac{\sin(\beta_nH_2-\alpha_mH_1)}{2(\beta_n-\alpha_m)}+\frac{\sin(\beta_nH_2+\alpha_mH_1)}{2(\beta_n+\alpha_m)}+\frac{\alpha_m}{\beta_n^2-\alpha_m^2}\sin(\alpha_mH_1-\alpha_mH_2),$$

$$I_{nm}=\frac{\sin(\beta_mH_2-\alpha_nH_1)}{2(\beta_m-\alpha_n)}+\frac{\sin(\beta_mH_2+\alpha_nH_1)}{2(\beta_m+\alpha_n)}+\frac{\alpha_n}{\beta_m^2-\alpha_n^2}\sin(\alpha_nH_1-\alpha_nH_2),$$

$$N_0=\frac{4k_1}{\sinh 2k_1H_1+2k_1H_1},\ M_0=\frac{4k_2}{\sinh 2k_2H_2+k_2H_2}.$$

Перейдемо тепер до умов спряження у площині $x=b$, тобто (3.12) і (3.13). З умови (3.12) знаходимо

$$ik_3T\, f_0(z) - \sum_{n=1}^{N} \gamma_n D_n\, f_n(z) - V_4 \sum_{n=N+1}^{\infty} S_n\, f_n(z) =$$

$$= \begin{cases} k_2(-B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b)\psi_0(z) + \sum_{n=1}^{N} \beta_n (B_n \tanh \beta_n b + C_n \coth \beta_n b)\psi_n(z) + \\ + (V_3^+ + V_3^-) \sum_{n=N+1}^{\infty} R_n \psi_n(z) \qquad \text{при} \qquad -\mathrm{H}_2 < z < 0 \\ \quad 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \qquad -\mathrm{H}_2 < z < -H_1. \end{cases}$$

Множимо спочатку на $\cosh k_3(z + H_3)$ і інтегруємо від $-H_3$ до 0, а потім на $\cos \gamma_m (z + H_3)$ і інтегруємо по цьому ж проміжку, в результаті чого, відповідно, отримуємо

$$\frac{ik_3T}{\cosh k_3 H_3} \frac{1}{P_0} = k_2(-B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b) \frac{J_{00}}{\cosh k_2 H_2} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} \beta_n (B_n \tanh \beta_n b + C_n \coth \beta_n b) \frac{J_{n0}}{\cos \beta_n H_2} + \tag{3.34}$$
$$+ (V_3^+ + V_3^-) \sum_{n=N+1}^{\infty} R_n \frac{J_{n0}}{\cos \beta_n H_2},$$

$$-\frac{\gamma_m}{P_m \cos \gamma_m H_3} D_m = k_2(-B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b) \frac{J_{0m}}{\cosh k_2 H_2} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} \beta_n (B_n \tanh \beta_n b + C_n \coth \beta_n b) \frac{J_{nm}}{\cos \beta_n H_2} + \tag{3.35}$$
$$+ (V_3^+ + V_3^-) \sum_{n=N+1}^{\infty} R_n \frac{J_{nm}}{\cos \beta_n H_2}.$$

Тепер переходимо до умови (3.13). Підставляючи вирази для потенціалу в цю умову, знаходимо

$$T\, f_0(z) + \sum_{n=1}^{N} D_n\, f_n(z) + V_4 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{S_n}{\gamma_n} f_n(z) = (B_0 \cos k_2 b + C_0 \sin k_2 b)\psi_0(z) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} (B_n + C_n)\psi_n(z) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n} \left(\frac{V_3^+}{\tanh \beta_n b} + \frac{V_3^-}{\coth \beta_n b} \right) \psi_n(z).$$

Повторюємо попередню процедуру: множимо спочатку на $\cosh k_2(z + H_2)$ з подальшим інтегруванням від $-H_2$ до 0, а потім на

$\cos\beta_m(z+H_2)$ і інтегруванням по такому ж самому проміжку, і відповідно, отримуємо

$$\frac{T}{\cosh k_3 H_3} J_{00} + \sum_{n=1}^{N} D_n \frac{J_{0n}}{\cos\gamma_n H_3} + V_4 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{S_n}{\gamma_n \cos\gamma_n H_3} J_{0n} = \\ = (B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b) \frac{1}{\cosh k_2 H_2} \frac{1}{M_0}, \tag{3.36}$$

$$\frac{T}{\cosh k_3 H_3} J_{m0} + \sum_{n=1}^{N} D_n \frac{J_{mn}}{\cos\gamma_n H_3} + V_4 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{S_n}{\gamma_n \cos\gamma_n H_3} J_{mn} = \\ = (B_m + C_m) \frac{1}{\cosh k_2 H_2} \frac{1}{M_m}, \tag{3.37}$$

Рівняння (3.34) - (3.37) разом з (3.30) - (3.33) являють собою систему $4N+4$ рівняння щодо $4N+4$ невідомих і завдання полягає в чисельному розв'язанні отриманої системи. Необхідні для замикання системи коефіцієнти V_1, V_3^+, V_3^-, V_4 вибираються із співвідношень (3.18), (3.25), (3.26), (3.29).

У рівняннях (3.34) - (3.37) є такі величини

$$J_{00} = \frac{\sinh(k_2 H_2 + k_3 H_3)}{2(k_2 + k_3)} + \frac{\sinh(k_2 H_2 - k_3 H_3)}{2(k_2 - k_3)} + \frac{k_3}{k_2^2 - k_3^2} \sinh(k_3 H_3 - k_3 H_2)$$

$$I_{0m} = k_2 \frac{\sinh k_2 H_2 \cos\gamma_m H_3}{k_2^2 + \gamma_m^2} + \gamma_m \frac{\cosh k_2 H_2 \sin\gamma_m H_3}{k_2^2 + \lambda_m^2} - \gamma_m \frac{\sinh(\gamma_m H_3 - \gamma_m H_2)}{k_2^2 + \gamma_m^2},$$

$$I_{m0} = k_3 \frac{\sinh k_3 H_3 \cos\beta_m H_2}{k_3^2 + \beta_m^2} + \beta_m \frac{\cosh k_3 H_3 \sin\beta_m H_2}{k_3^2 + \beta_m^2} - k_3 \frac{\sin(k_3 H_3 - k_3 H_2)}{k_3^2 + \beta_m^2},$$

$$I_{mn} = \frac{\sin(\beta_m H_2 - \gamma_n H_3)}{2(\beta_m - \gamma_n)} + \frac{\sin(\beta_m H_2 + \gamma_n H_3)}{2(\beta_m + \gamma_n)} + \frac{\gamma_n}{\beta_m^2 - \lambda_n^2} \sin(\gamma_n H_3 - \gamma_n H_2),$$

$$I_{nm} = \frac{\sin(\beta_n H_2 - \gamma_m H_3)}{2(\beta_n - \gamma_m)} + \frac{\sin(\beta_m H_2 + \gamma_m H_3)}{2(\beta_n + \gamma_m)} + \frac{\gamma_m}{\beta_n^2 - \gamma_m^2} \sin(\gamma_m H_3 - \gamma_m H_2),$$

$$P_0 = \frac{4k_3}{\sinh 2k_3 H_3 + 2k_3 H_3}.$$

Отримана система алгебраїчних рівняння є системою другого роду, тобто добре обумовленою. Граничні задачі, які зводяться до таких систем, як правило, дають прийнятні результати при простій редукції системи рівняння, коли величини коефіцієнтів відбиття R і проходження T практично не змінюються при розрахунках починаючи з деякого N. У даній задачі, починаючи з 50 членів ряду, величини коефіцієнтів R і T практично не змінювалися і збігалися до 5 значущих цифр незалежно від того враховується асимптотична поведінка невідомих коефіцієнтів чи ні. Однак, при перевірці виконання умов спряження ситуація інша. Якщо умови спряження по потенціалу швидкості (3.11), (3.13) виконуються з достатньою точністю навіть при простій редукції системи, то для умов спряження по швидкості (3.10), (3.12) проста редукція системи призводить до значної похибки їх виконання в околі кутових точок. При використанні методу поліпшеної редукції, в якому враховується асимптотична поведінка невідомих, для $N = 50$ помилка виконання умов спряження за потенціалом не перевищувала 0.1% потенціалу падаючої хвилі. Про якість виконання умов спряження по швидкостях можна судити за даними, представленим на рис. 3.2.

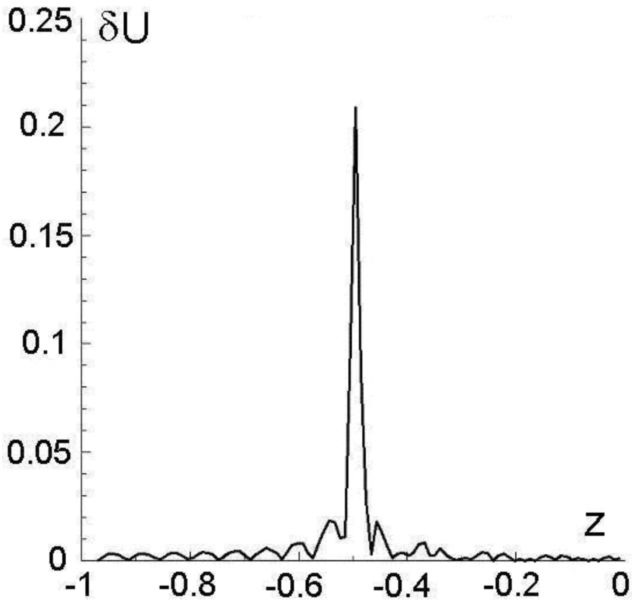

Рис. 3.2. Графік точності умов спряження по швидкості при $x = -b$

Тут на рис. 3.2 представлена залежність модуля різниці швидкостей $\delta U = |U_1 - U_2|$ для перетину $x = -b$. Розрахунки проведені для $H_2 = 0.5, H_3 = 1.0, b = 0.5, N = 100$ і 400 мод вищих порядків, внесок яких враховувався асимптотично. Як видно з рисунку, похибка виконання умов спряження по швидкостях не перевищує 2% від швидкості падаючої хвилі для всіх $z \notin (-H_2 - \varepsilon, -H_2 + \varepsilon)$ і $\varepsilon = 0.15$. Цікаво відзначити, що область, в якій умови спряження виконуються з даною точністю, розташована симетрично щодо $z = -H_2$. При зростанні N величина ε зменшувалася. Аналогічні результати були отримані під час розгляду умов спряження по швидкості в площині $x = b$. Величина ε виявилася практично однаковою як для $x = b$, так і для $x = -b$. Також відзначимо, що похибка виконання умов спряження для $x = -b$ і для $x = b$ виявилися дуже близькими.

3.4. Аналіз результатів

Шляхом чисельного розв'язання описаної вище системи $4N + 4$ рівняння було розраховано залежності коефіцієнтів відбиття і проходження від хвильового числа падаючої хвилі для різних співвідношень глибин до і за перешкодою, глибини над перешкодою, довжини перешкоди.

Симетрична перешкода.

Для симетричної перешкоди необхідно прийняти в вищенаведених формулах $H_3 = H_1 = 1.0$. Результати розрахунків коефіцієнтів R і T в залежності від хвильового числа падаючої хвилі для деяких співвідношень глибини і довжини перешкоди представлені у вигляді графіків на рисунках, наведених нижче. На рис. 3.3-3.5 представлені результати розрахунків модулів коефіцієнтів відбиття R і проходження T в залежності від величини хвильового числа падаючої хвилі для різних довжин перешкоди.

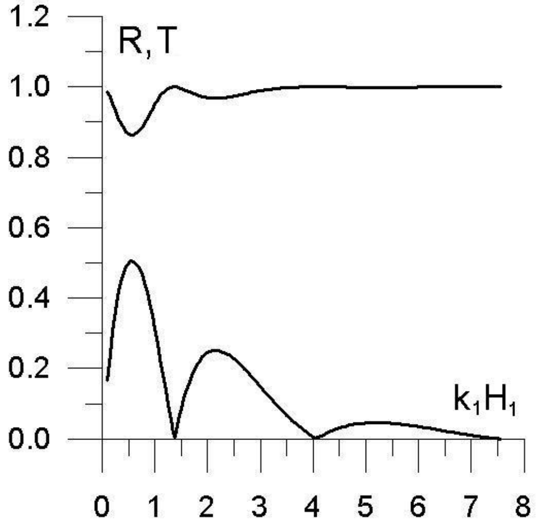

Рис. 3.3. Залежність коефіцієнтів R і T від $k_1 H_1$ при $H_2 = 0.3$ і $b = 0.5$

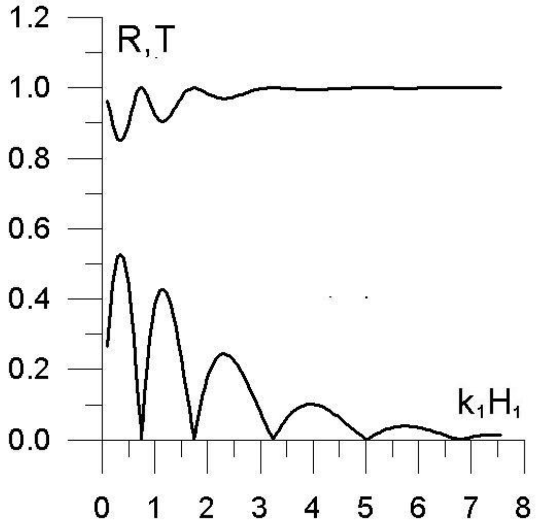

Рис. 3.4. Залежність коефіцієнтів R і T від $k_1 H_1$ при $H_2 = 0.3$ і $b = 1.0$

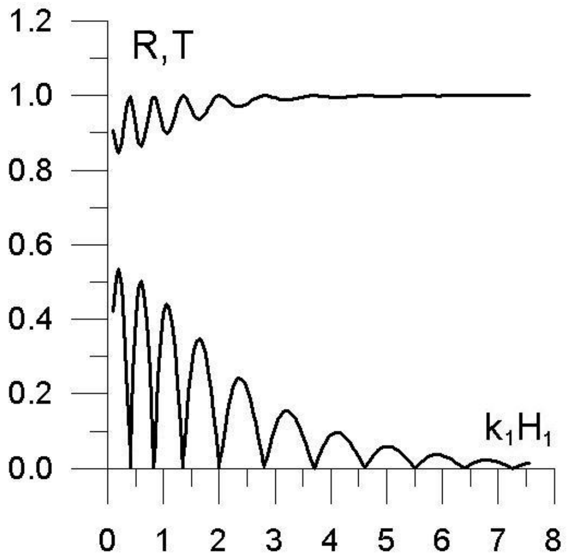

Рис. 3.5. Залежність коефіцієнтів R і T від $k_1 H_1$ при $H_2 = 0.3$ і $b = 2.0$.

Глибина води над перешкодою в області 2 (див. рис.3.1) становила $H_2 = 0.3$. Видно, що зміна довжини перешкоди викликає невеликі зміни максимальних величин максимумів коефіцієнтів відбиття: зі зростанням b ці максимальні значення зростають, що пов'язано зі збільшенням загромадження каналу. Однак, ці зміни R невеликі. У той же час для певних значень хвильового числа k_1 коефіцієнт відбиття стає рівним нулю, так зване "брегівське" розсіювання. Причина появи нульових значень коефіцієнта R пов'язана з взаємодією хвилі, відбитої від границі $x = -b$ з хвилею, що пройшла через цю межу, потім поширилася в області над перешкодою до межі $x = b$, відбилася від неї і пройшла назад до межі $x = -b$. У разі, коли фази цих хвиль протилежні, коефіцієнт відбиття стає рівним нулю і хвилелом стає повністю "відкритим". Детально цей інтерференційний механізм розглянуто в монографії [69]. Збільшення довжини перешкоди призводить до появи нових локальних мінімумів в розподілі коефіцієнта R і його графік стає сильно порізаним. Що стосується коефіцієнта проходження T, то його поведінка чітко корелює з поведінкою коефіцієнта R, оскільки виконується закон збереження енергії, який в даному випадку приймає вид $R^2 + T^2 = 1$.

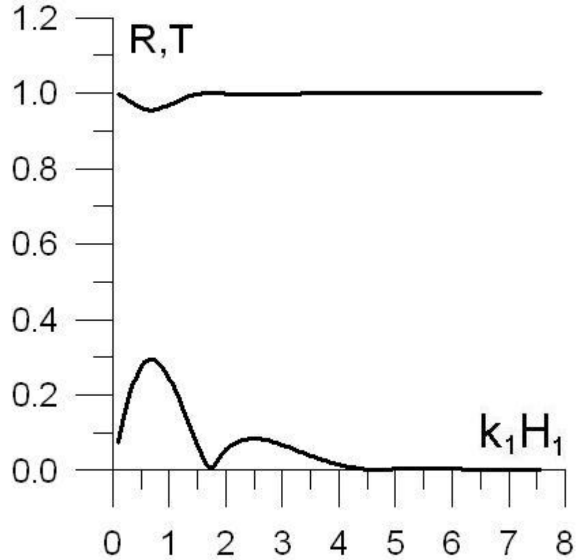

Рис. 3.6. Залежності коефіцієнтів R і T від $k_1 H_1$ при $H_2 = 0.5$ і $b = 0.5$.

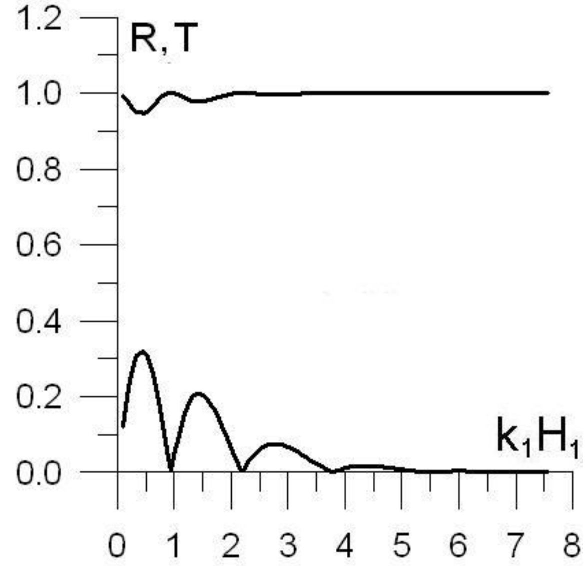

Рис. 3.7. Залежності коефіцієнтів R і T від $k_1 H_1$ при $H_2 = 0.5$ і $b = 1.0$.

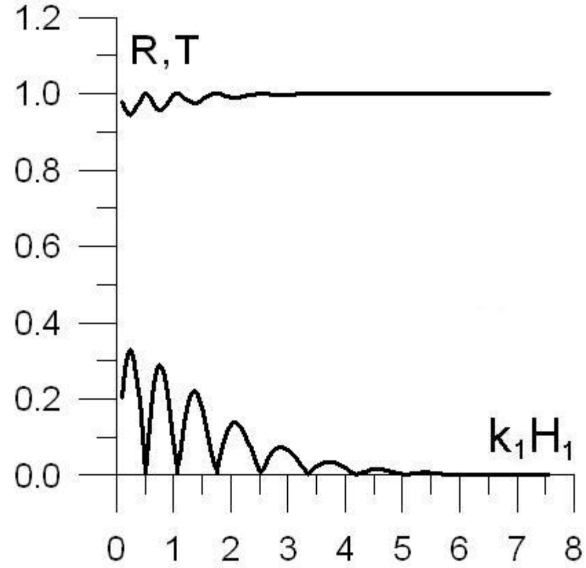

Рис. 3.8. Залежності коефіцієнтів R і T від $k_1 H_1$ при $H_2 = 0.5$ і $b = 2.0$.

Зменшення висоти перешкоди (збільшення глибини води над перешкодою) призводить, як і слід було очікувати, до зменшення максимальних значень коефіцієнта відбиття. Це наочно видно на рис. 3.6-3.8. Тут глибина води H_2 дорівнювала 0.5. Як і при величині $H_2 = 0.3$, коефіцієнт відбиття приймає при певних значеннях хвильового числа падаючої хвилі нульові значення, число яких зростає з ростом довжини перешкоди. Цікаво відзначити, що величини $k_1 H_1$, при яких коефіцієнт обертається в нуль в разі $H_2 = 0.3$, відрізняються від аналогічних величин при $H_2 = 0.5$ для рівних довжин перешкод. Це пов'язано з тим, що довжини хвиль (а значить і швидкості хвиль), що поширюються над перешкодами будуть відрізнятися в цих випадках згідно з дисперсійним рівнянням. Це призводить до зміни набігу фази в хвилі і зміщення умов, при яких фази хвиль відрізняються на π .

Як і в попередньому випадку ($H_2 = 0.3$), спостерігається невелике збільшення максимальних значень коефіцієнта відбиття при зростанні довжини перешкоди.

Були також проведені розрахунки коефіцієнтів відбиття і проходження для випадків, коли глибина рідини над перешкодою становила $H_2 = 0.7$ і $H_2 = 0.9$. Отримані результати відрізняються від вищенаведених тільки кількісно.

Аналіз наведених результатів показав, при зменшенні глибини рідини над перешкодою відносна роль довжини перешкоди в зміні максимальних значень коефіцієнта R зростає. Але, в цілому, основні висновки залишаються незмінними: (I) максимальні значення коефіцієнта відбиття істотно залежать від висоти перешкоди; (II) коефіцієнт відбиття при певних значеннях хвильового числа падаючої хвилі стає рівним нулю; (III) зміна висоти перешкоди призводить до зміни значень хвильового числа k_1, при якому коефіцієнт R стає рівним нулю; (IV) збільшення довжини перешкоди призводить до зростання числа осциляцій коефіцієнта відбиття.

Відмітимо, що отримані результати, що стосуються залежності коефіцієнтів відбиття від хвильового числа падаючої хвилі, збігаються з графічною точністю з даними розрахунків, наведеними в роботі [23], при однакових параметрах задачі.

Несиметрична перешкода.

Розглянемо спочатку результати розрахунку модулів коефіцієнтів відбиття і проходження в залежності від хвильового числа падаючої хвилі для різних довжин $2b$, коли $H_2 = 0.5$ і глибина рідини за перешкодою змінюється.

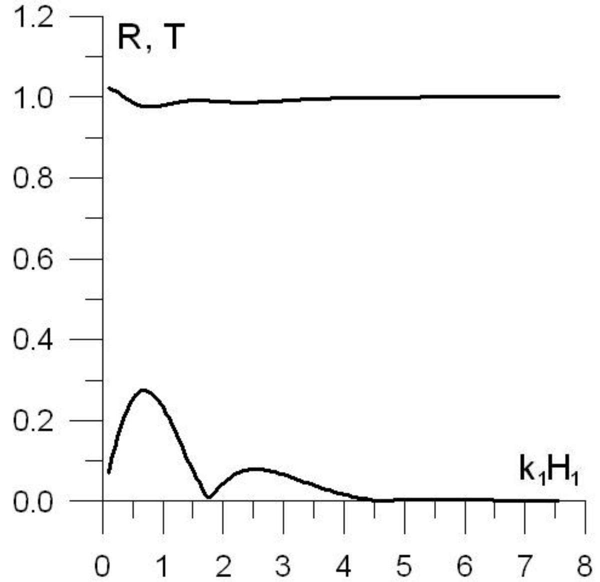

Рис. 3.9. Коефіцієнти R і T при $H_2 = 0.5$, $H_3 = 0.9$, $b = 0.5$.

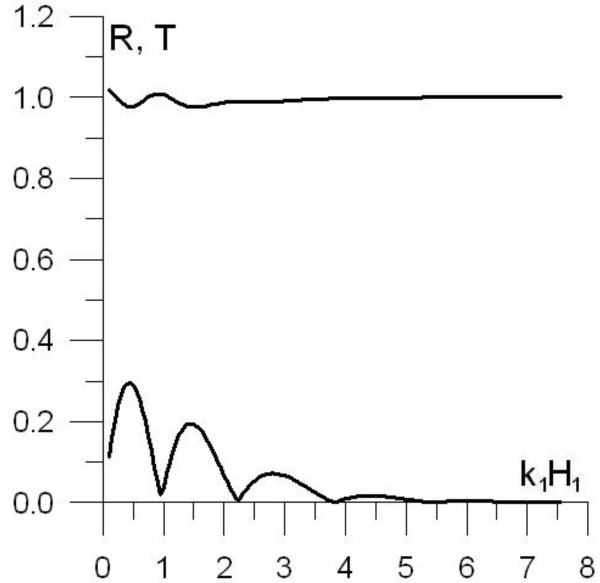

Рис. 3.10. Коефіцієнти R і T при $H_2 = 0.5$, $H_3 = 0.9$, $b = 1.0$.

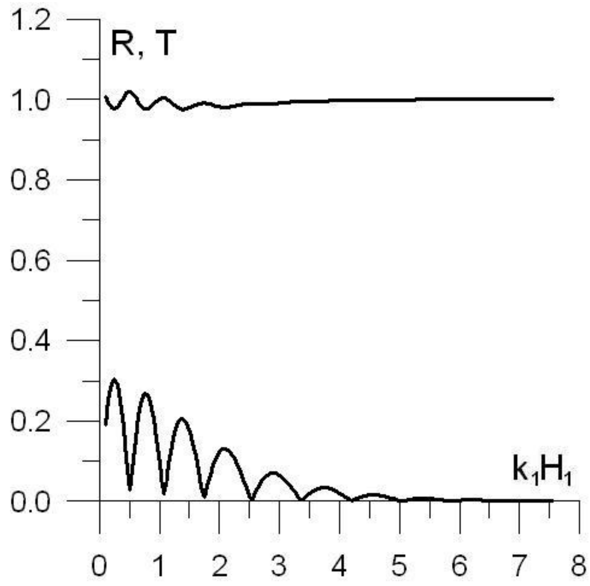

Рис. 3.11. Коефіцієнти R і T при $H_2 = 0.5$, $H_3 = 0.9$, $b = 2.0$.

На рис. 3.9-3.11 представлені такі графіки для випадку, коли глибина рідини за перешкодою $H_3 = 0.9$, тобто відмінності від симетричного випадку невеликі. Порівняння з графіками, які відповідають симетричному випадку при тій же глибині рідини над перешкодою, тобто $H_2 = 0.5$ (див. Рис.3.6-3.8) показує, що осцилюючий характер змін коефіцієнта відбиття в залежності від $k_1 H_1$ залишається і в несиметричному випадку. Однак, є принципова відмінність, яка полягає в тому, що немає повного гасіння відбитої хвилі для відносно великих довжин хвиль. Іншими словами, локальні мінімуми коефіцієнта відбиття не рівні нулю, по крайній мірі, до величин $k_1 H_1 \approx 2.0$, причому зі зростанням довжини перешкоди ці відмінності стають більш вираженими. Для малих довжин хвиль, коли вплив перешкоди стає малим, ці відмінності нівелюються.

Збільшення глибини рідини за перешкодою призводить до того, що вплив асиметрії зростає. На рис. 3.12-3.14 представлені результати розрахунків згаданих коефіцієнтів для випадку, коли , а глибина рідини над перешкодою залишається тією ж самою, $H_2 = 0.5$.

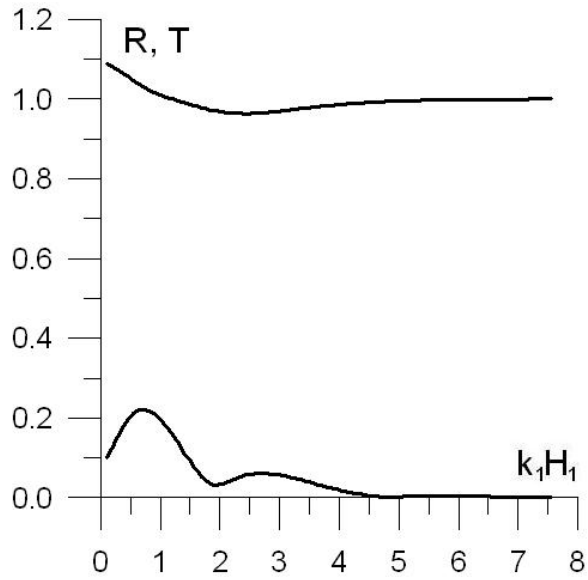

Рис. 3.12. Коефіцієнти R і T при $H_2 = 0.5, H_3 = 0.7$ і $b = 0.5$.

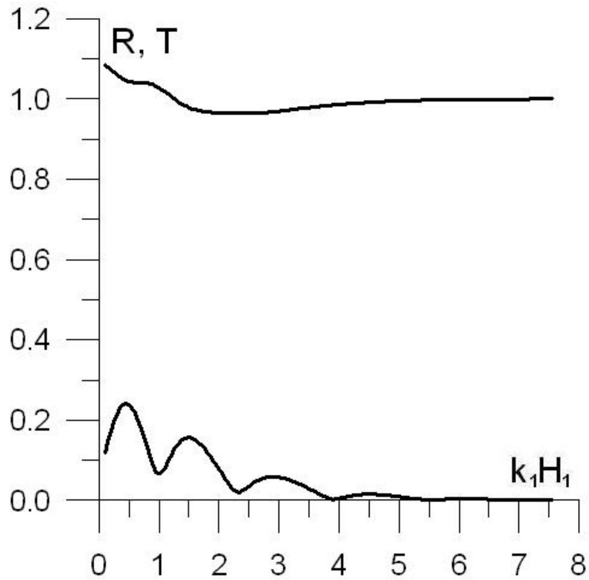

Рис. 3.13. Коефіцієнти R і T при $H_2 = 0.5, H_3 = 0.7$ і $b = 1.0$.

З рисунків видно, що для більш вираженої асиметрії (глибина рідини за перешкодою зменшилася від величини 0.9 до 0.7) викликає помітні відмінності локальних мінімумів в розподілі коефіцієнта відбиття від нуля, причому це спостерігається до величин $k_1 H_1 \approx 4.0$, тобто ці відмінності спостерігаються і в більш високочастотній області в порівнянні з випадком, коли глибина рідини за перешкодою ($H_3 = 0.9$) була близька до відповідної глибини до перешкоди ($H_1 = 1.0$).

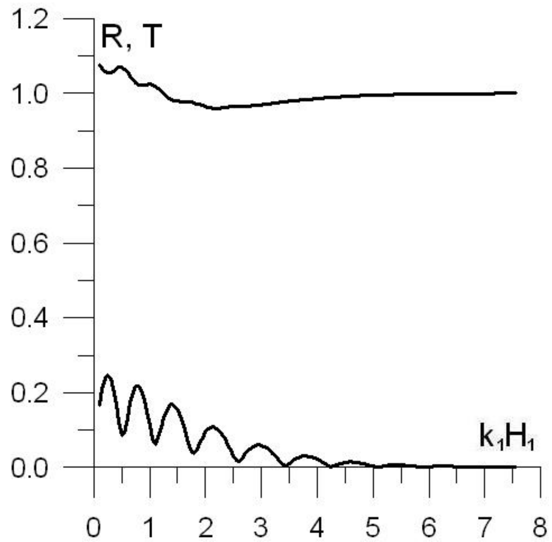

Рис. 3.14. Коефіцієнти R і T при $H_2 = 0.5$, $H_3 = 0.7$ і $b = 2.0$.

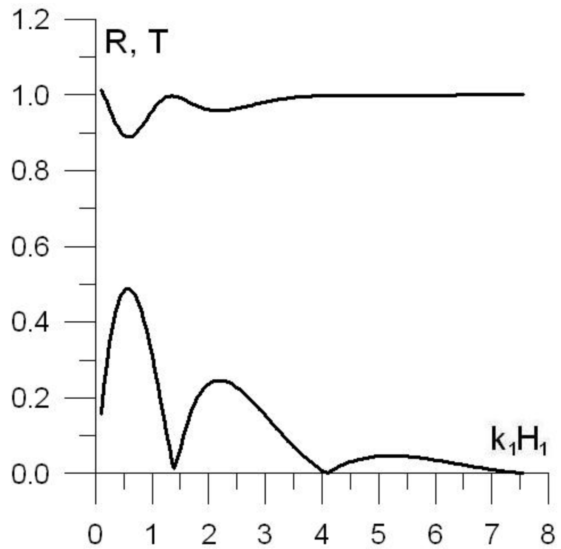

Рис. 3.15. Коефіцієнти R і T при $H_2 = 0.3$, $H_3 = 0.9$ і $b = 0.5$.

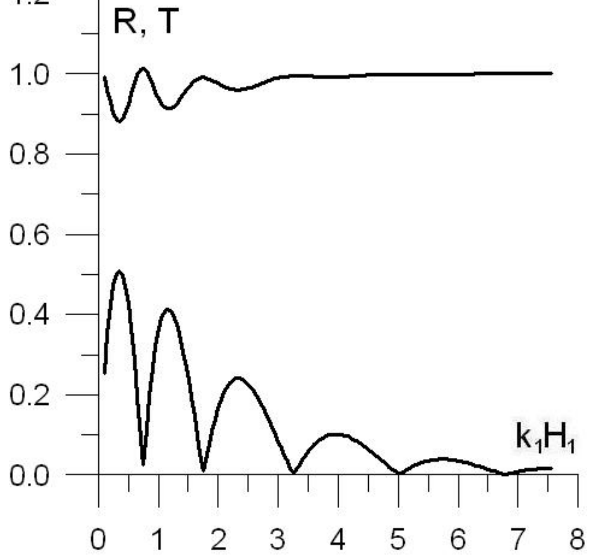

Рис. 3.16. Коефіцієнти R і T при $H_2 = 0.3, H_3 = 0.9$ і $b = 1.0$.

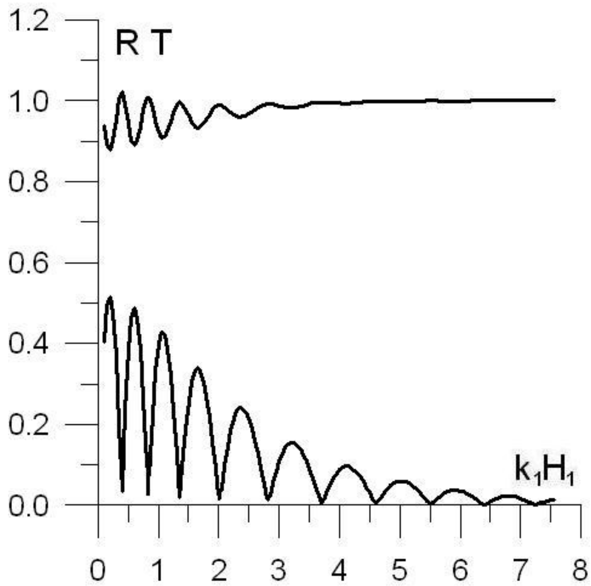

Рис. 3.17. Коефіцієнти R і T при $H_2 = 0.3, H_3 = 0.9$ і $b = 2.0$.

Були також проведені розрахунки коефіцієнтів відбиття і проходження поверхневої хвилі для більш високої перешкоди (висота рідини над нею становила $H_2 = 0.3$). Зауважимо, що відносна роль глибини рідини ($H_3 = 0.9$) за перешкодою в даному випадку, коли висота перешкоди помітно зросла в порівнянні з попереднім випадком ($H_2 = 0.5$), здавалося б, повинна нівелюватися. Однак, для довгих хвиль відмінність локальних мінімумів коефіцієнта R від нуля продовжує спостерігатися, хоча і є дуже незначною, особливо для більш короткої перешкоди. Це видно з рисунків 3.15-3.17, які відповідають таким довжинам перешкоди: $b = 0.5;1.0;\ 2.0$, глибина рідини за перешкодою становила $H_3 = 0.9$. Проте, згадана відмінність від нуля добре спостерігається. Цікаво порівняти наведені результати з даними, представленими на рис. 3.3-3.5, які відповідають симетричному випадку ($H_3 = H_1 = 1.0, H_2 = 0.3$) і на рис. 3.9-3.11, на яких представлені результати розрахунків несиметричного випадку ($H_1 = 1.0, H_2 = 0.5, H_3 = 0.9$).

Порівняння показує, що навіть невелика асиметрія розташування перешкоди призводить до відмінності мінімумів коефіцієнта R від нуля.

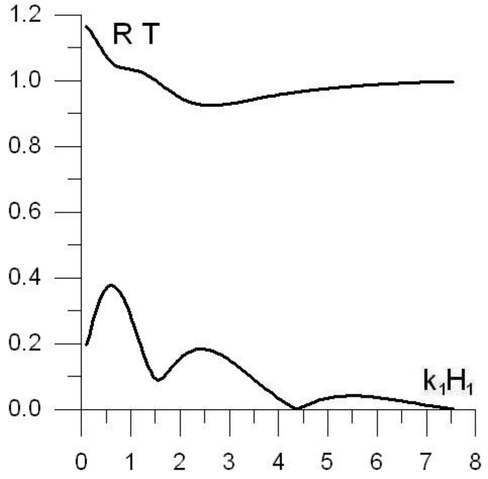

Рис. 3.18. Коефіцієнти R і T при $H_2 = 0.3, H_3 = 0.5$ і $b = 0.5$.

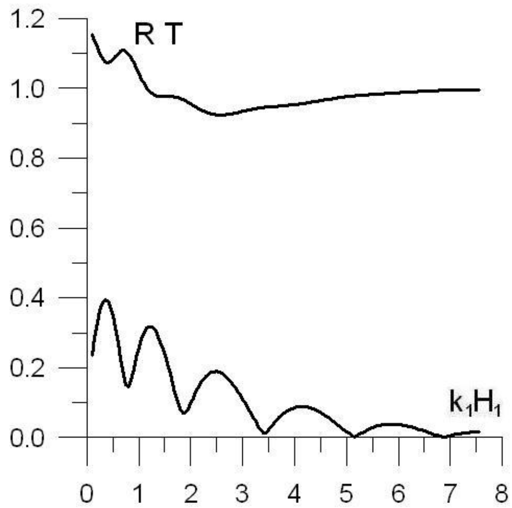

Рис. 3.19. Коефіцієнти R і T при $H_2 = 0.3, H_3 = 0.5$ і $b = 1.0$.

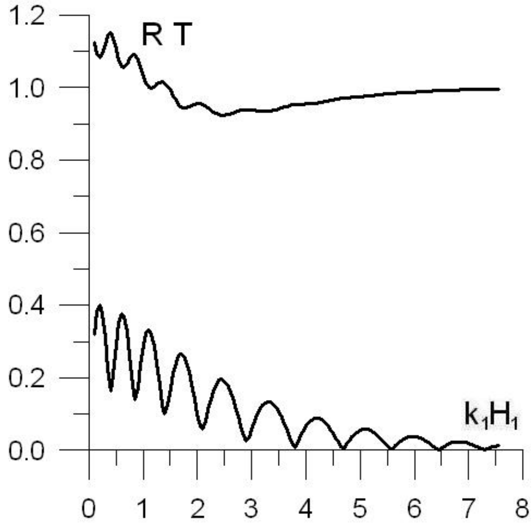

Рис. 3.20. Коефіцієнти R і T при $H_2 = 0.3, H_3 = 0.5$ і $b = 2.0$.

Зменшення глибини за перешкодою призводить до того, що відмінність локальних мінімумів від нуля стає істотною. На рис.3.18-3.20 представлені результати розрахунків згаданих коефіцієнтів у разі, коли $H_2 = 0.3$, а глибина рідини за перешкодою істотно більша, ніж в попередньому випадку, $H_3 = 0.5$. Видно, що зростання глибини рідини за перешкодою призводить до істотного збільшення значень локальних мінімумів коефіцієнта R.

Аналогічні висновки випливають з аналізу результатів розрахунків модулів коефіцієнтів R і T в разі інших глибин рідини над перешкодою, зокрема, $H_2 = 0.5$, $H_3 = 0.7$.

Аналіз рис. 3.15-3.17 і рис. 3.18-3.20 наочно підтверджує зроблений вище висновок про вплив зменшення глибини рідини за перешкодою на коефіцієнти відбиття, а значить і проходження. Дійсно, для випадку $H_2 = 0.3$ у довгохвильовій частині відмінності мінімальних значень коефіцієнта можна порівняти з максимальними значеннями. Так для $b = 2.0$ перший мінімум досягає значень рівних приблизно 0.16 (див. рис. 3.20), в той час як перший максимум ≈ 0.4. І тут вже говорити про рівність нулю, як в симетричному випадку, не доводиться.

У той же час кількість мінімумів, наприклад, до значень $k_1 H_1 \approx 7.0$ при $b = 2.0$ і $H_2 = 0.3$ залишається однаковим в симетричному (рис. 3.5) і несиметричному (рис. 3.20) випадках.

У роботі [96], в якій в наближенні довгих хвиль розглянуто розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль на перешкоді при наявності прилеглих до нього заглиблень, зроблені подібні висновки про роль несиметричності перешкоди на поведінку коефіцієнта відбиття. Автори показали, що в симетричному випадку, коли зазначені поглиблення однакові, то коефіцієнт досягає нульових значень, і його величина відмінна від нуля при наявності несиметричних схилів в поглибленнях. Слід також згадати роботу [26], в якій вивчено поширення поверхневих хвиль над підводною траншеєю. Показано, що коефіцієнт відбиття носить осцилюючий характер, і локальні мінімуми дорівнюють нулю для прямокутної траншеї. У разі, коли схили траншеї мають різні форми, то локальні мінімуми цього коефіцієнта відмінні від нуля.

3.5. Плоско-хвильове наближення

Розв'язання даної задачі полягало в тому числі, у виконанні умов спряження, для чого необхідно враховувати існування неоднорідних хвиль. Якщо нехтувати цими хвилями, то хвильове поле поблизу розглянутих вище вертикальних границь буде визначатися з помилкою, зокрема, величини відхилень вільної поверхні будуть відрізнятися по різні боки від границі. З цієї точки зору важливо оцінити відстань по горизонталі від місця формування неоднорідних хвиль, на якому вплив цих хвиль дуже малий в порівнянні зі станом $x = 0$. У ряді випадків, наприклад, з метою знаходження аналітичних залежностей для коефіцієнтів відбиття і проходження зазначеними модами нехтують. Це так зване плоско-хвильове наближення ("plane-wave approximation") [69]. Для знаходження зазначеної вище відстані слід оцінити внесок від найнижчої моди ($n = 1$), оскільки вона затухає повільніше від всіх інших, $\alpha_1 < \alpha_m, m = 2,3,\ldots$. Як показує аналіз розподілу коренів рівняння (3.6), величина $\alpha_n H$ знаходиться в межах $(n - 1/2)\pi < \alpha_n H < n\pi$ [56]. Тоді для $n = 1$ як найменшого значення величини $\alpha_n H$ можна прийняти $\pi/2$. Вираз для потенціалу $\Phi \propto \exp(-\alpha_n X)$ або $\Phi \propto \exp(-\pi X/2H)$. Звідси випливає, для оцінки внеску у хвильове поле від неоднорідних мод величиною 1%, відстань X повинна бути [42]. Для альтернативної оцінки затухання неоднорідних мод припускаємо, що їх вклад являється суттєвим на відстані $X \propto 1/\alpha_2$ [42] $X \geq 3H$. Для альтернативної оцінки згасання неоднорідних мод вважаємо, що їх внесок є істотним на відстані $X \propto 1/\alpha_2$ [42]. Тоді отримуємо $\Phi \propto \exp(-\alpha_n X) = \exp(-1)$, тобто оцінка в чотири рази більша, ніж в попередньому випадку, коли $\pi X/2H \approx 4.6$ і вважалося, що внесок на відстані X не більше 1%. Таким чином, вплив неоднорідних хвиль сягає на досить велику відстань.

Розглянемо як приклад випадок, коли $H_1 = 3\,\text{м}$, $H_2 = 1\text{м}$, $2b = 3\,\text{м}$. Тоді внесок неоднорідних хвиль в хвильове поле над перешкодою досягне рівня 1% в порівнянні з їх впливом на границі розділу на відстані 3 м, тобто їх вплив пошириться на всю область над перешкодою.

У разі довгої перешкоди впливом неоднорідних мод можна знехтувати при вивченні хвильового поля над перешкодою за винятком областей, що примикають до границь. Зупинимося на зазначеному наближенні стосовно аналізованої задачі. Потенціали швидкостей в областях 1-3, виходячи з виразів (3.7) - (3.9), можна представити у вигляді

$$\Phi_1 = \left(e^{i k_1 (x+b)} + \mathrm{R} e^{-i k_1 (x+b)}\right)\varphi_0(z),$$

$$\Phi_2 = \left(B_0 \cos k_2 x + C_0 \sin k_2 x\right)\psi_0(z),$$

$$\Phi_3 = T e^{i k_3 (x-b)} f_0(z).$$

Для знаходження коефіцієнтів відбиття і проходження задовольняємо умовам спряження (3.10) - (3.13). Розглянемо випадок, коли глибини до і за перешкодою рівні один одному, тобто $H_1 = H_3$. В результаті отримуємо функціональні рівняння, алгебраїзацію яких здійснюємо шляхом множення на власні функції і інтегруючи по відповідному інтервалу. В результаті отримуємо наступну систему алгебраїчних рівняння

$$i k_1 (1 - R)\frac{1}{\mathrm{N}_0 \operatorname{ch} k_1 H_1} = k_2 (B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b)\frac{P_1}{\operatorname{ch} k_2 H_2},$$

$$(1 + R)\frac{P_1}{\operatorname{ch} k_1 H_1} = (B_0 \cos k_2 b + C_0 \sin k_2 b)\frac{1}{\mathrm{M}_0 \operatorname{ch} k_2 H_2},$$

$$i k_1 T \frac{1}{\mathrm{N}_0 \operatorname{ch} k_1 H_1} = k_2 (-B_0 \sin k_2 b + C_0 \cos k_2 b)\frac{P_1}{\operatorname{ch} k_2 H_2},$$

$$T \frac{P_1}{\operatorname{ch} k_1 H_1} = (B_0 \cos k_2 b + C_0 \sin k_2 b)\frac{1}{\mathrm{M}_0 \operatorname{ch} k_2 H_2},$$

де

$$P_1 = \frac{\operatorname{sh}(k_1 H_1 + k_2 H_2)}{2(k_1 + k_2)} + \frac{\operatorname{sh}(k_1 H_1 - k_2 H_2)}{2(k_1 - k_2)} - \frac{k_1}{k_1^2 - k_2^2}\operatorname{sh}(k_1 H_1 - k_1 H_2),$$

$$N_0 = \frac{4k_1}{\operatorname{sh} 2k_1 H_1 + 2k_1 H_1},\ M_0 = \frac{4k_2}{\operatorname{sh} 2k_2 H_2 + 2k_2 H_2}.$$

Введемо позначення $q = -ik_2 / k_1$, $\Lambda = P_1^2 N_0 M_0$. Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо такі вирази для коефіцієнтів відбиття і проходження

$$R = \frac{\tan k_2 b\,(1 + \Lambda^2 q^2)}{(\tan k_2 b - q\Lambda)(1 + q\Lambda \tan k_2 b)},\ \ T = \frac{q\Lambda\,(1 + \tan^2 k_2 b)}{(q\Lambda - \tan k_2 b)(1 + q\Lambda \tan k_2 b)}.$$

З цих виразів випливає, що коефіцієнт відбиття наближається до нуля при $\tan k_2 b = 0$ або $2b = n\lambda_2$, тобто на довжині перешкоди має укладатися парне число півхвиль. Інша особлива точка в вищенаведених рівняннях - $\tan k_2 b = \infty$. Робимо заміну $\tan k_2 b = 1/\cot k_2 b$ і знаходимо

$$R = \frac{\cot k_2 b\,(1 + \Lambda^2 q^2)}{(1 - q\Lambda \cot k_2 b)(q\Lambda + \cot k_2 b)}.$$

Видно, що коефіцієнт наближається до нуля при $\cot k_2 b = 0$, тобто $2b = (n + 1/2)\lambda_2$. Іншими словами, R дорівнює нулю, якщо на відстані $2b$ укладається непарне число півхвиль. Об'єднуючи з вищенаведеними міркуваннями, можна сказати, що коефіцієнт відбиття наближається до нуля, якщо на довжині перешкоди укладається ціле число півхвиль. Цей висновок узгоджується з результатами, наведеними у монографії [69], отриманими дещо іншим способом.

3.6. Висновки до розділу 3

У розділі розглянуто задачу про розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль на прямокутній зануреній перешкоді. Розглянуто випадок нормального падіння. Для розв'язання задачі використано метод розкладання розв'язку в ряд по власних функціях задачі з наступним виконанням умов спряження. Для розв'язання одержуваної в результаті системи рівнянь використовується покращений метод редукції, в якому коефіцієнти розкладання високого порядку враховуються асимптотично.

Проведено розрахунки коефіцієнтів відбиття і проходження поверхневої хвилі для симетричного і несиметричного випадку. Показано, що для симетричного випадку коефіцієнт відбиття наближається до нуля для певних значень хвильового числа падаючої хвилі. Виявлено, що зміна висоти симетричної перешкоди призводить до зсуву значень хвильових чисел, при яких спостерігається нульове відбиття хвилі. Це пов'язано зі зміною швидкості хвилі, яка поширюється над перешкодою в прямому і зворотному напрямках, і відповідною зміною умов її інтерференції з відбитою від перешкоди хвилі. Порівняння результатів з відомими даними при однакових параметрах задачі показало їх відповідність.

Проведено систематичні розрахунки коефіцієнтів відбиття і проходження для симетричного випадку. Показано, що відсутність симетрії розташування перешкоди, зокрема, нерівності глибин рідини до і після перешкоди, призводить до того, що характер поведінки коефіцієнта відбиття залишається осцилюючим, як і в симетричному випадку, однак його значення в точках локального мінімуму відмінні від нуля. Ця відмінність стає істотним зі зростанням висоти перешкоди і зростанням глибини рідини за перешкодою.

Для симетричного випадку в рамках плоско-хвильового наближення ("plane-wave approximation") знайдено аналітичні залежності для коефіцієнтів відбиття і проходження. Знайдено умови нульового відбиття хвиль від перешкоди. Показано, що вони відповідають відомим залежностям, отриманими іншими підходами.

РОЗДІЛ 4

РОЗСІЮВАННЯ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ ТОНКИМ ВЕРТИКАЛЬНИМ БАР'ЄРОМ

4.1. Вступ.

Для захисту берегів і гідротехнічних конструкцій від руйнівного впливу хвиль, як правило, використовують різного виду хвилерізи. Одними з найпростіших, але часто застосовуваних хвилеломів через простоту і низьку вартість, є конструкції, що представляють занурений в рідину непроникний бар'єр. Хвилі відбиваються від нього або руйнуються, що призводить до збільшення дисипації хвильової енергії, а, отже, до зменшення ступеня впливу хвиль на береги та гідротехнічні конструкції. Залежно від умов застосовують також частково занурені в воду бар'єри і бар'єри з проміжним зазором, зокрема, всередині гаваней для зменшення висоти хвиль до необхідного рівня [54].

Особливістю розглянутих конструкцій хвилеломів є наявність гострої кромки на вершині бар'єру. Це призводить до появи кореневої сингулярності в виразі для швидкості потоку [12, 16], що й обумовлює необхідність, як показано у попередніх розділах, збільшення розмірності системи алгебраїчних рівнянь, до якої зводиться задача про трансформацію поверхневих хвиль на перешкоді при використанні методу нормальних мод, тобто врахування мод вищого порядку. Для ряду задач розсіювання хвиль тонкими вертикальними бар'єрами в роботі [78] пропонується використовувати в якості базисних функцій поліноми Чебишева для отримання прийнятних чисельних результатів з помірно великою кількістю рівнянь, однак це вимагає проводити перевірку чисельних результатів щодо виконання граничних умов, чого в цій роботі не зроблено.

В даному розділі розглядається задача розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль одиничним вертикальним тонким бар'єром у разі нормального падіння із врахуванням виділення зазначеної вище особливості шляхом її виділення. На основі розкладання цієї особливості в ряд по власних функціях задачі знаходиться асимптотика невідомих коефіцієнтів розкладання для великих значень N. Це дозволило поліпшити якість розв'язання при використанні меншої кількості рівнянь. Проведено порівняння застосованого методу поліпшеної редукції в порівнянні зі звичайною редукцією. Здійснено перевірку точності виконання граничних умов і умов спряження. Показано переваги методу в порівнянні з методом звичайної редукції.

4.2. Постановка задачі

Розглянемо тонкий, занурений в рідину бар'єр, паралельний вісі z. На бар'єр падає монохроматична хвиля з частотою ω_{dim}, що поширюється уздовж горизонтальної осі x з $x=-\infty$. Бар'єр висотою h_1 знаходиться на дні потоку глибиною H. Розташування бар'єру і системи координат з початком відліку на вільній поверхні представлено на рис. 1. Позначимо область, займану бар'єром $-H<z<-h_1$, через L_b та область над бар'єром $-h_1<z<0$ через L_g.

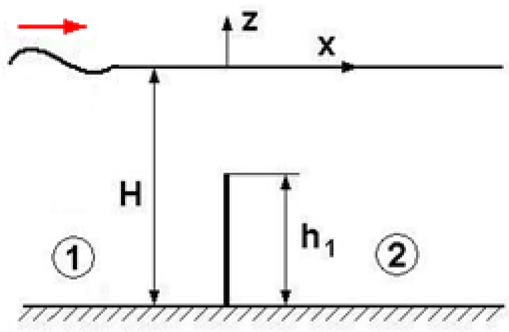

Рис.4.1. Схема розташування бар'єру і системи координат

Запишемо безрозмірний вираз для потенціалу швидкості в рідині глибини H в наступному вигляді (див. (2.6))

$$\Phi = \varphi\,(z) e^{i(kx-\omega t)} = \frac{a}{\omega}\frac{\cosh k\,(z+H)}{\cosh k\,h} e^{i(kx-\omega t)} . \tag{4.1}$$

Тут a - амплітуда падаючої хвилі, і в якості характерних масштабів задачі маємо: довжини $L_{ch} = H$, часу $T_{ch} = \sqrt{H/g}$.

Дисперсійне рівняння має вигляд (див. (2.7))

$$\omega^2 = k\,H \tanh k\,H\,. \tag{4.2}$$

Для зручності величина H залишена в попередньому вигляді, проте її значення дорівнює одиниці.

Введемо норму функції $\|\varphi\| = \int\limits_{-H}^{0} \varphi\,\varphi^* \,d\,z$. Тоді її нормований вид буде описуватися виразом

$$\varphi_0\,(z) = \sqrt{N} \cosh k\,(z+H)\,, \tag{4.3}$$

де

$$N = \frac{4k}{\sinh 2kH + 2kH}\,.$$

Хвильове число k є дійсним додатним коренем дисперсійного рівняння (4.2). Це рівняння має також безліч чисто уявних коренів κ_n, які знаходяться як розв'язок наступного рівняння:

$$\omega^2 = -\kappa_n\,H \tan \kappa_n\,H\,. \tag{4.4}$$

Корені рівняння (4.4) характеризують неоднорідні хвилі (що не поширюються), які генеруються по обидві сторони бар'єру. Їм відповідають такі нормовані ортогональні власні функції:

$$\varphi_n = \sqrt{M_n} \cos \kappa_n\,(z+H), \tag{4.5}$$

де

$$M_n = \frac{4\kappa_n}{\sin 2\kappa_n H + 2\kappa_n H}\,. \tag{4.6}$$

Енергія, пов'язана з падаючою хвилею, яка зіштовхується з хвильовим бар'єром, частково переноситься за бар'єр і частково відбивається. Розбиваємо всю область, що розглядається на дві: перша область до бар’єру

$(x<0)$ і друга – після бар'єру $(x>0)$. Результуючий хвильовий рух в області 1 (див. Рис. 4.1) складається з падаючої і відбитої хвиль, в той час як в області 2 формується хвиля, що пройшла. Загальний розв'язок задачі для потенціалу швидкості в області 1 ($x<0$) можна записати у вигляді

$$\Phi_1 = \left(e^{ikx} + Re^{-ikx}\right)\varphi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\kappa_n x} \varphi_n(z) \tag{4.7}$$

і в області 2 ($x>0$)

$$\Phi_2 = T e^{ikx} \varphi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\kappa_n x} \varphi_n(z). \tag{4.8}$$

Тут вважається, що амплітуда падаючої хвилі дорівнює 1; R і T - комплекснозначні коефіцієнти відбиття і проходження відповідно.

Потенціали Φ_1 і Φ_2 повинні задовольняти ряду умов спряження при $x=0$. Розглянемо їх послідовно. Горизонтальна швидкість потоку, нормальна до бар'єру, повинна дорівнювати нулю:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при } z \in L_b, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0 \quad \text{при } z \in L_b. \tag{4.10}$$

Горизонтальні компоненти швидкості над бар'єром рівні між собою, тобто

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \quad \text{при} \quad z \in L_g. \tag{4.11}$$

Неперервність тиску (що еквівалентно потенціалу) над бар'єром призводить до наступної умови:

$$\Phi_1 = \Phi_2 \qquad \text{при } z \in L_g. \tag{4.12}$$

4.3. Метод розв'язання

Умови (4.9) і (4.11) можуть бути представлені як змішана гранична умова [34, 86], яка встановлює зв'язок потенціалів або швидкостей уздовж вісі z. Ця умова може бути представлена у вигляді

$$G_1(z)=\begin{cases}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}=0 \;\text{ при }\; z\in L_b,\\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}=\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} \;\text{ при }\; z\in L_g.\end{cases} \tag{4.13}$$

Аналогічним чином поступаємо і з умовами (4.10) і (4.12), об'єднуючи які, запишемо змішану граничну умову:

$$G_2(z)=\begin{cases}\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}=0 \;\text{ при }\; z\in L_b,\\ \Phi_1=\Phi_2 \;\text{ при }\; z\in L_g.\end{cases} \tag{4.14}$$

Підставляючи в ці умови вирази для потенціалів (4.7) і (4.8), отримуємо систему нескінченних функціональних рівнянь, помножуючи які на власні функції задачі $\varphi_0(z)$ і $\varphi_n(z)$ і, використовуючи властивість ортогональності, здійснюємо так звану алгебраїзацію системи, в результаті чого знаходимо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь, яка , як правило, вирішуються методом редукції.

На відміну від традиційного способу редукції, в роботі пропонується застосувати метод поліпшеної редукції, який полягає у використанні асимптотичних залежностей для комплекснозначних коефіцієнтів розкладу A_n і B_n для великих значень n. Ці асимптотичні залежності знаходяться на основі розгляду конкретного виду сингулярності, що виникає в задачі. Для розглянутого типу задач характерне існування локальних особливостей по швидкостях. Прагнення до нескінченності швидкості рідкої частинки в околі вершини бар'єру в рамках моделі ідеальної рідини ставить питання про достовірність отриманого розв'язання. У зв'язку з цим відзначимо, що виникнення локальних особливостей слід розглядати як "розплату" за занадто грубе моделювання реального процесу.

При існуванні локальних особливостей в характеристиках хвильових полів, як правило, виникає неоднозначність в розв'язанні граничної задачі. При цьому можлива побудова декількох розв'язків, які відповідають основним рівнянням задачі і відрізняються тільки швидкістю прагнення до нескінченності тієї чи іншої характеристики поля. Тоді для побудови єдиного розв'язання необхідно визначити характер особливості. Як показано в роботі [9], вираз для швидкості в околі вершини бар'єру пропорційний $r^{-1/2}$. Тут r - радіальна координата локальної полярної системи координат з початком в вершині бар'єру (див. Розділ 1).

У площині спряження $x=0$ вираз для горизонтальної компоненти швидкості в області 1, як випливає з (4.7), має вигляд (множник $e^{-i\omega t}$ опускаємо)

$$U_1\Big|_{x=0} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = ik(1-R)\varphi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n A_n \varphi_n(z). \qquad (4.15)$$

Введемо в розгляд функцію, яка відображає особливість розподілу швидкості в околі вершини бар'єру:

$$F_1(z) = \begin{cases} \dfrac{V_1}{\left(\tilde{h}_1^2 - z^2\right)^{1/2}} & \text{при} \quad z \in L_g, \\ 0 & \text{при} \quad z \in L_b, \end{cases} \qquad (4.16)$$

де V_1 - деяка невідома, що підлягає визначенню; $\tilde{h}_1 = H - h_1$. Розкладаємо цю функцію в ряд по власних функціях:

$$F_1(z) = V_1 C_0 \varphi_0(z) + V_1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(z). \qquad (4.17)$$

Додаючи і віднімаючи функцію $F_1(z)$ з рівняння (4.15), після ряду перетворень з використанням розкладання (4.17) знаходимо:

$$U_1\Big|_{x=0} = ik(1-R)\varphi_0(z) + \sum_{n=1}^{N} \kappa_n A_n \varphi_n(z) + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \varphi_n(z). \qquad (4.18)$$

Тут було зроблене припущення, що при досить великих значеннях (більших деякого N) характер невідомих коефіцієнтів розкладань A_n визначається поведінкою швидкості поблизу ребра. При досить великому N можна записати

$$\kappa_n A_n \cong V_1 C_n \quad \text{при} \quad n > N. \qquad (4.19)$$

Повертаючись до виразу (4.16), множимо його на власні функції $\varphi_n(z)$ і інтегруємо по інтервалу від $-H$ до 0:

$$\int_{-H}^{0} F_1(z)\varphi_n(z)\,dz = V_1\sqrt{M_n}\left[\cos\kappa_n H \int_{-\tilde{h}_1}^{0} \frac{\cos\kappa_n z\,dz}{\left(\tilde{h}_1^2 - z^2\right)^{1/2}} - \sin\kappa_n H \int_{-\tilde{h}_1}^{0} \frac{\sin\kappa_n z\,dz}{\left(\tilde{h}_1^2 - z^2\right)^{1/2}}\right].$$

З використанням табличного інтегралу [19]

$$\int_0^a \left(a^2 - t^2\right)^{\beta-1} \begin{Bmatrix} \sin bt \\ \cos bt \end{Bmatrix} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2a}{b}\right)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) \begin{Bmatrix} \mathrm{H}_{\beta-1/2}(ab) \\ J_{\beta-1/2}(ab) \end{Bmatrix},$$

де $\Gamma(\beta), \mathrm{H}_{\beta\text{-}1/2}(ab), J_{\beta-1/2}(ab)$ - гамма-функція, функції Струве і Бесселя першого роду, відповідно, знаходимо

$$\int_{-H}^{0} F_1(z)\varphi_n(z)\,dz = V_1\sqrt{M_n}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\times\left[\cos\kappa_n H\, J_0(\kappa_n \tilde{h}_1) + \sin\kappa_n H\, \mathrm{H}_0(\kappa_n \tilde{h}_1)\right].$$

У той же час, помноживши вираз (4.17) на власні функції $\varphi_m(z)$ і інтегруючи по інтервалу від $-H$ до 0, отримуємо з урахуванням властивості ортогональності функцій

$$\int_{-H}^{0} F_1(z)\varphi_m(z)\,dz = V_1\int_{-H}^{0} C_0\,\varphi_0(z)\varphi_m(z)\,dz + V_1\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_{-H}^{0}\varphi_n(z)\varphi_m(z)\,dz = V_1\,C_m.$$

В результаті, використовуючи асимптотики для функцій Струве і Бесселя для великих значень κ_n, отримуємо такий вираз для коефіцієнтів C_n для великих значень n:

$$C_n = \sqrt{M_n}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\Pi_1\cos\kappa_n H + \Pi_2 \sin\kappa_n H\right), \qquad (4.20)$$

де

$$\Pi_1 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa_n \tilde{h}_1}}\left[\cos\left(\kappa_n \tilde{h}_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8\kappa_n \tilde{h}}\sin\left(\kappa_n \tilde{h}_1 - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$\Pi_2 \approx \frac{2}{\pi\kappa_n \tilde{h}_1} + \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa_n \tilde{h}_1}}\left[\sin\left(\kappa_n \tilde{h}_1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{8\kappa_n \tilde{h}}\cos\left(\kappa_n \tilde{h}_1 - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Аналогічним чином поступаємо і з виразом для горизонтальної компоненти швидкості в області 2. Введемо в розклад функцію

$$F_2(z) = \begin{cases} \dfrac{V_2}{\left(\tilde{h}_1^2 - z^2\right)^{1/2}} & \text{при } z \in L_g, \\ 0 & \text{при } z \in L_b, \end{cases} \tag{4.21}$$

яку розкладаємо в ряд по власних функціях $\varphi_n(z)$:

$$F_2(z) = V_2 E_0 \varphi_0(z) + V_2 \sum_{n=1}^{\infty} E_n \varphi_n(z).$$

Тут, як і у виразі (4.16), постійна V_2 є невідомою.

Вираз для горизонтальної компоненти швидкості в області 2 з урахуванням вище викладеного, ґрунтуючись на виразі для потенціалу швидкості (4.8), можна записати у вигляді

$$U_2\Big|_{x=0} = ikT\varphi_0(z) - \sum_{n=1}^{N} \kappa_n B_n \varphi_n(z) - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n \varphi_n(z). \tag{4.22}$$

Помноживши функцію (4.21) на власні функції $\varphi_n(z)$ і інтегруючи від $-H$ до 0, знаходимо аналогічно вираз для коефіцієнтів розкладу E_n для великих значень n, яке збігається з виразом (4.20).

Таким чином, задача зводиться до визначення коефіцієнтів A_n і B_n, які знаходяться з умов (4.13) і (4.14) з урахуванням асимптотичних зображень невідомих коефіцієнтів розкладання, тобто з урахуванням виразу (4.20). У підсумку, вираз (4.13) набуде вигляду

$$G_1(z) = \begin{cases} ik(1-R)\varphi_0(z) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \kappa_n A_n \varphi_n(z) + V_1 \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} C_n \varphi_n(z) = 0 \quad \text{при } \mathrm{z} \in L_b, \\ -ik(1-R)\varphi_0(z) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \kappa_n A_n \varphi_n(z) + V_1 \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} C_n \varphi_n(z) - ikT\varphi_0(z) + \\ + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \kappa_n B_n \varphi_n(z) + V_2 \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} C_n \varphi_n(z) = 0 \quad \text{при } z \in L_g \end{cases}$$

і вираз (4.14) перетворюється до такого

$$G_2(z)=\begin{cases} i\,kT\varphi_0(z)-\sum\limits_{n=1}^{N}\kappa_n B_n\,\varphi_n(z)-V_2\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}E_n\,\varphi_n(z)=0 \quad \text{при} \quad \mathrm{z}\in L_b, \\ (1+R-T)\varphi_0(z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\,\varphi_n(z)+V_1\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\dfrac{C_n}{\kappa_n}\varphi_n(z)-\sum\limits_{n=1}^{N}B_n\,\varphi_n(z)- \\ -V_2\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\dfrac{E_n}{\kappa_n}\varphi_n(z)=0 \qquad\qquad \text{при} \;\; z\in L_g \end{cases}$$

Подальша процедура розрахунків проводиться таким чином. Множимо отримані вирази послідовно на власні функції $\varphi_0(z)$ і $\varphi_m(z)$, а потім інтегруємо по повному проміжку від $-H$ до 0. Розраховуючи одержувані інтеграли з урахуванням умови ортогональності власних функцій, приходимо до системи $2N+2$ рівнянь з $2N+2$ невідомими, але також з поки невизначеними постійними V_1 і V_2:

$$\begin{gathered} ik(1-R)-ikT\cdot I_{00}+\sum_{n=1}^{N}\kappa_n B_n\cdot I_{n0}+V_2\sum_{n=N+1}^{\infty}E_n\,I_{n0}=0, \\ \kappa_m A_m-ikT\cdot I_{0m}+\sum_{n=1}^{N}\kappa_n B_n\cdot I_{nm}+V_2\sum_{n=N+1}^{\infty}E_n\,I_{nm}=0, \\ ikT\cdot P_{00}-\sum_{n=1}^{N}\kappa_n B_n\cdot P_{n0}-V_2\sum_{n=N+1}^{\infty}E_n\,P_{n0}+\sum_{n=1}^{N}A_n Q_{n0}+(1+R-T)Q_{00}+ \\ +V_1\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{C_n}{\kappa_n}Q_{n0}-\sum_{n=1}^{N}B_n\,Q_{n0}-V_2\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{E_n}{\kappa_n}Q_{n0}=0, \\ ikT\cdot P_{0m}-\sum_{n=1}^{N}\kappa_n B_n\cdot P_{nm}-V_2\sum_{n=N+1}^{\infty}E_n\,P_{nm}+(1+R-T)\,Q_{0m}+\sum_{n=1}^{N}A_n\,Q_{nm}+ \\ +V_1\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{C_n}{\kappa_n}Q_{nm}-\sum_{n=1}^{N}B_n\,Q_{nm}-V_2\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{E_n}{\kappa_n}Q_{nm}=0, \end{gathered} \tag{4.23}$$

де

$$I_{00}=Q_{00}=N\left(\frac{\widetilde{h}_1}{2}+\frac{\sinh 2kH}{4k}-\frac{\sinh 2k\,h_1}{4k}\right),$$

$$I_{n0}=I_{0n}=\sqrt{N}\sqrt{M_n}\left(\frac{k}{k^2+\kappa_n^2}\sinh kH\cos\kappa_n H+\frac{\kappa_n}{k^2+\kappa_n^2}\cosh kH\sin\kappa_n H-\right.$$

$$\left.-\frac{k}{k^2+\kappa_n^2}\sinh k\,h_1\cos\kappa_n h_1-\frac{\kappa_n}{k^2+\kappa_n^2}\cosh k\,h_1\sin\cos\kappa_n h_1\right)=Q_{n0}=Q_{0n},$$

$$I_{nm} = Q_{nm} = \sqrt{M_n}\sqrt{M_n}\left[\frac{\sin(\kappa_n - \kappa_m)H}{2(\kappa_n - \kappa_m)} + \frac{\sin(\kappa_n + \kappa_m)H}{2(\kappa_n + \kappa_m)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(\kappa_n - \kappa_m)h_1}{2(\kappa_n - \kappa_m)} - \frac{\sin(\kappa_n + \kappa_m)h_1}{2(\kappa_n + \kappa_m)}\right],$$

$$I_{nn} = N\left(\frac{\widetilde{h}_1}{2} + \frac{\sin 2\kappa_n H}{4\kappa_n} - \frac{\sin 2\kappa_n h_1}{4\kappa_n}\right),$$

$$P_{n0} = P_{0n} = \sqrt{N}\sqrt{M_n}\left(\frac{k}{k^2 + \kappa_n^2}\sinh k h_1 \cos\kappa_n h_1 + \frac{\kappa_n}{k^2 + \kappa_n^2}\cosh k h_1 \sin\kappa_n h_1\right),$$

$$P_{00} = N\left(\frac{h_1}{2} + \frac{\sinh 2k h_1}{4k}\right), \quad P_{nn} = M_n\left(\frac{h_1}{2} + \frac{1}{4\kappa_n}\sin 2\kappa_n h_1\right),$$

$$P_{nm} = \sqrt{N}\sqrt{M_n}\left[\frac{\sin(\kappa_n - \kappa_m)h_1}{2(\kappa_n - \kappa_m)} + \frac{\sin(\kappa_n + \kappa_m)h_1}{2(\kappa_n + \kappa_m)}\right].$$

Структура системи (4.23) вказує на важливу особливість алгебраїчних відносин, що випливають з умов спряження (4.13), (4.14) у площині $x = 0$. Отримана система є системою першого роду. Такі системи, як правило, погано обумовлені, що значно ускладнює їх чисельну реалізацію. Це пов'язано, у певній мірі, з наявністю у вершині бар'єру кореневої особливості за швидкостями [12, 85]. Як уже зазначалося, існування особливості по швидкостях може привести до того, що ряди для швидкостей на поверхні $x = 0$ сходяться повільно. Для отримання розв'язку, що адекватно описує розсіяне на бар'єрі поле, у роботі враховані асимптотичні властивості невідомих. Перехід до кінцевої системі виконаний з урахуванням асимптотичної поведінки невідомих A_n, B_n для $n > N$.

Подальша побудова алгоритму розв'язання системи пов'язана зі способом замикання системи. У роботі використаний підхід, заснований на завданні асимптотичних виразів для A_n і B_n для великих значень n. В цьому випадку V_1 і V_2 є невідомими, а коефіцієнти A_n для всіх $n > N$ задаються у асимптотичному вигляді (4.19). Аналогічним чином поступаємо з B_n і V_2.

Можливі інші способи замикання системи. При цьому, на основі чисельного експерименту було показано, що точність задоволення умов спряження у площині $x = 0$ дуже чутлива до вибору способу замикання системи. Виявилось, що можлива ситуація, коли точність задоволення умов спряження при використанні асимптотичних властивостей невідомих, які враховують характер локальної особливості по швидкостям у точці зміни типу граничних умов, може виявитися навіть гірше, ніж при використанні методу простої редукції.

4.4. Аналіз якості отриманого розв'язку

У попередньому розділі було розглянуто метод розв'язання граничної задачі. Метою подальшого викладення є аналіз особливостей чисельної реалізації та оцінка точності виконання граничних умов. В рамках використовуваного методу визначалися, через відомий характер особливості по швидкостях, асимптотичні властивості невідомих. Це дозволило враховувати велику кількість членів ряду в представленні для поля ($\Phi_{(1,2)}$) і його похідної ($U_{(1,2)}$), в той же час нескінченні системи алгебраїчних рівнянь замінялися кінцевими. При цьому виникають похибки, обумовлені як редукцією системи, так і вибором величини N, починаючи з якого переходимо до асимптотичних значень невідомих. У цій ситуації головним критерієм якості отриманого розв'язку є контроль точності виконання умов спряження (4.9) - (4.12). Відзначимо, що в розглянутому класі задач, як правило, точність виконання граничних умов на поверхнях $z = 0$, $z = -1$ не перевіряється, так як ці умови виконуються зі значно більшою точністю, ніж умови спряження. В якості додаткових критеріїв правильності отриманого розв'язку можна розглядати його збіжність при збільшенні порядку кінцевої системи рівнянь і виконання закону збереження енергії, який в даному випадку полягає у вимозі

$$R^2 + T^2 = 1. \qquad (4.24)$$

Важливим моментом при виконанні чисельних розрахунків є знаходження коренів дисперсійного рівняння (4.4). Для $kH = 10$ з рівняння (4.2) була знайдена кругова частота $\omega = 3.16$, для якої проводилися наступні обчислення, представлені в таб.1.

Таблиця 4.1.

n	κ_n	κ_n^*
2	5.19122	5.63231
4	11.8661	11.8882
6	18.3500	18.3539
8	24.7487	24.7496
10	31.1049	31.1051
12	37.4381	37.4382
14	43.7576	43.7577
16	50.0683	50.0684
18	56.3731	56.3731
20	62.6736	62.6736

Тут представлені значення чисто уявних коренів дисперсійного рівняння, отримані при безпосередньому розв'язанні дисперсійного рівняння (κ_n) і обчислені за асимптотичним співвідношенням для великих значень n (κ_n^*) для різних номерів коренів (n).

Вираз для асимптотичних значень коренів має вигляд [56]:

$$\kappa_n^* \approx \frac{n\pi}{H} - \frac{\omega^2}{n\pi H} - \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{\omega^2}{n\pi}\right)^3 \frac{1}{H}. \qquad (4.25)$$

Як видно з порівняння значень коренів дисперсійного рівняння, знайдених як розв'язання рівняння і асимптотично, починаючи з $n = 18$, точні значення кореня і його асимптотичні значення збігаються до шести значущих цифр. Для більш низьких частот ω збіг між точно обчисленими коренями дисперсійного рівняння і наближеними значеннями коренів починається з менших значень n. Наприклад, хвильовому числу падаючої хвилі $kH = 2$ відповідає кругова частота $\omega = 1.39$, і збіг точного і асимптотичного значень коренів з вказаною точністю спостерігається, починаючи з $n = 7$. Тому для всіх подальших обчислень для $n = (N+1) \geq 20$ використовувалися асимптотичні значення коренів дисперсійного рівняння.

Перш ніж перейти до аналізу якості отриманого розв'язку, розглянемо залежність модуля амплітуди коефіцієнта відбиття і проходження від kH для різних співвідношень $\alpha = h_1 / H$. На рис. 4.2 представлені такі залежності за умови, що $N = 50$, тоді як у других сумах в правих частинах виразів (4.18) і (4.22) замість нескінченності враховували 400 членів ряду. Номер кривої відповідає різним значенням α: *1*- $\alpha = 0.25$, *2* - $\alpha = 0.5$, *3*-$\alpha = 0.75$. Нагадаємо, що коефіцієнти відбиття позначені як R, і коефіцієнти проходження через T. Наведені дані з графічною точністю збігаються з результатами роботи [22].

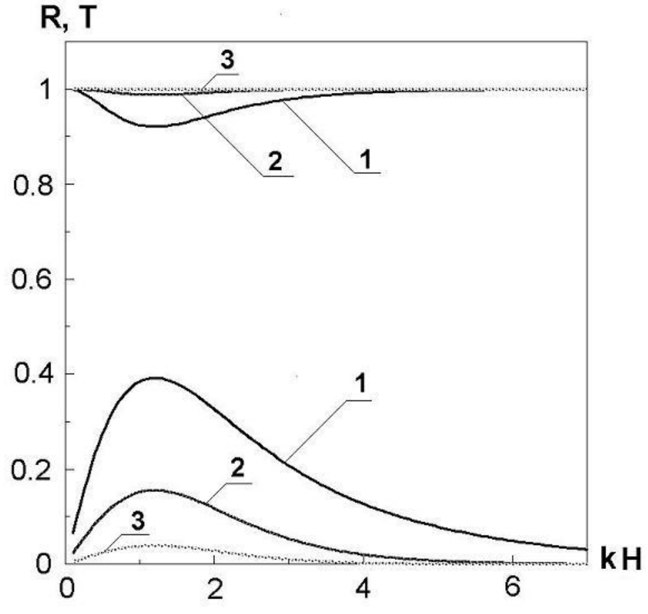

Рис. 4.2. Розподіли коефіцієнтів відбиття і проходження в залежності від хвильового числа падаючої хвилі

Як видно з рисунку, найбільшої величини коефіцієнт відбиття досягає при $kH = 1.2$ для $\alpha = 0.75$. Саме для цих вихідних параметрів розглянемо точність виконання умов спряження при зміні числа членів ряду з урахуванням асимптотичних властивостей невідомих і способу замикання системи.

При виконанні чисельних розрахунків, починаючи з $N = 10$, спостерігалася стійкість розв'язку, яка проявлялася в тому, що при збільшенні числа членів рядів у виразах (4.18), (4.22) величини коефіцієнтів відбиття R і проходження T змінювалися в третьому знаку. В якості наступного критерію отриманого розв'язку розглядалися інтегральні характеристики, які в даній задачі еквівалентні рівнянню (4.24).

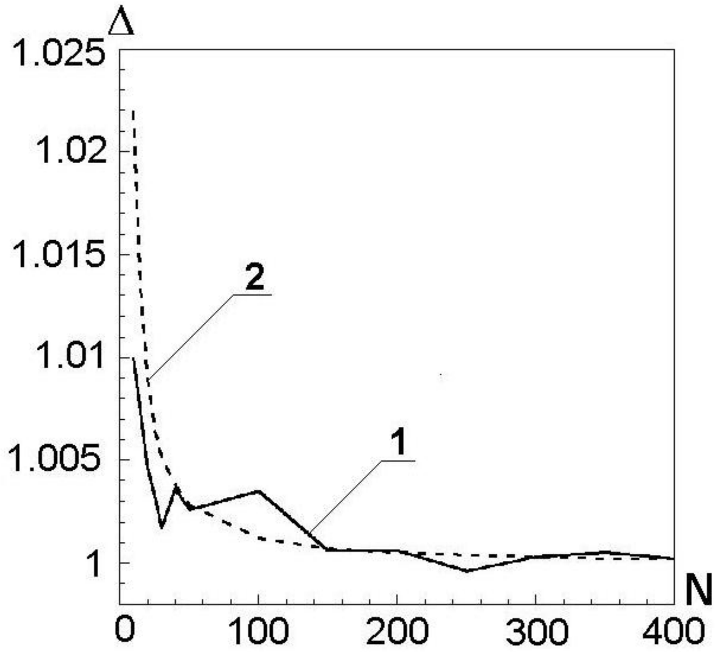

Рис. 4.3. Зміни величини Δ в залежності від N.

На рис.4.3 представлені зміни величини $\Delta = \left(R^2 + T^2\right)$ при збільшенні N для випадку простої редукції системи (крива 2) і з урахуванням асимптотичних властивостей невідомих (крива 1). В даних розрахунках при врахуванні асимптотичних властивостей невідомих система замикалася, використовуючи рівняння (4.19) для A_N і аналогічного виразу для B_N. Для $N \geq 10$ рівність (4.24) виконувалося з точністю до 2% як з урахуванням, так і без урахування асимптотичних властивостей невідомих. Однак для величин $10 < N < 40$ інтегральні оцінки точності, отриманих результатів, при врахуванні асимптотичних властивостей невідомих, в 2 рази краще, ніж при простій редукції системи. Таким чином, навіть інтегральні оцінки показують, що при врахуванні до 40 членів ряду в виразах для поля $\Phi_{1,2}$ слід враховувати асимптотичні властивості невідомих. При подальшому збільшенні кількості членів ряду в обох випадках значення коефіцієнтів відбиття і проходження практично не змінюється.

Відзначимо ще одну особливість розглянутих кривих. При простій редукції системи (крива 2) збільшення числа членів ряду призводить до плавного підвищення точності інтегральних характеристик. При врахуванні асимптотичних властивостей невідомих (крива 1) зі збільшенням числа членів ряду точність виконання інтегральних характеристик має осцилюючий характер. Така ж особливість залежності величини $\Delta = \left(R^2 + T^2\right)$ від N відзначалася в роботі [17] і пояснювалася осцилюючим характером поведінки коефіцієнтів A_n, B_n для великих значень n.

Основним критерієм якості отриманого розв'язку є контроль точності виконання умов спряження. Як приклад, нижче представлені результати розрахунку похибки виконання умов спряження для 50 членів ряду, коли використовується проста редукція системи, а також при врахуванні асимптотичних властивостей невідомих. Розглядалася різниця значень потенціалу $\delta\Phi = \left|\Phi_1 - \Phi_2\right|$, яка не перевищувала в даному випадку величини 0.2% на всьому проміжку $z \in L_g$. Для швидкості - ситуація інша. У точці $z = -0.25$ в полі швидкостей існує коренева особливість. Тому говорити про виконання умов спряження в цій точці немає сенсу. Слід аналізувати точність виконання умов спряження в околі точки .

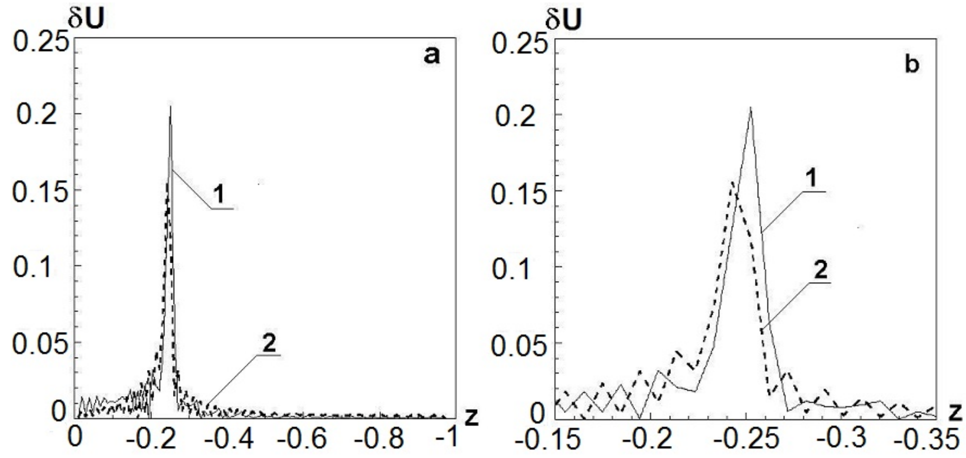

Рис. 4.4. Залежності похибки виконання умов спряження по швидкості для простої і поліпшеної редукції

На рис.4.4 наведені залежності похибки виконання умов спряження по швидкості при врахуванні 50 членів ряду. На малюнку 4.4a представлений загальний вигляд кривих $\delta U = |U_1 - U_2|/k$, на малюнку 4.4b - їх розташування поблизу точки сингулярності в збільшеному вигляді. Крива 1 відповідає простій редукції системи, а крива 2 побудована при врахуванні асимптотичних властивостей невідомих. Аналіз виконання умов спряження по швидкостях дозволяє зробити наступні висновки. При врахуванні асимптотичних властивостей невідомих (пунктирна крива 2) в малому околі точки, в якій існує локальна особливість по швидкостях ($z = -0.25 + 0.01$), точність задоволення умов спряження гірша, ніж при простій редукції (крива 1). Однак область, в якій спостерігається збільшення похибки виконання умов спряження по швидкостях при врахуванні асимптотичних властивостей невідомих, є помітно вужчою, ніж при простій редукції.

Були проведені розрахунки виконання умов спряження для інших значень N. Важливо відзначити, що при подальшому збільшенні числа членів ряду при врахуванні асимптотичних властивостей невідомих зазначена вище область звужується. При цьому похибка задоволення умов спряження по швидкостях може навіть трохи збільшитися. Характерно, що при простій редукції системи точність виконання умов спряження при збільшенні числа членів ряду збільшується, проте розмір області, в якій спостерігається значне збільшення похибки, практично не змінюється. Це дозволяє зробити висновок, що врахування асимптотичних властивостей невідомих дозволяє більш точно визначити ближнє до бар'єру поле. Відзначимо, що для оцінки коефіцієнта відбиття R і проходження T, починаючи з 40 членів ряду, можна використовувати просту редукцію системи.

Зупинимося ще на одному питанні, пов'язаним з вибором способу замикання системи. Використовуючи асимптотичні подання для невідомих у вигляді співвідношення (4.19) для $A_n, n > N$, і аналогічного для $B_n, n > N$, ми не накладаємо зв'язки між V_1 і V_2. У той же час, можливі інші способи замикання системи. У роботі [1] при розгляді задачі про поширення пружних хвиль з вільними бічними поверхнями і затисненим торцем, тобто для хвилеводу з точкою зміни типу граничних умов, в якій існує локальна особливість по напруженням, пропонувалося замикати систему, використовуючи умови спряження для двох компонентів переміщень в заданій точці. Це дозволило дещо поліпшити виконання граничних умов на торцевій поверхні. У даній роботі був також застосований аналогічний підхід. Для замикання системи використовуємо рівняння (4.19) для $A_n, n > N$, а в якості другого рівняння - локальну умову спряження для функції (4.12) (неперервність тиску над бар'єром) в точці $z = 0$. Це рівняння має наступний вигляд:

$$\begin{gathered} G_2(z) = (1+R)\varphi_0(0) + \sum_{n=1}^{N} A_n \varphi_n(0) + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{C_n}{\kappa_n} \varphi_n(0) = T\varphi_0(0) + \\ + \sum_{n=1}^{N} B_n \varphi_n(0) + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{E_n}{\kappa_n} \varphi_n(0). \end{gathered} \tag{4.26}$$

На рис. 4.5 представлена похибка виконання умов спряження по швидкостях δU на площині $x = 0, -1 \le z \le 0$. У точці $z = -0.25$ існує локальна особливість по швидкостях. Крива 1 на рис.4.5 відповідає 150 членам ряду в представленні для тиску і швидкостей, пунктирна крива 2 - 250. Аналогічні криві представлені на рис. 4.5в, на якому крива 2 відповідає значенню $N = 250$, а крива 3 -350.

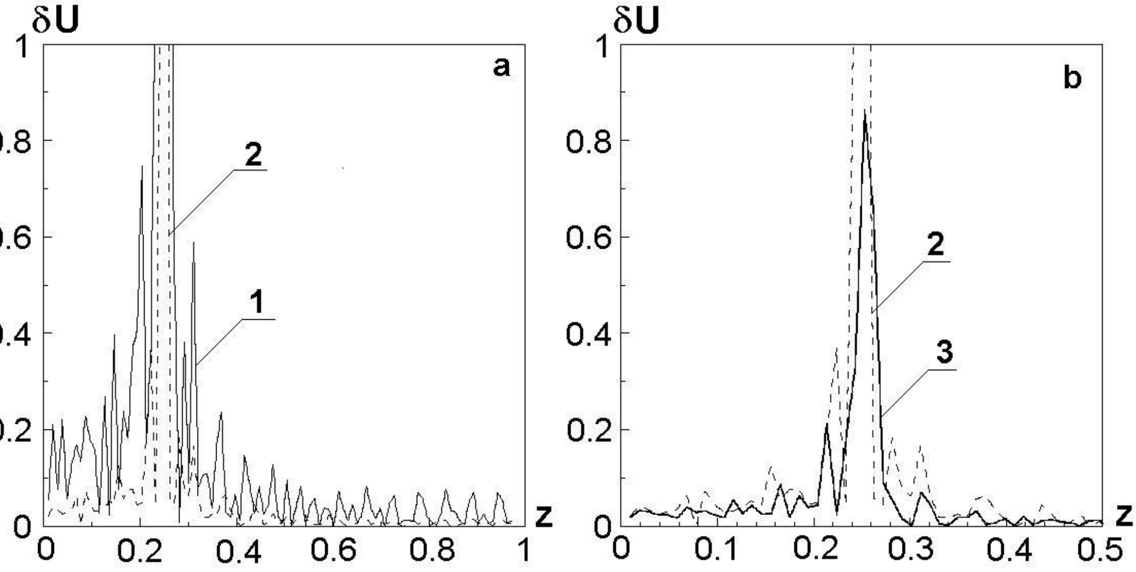

Рис. 4.5. Залежність похибки виконання умов спряження по швидкості для різних значень N

Як видно з рисунку похибка виконання умов спряження значно зросла, в порівнянні з розглянутим вище способом замикання системи (з використанням рівняння (4.19)), і навіть при простій редукції системи. Для отримання необхідної точності задоволення умов спряження необхідно враховувати значно більшу кількість членів ряду. Відзначимо, що при збільшенні членів ряду похибка виконання умов спряження зменшується, а діапазон $-0.25 - \varepsilon \le z \le -0.25 + \varepsilon$, в якому спостерігається значне зростання похибки виконання умов спряження, звужується.

Таким чином, при переході від нескінченної системи рівнянь до кінцевої з використанням методу поліпшеної редукції, що враховує асимптотичні властивості невідомих, використання традиційного способу замикання системи (на основі врахування рівняння (4.19)) дає меншу похибку виконання умов спряження (в порівнянні з використанням рівняння (4.26)), при врахуванні однакового числа членів ряду.

4.5. Висновки до розділу 4

У розділі розглянуто задачу розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль одиночним вертикальним тонким бар'єром. Розглянуто випадок нормального падіння. Один з ефективних методів розв'язання даного класу задач - використання розкладання розв'язань в ряд по власних функціях задачі. Відомо, що розподіл швидкості потоку має кореневу особливість поблизу вершини бар'єру. В результаті розв'язання задачі зводиться до виконання умов спряження над бар'єром і рівності нулю нормальних до площини бар'єра компонентів швидкості. Використання властивостей ортогональності системи власних функцій приводить задачу до необхідності розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів розкладань. Традиційні підходи до розв'язання такої системи - це метод простої редукції. Однак, як зазначено в роботах [56, 78], для отримання точності до другого знака доводиться розглядати достатньо велику кількість рівнянь, порядку $N = 400$. Як зазначено вище, в роботі [78] пропонується використовувати в якості базисних функцій поліноми Чебишева для отримання прийнятних чисельних результатів з помірно великою кількістю рівнянь. Однак, при цьому виникає необхідність перевірки граничних умов, хоча автори про це не говорять. Особливо важливим стає досягнення необхідної точності обчислень в задачах розсіювання хвиль системою вертикальних бар'єрів, коли розглядаються резонансні явища, пов'язані з виникненням стоячої хвилі в проміжку між бар'єрами. Для точного визначення частоти запирання при розгляді хвиль високої частоти, як показано в роботі [1], необхідно використовувати більш 400 рівнянь. Це викликано наявністю особливості розподілу швидкості поблизу вершини бар'єру. У роботі [45] наведено суперечливе твердження про зникнення локальної особливості по швидкостям при розгляді бар'єру кінцевої товщини. Локальна особливість по швидкостях, обумовлена існуванням точки зміни типу граничних умов, що не зникає при заміні нескінченно тонкого бар'єру на бар'єр кінцевої товщини. У цьому випадку, тобто при врахуванні кінцевої товщини бар'єру, виникає ступенева особливість з іншим показником ступеня [12], і труднощі обчислень нескінченної системи алгебраїчних рівнянь залишаються.

В даному розділі для розгляду задач розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль тонкими вертикальними бар'єрами пропонується використовувати метод виділення особливостей і подальше використання асимптотичних залежностей, які визначаються видом зазначених особливостей, для невідомих коефіцієнтів розкладання для великих значень N. Це дає можливість зменшити не тільки розмір системи алгебраїчних рівнянь, а й істотно розширити область в околі точки зміни типу граничних умов, в якій поліпшується точність отриманого розв'язання.

Проведене порівняння результатів, отриманих на основі застосовуваного методу і методу простої редукції, показало, що запропонований підхід покращеної редукції є більш ефективним для розрахунку задач розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль бар'єрами.

РОЗДІЛ 5

ТРАНСФОРМАЦІЯ СПЕКТРУ ПОВЕРХНЕВОГО ХВИЛЮВАННЯ НА УСТУПІ

5.1. Вступ

Проблема захисту берегів і гідротехнічних конструкцій за допомогою штучних споруд залишається актуальною і в наш час, що обумовлено розвитком інфраструктури шельфової зони морів. До таких споруд відносяться прямокутні конструкції великої довжини вздовж напрямку поширення хвиль. Інформація про амплітудно-частотні характеристики хвиль, трансформованих на таких спорудах, є надзвичайно важливою для оцінки впливу хвиль на берегову лінію, що викликає ерозію берегів, для конструювання захисних конструкцій, для розрахунку навантажень на споруди господарського призначення, які перебувають у береговій зоні та ін. Така інформація міститься, зокрема, в спектральних характеристиках поверхневого хвилювання, на основі якої можна розрахувати розподіл амплітуд хвиль, їх періодів.

Спектри поверхневого хвилювання будуються на основі обробки натурних або лабораторних вимірювань, являють собою сконцентровану інформацію про хвилі, і мають статистичний характер. В даному розділі вивчається трансформація спектра поверхневого хвилювання на уступі на основі розрахованої у другому розділі роботи залежності коефіцієнта проходження від параметрів падаючої хвилі. Розглядається однонаправлений спектр поверхневих хвиль, що падає нормально на уступ.

5.2. Спектральна модель.

Однією з моделей спектра поверхневого хвилювання є модель JONSWAP, про що було сказано в першому розділі. Зупинимося на виразах, що описують цей спектр.

Вітрові хвилі можуть досягати стану енергетичного насичення, при якому настає статистична рівновага між швидкістю передачі енергії від вітру хвилям і швидкістю втрат енергії при перекиданні гребенів. У частотному діапазоні хвиль є область, в якій зростання хвиль може буде обмежено з причини локальної нестійкості хвильового руху (перекидання гребенів хвиль). Виходячи з міркувань розмірності, в роботі [21] було запропоновано вираз, що відображає згадану рівновагу, який описує спадну гілку спектра (рівноважний інтервал). Для випадку великої глибини воно може бути представлено у вигляді

$$S(\omega) = \alpha\, g^2\, \omega^{-5}, \tag{5.1}$$

де g - прискорення сили тяжіння, ω - кругова частота, α - константа.

У роботі [49] була отримана поправочна функція, яка розширює вираз (5.1) на випадок рідини кінцевої глибини H

$$S(\omega) = \alpha\, g^2\, \omega^{-5} F(\tilde{\omega}), \tag{5.2}$$

де

$$F(\tilde{\omega}) = \frac{1}{\mu^2(\tilde{\omega})}\left\{1 + \frac{2(\tilde{\omega})^2\,\mu(\tilde{\omega})}{\operatorname{sh}\left[2(\tilde{\omega})^2\,\mu(\tilde{\omega})\right]}\right\}^{-1},$$

$$\mu(\tilde{\omega}) = \operatorname{th}^{-1}\left[k(\tilde{\omega})H\right],$$

$\tilde{\omega}$ - безрозмірна частота, $\tilde{\omega} = \omega\sqrt{\dfrac{H}{g}}$.

Істотне просування в описах форми спектра було зроблено в роботі [77], де запропоновано наступну однопараметричну залежність форми спектра від частоти у випадку глибокої води

$$S(\omega) = \alpha\, g^2\, \omega^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^{-4}\right], \tag{5.3}$$

де $\alpha = 8.1\cdot 10^{-3}$, ω_m - частота спектрального максимуму.

Уточнення форми спектральної щільності поблизу частоти спектрального максимуму ω_m було здійснено в роботі [40]. За основу автори використовували спектр Пірсона-Московіца (5.3), ввівши додатковий множник. Вираз, що описує цей спектр (JONSWAP) має наступний вигляд

$$S_J(\omega) = \alpha\, g^2\, \omega^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^{-4}\right]\gamma^{\Gamma}, \tag{5.4}$$

де $\gamma = 3.3$,

$$\Gamma = \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_m)^2}{2\sigma\,\omega_m^2}\right],$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_a = 0.07 \quad \text{при} \quad \omega \le \omega_m \\ \sigma_b = 0.09 \quad \text{при} \quad \omega > \omega_m. \end{cases}$$

На відміну від однопараметричного спектру Пірсона-Московіца (один параметр α, що визначає форму спектра), в спектрі JONSWAP введені додаткові параметри γ і σ, що характеризують відповідно висоту і ширину спектрального піку. Відзначимо, що параметри σ_a і σ_b враховують асиметрію спектрального піку нижче і вище частоти спектрального максимуму. Тут же була запропонована залежність величини параметру α від довжини хвильового розгону X: $\alpha = 0.076\left(X g / U_{10}^2\right)^{-0.22}$, де U_{10} - швидкість вітру, виміряна на висоті 10 метрів над водою. Подібні залежності для визначення частоти спектрального максимуму ω_m і параметрів γ і σ від довжини X і ω_m приведені в роботі [73].

Відзначимо, що спектр JONSWAP призначений для опису спектру вітрових хвиль в разі глибокої води. У роботі [28] запропоновано використовувати поправку Китайгородського для розширення області застосування спектру на випадок рідини кінцевої глибини. В результаті спектр вітрового хвилювання може бути представлений у вигляді добутку $SP(\tilde{\omega}) = S_J(\tilde{\omega}) \cdot F(\tilde{\omega})$. Це так званий спектр ТМА.

Як було відзначено в розділі 1, для опису змішаного хвилювання (вітрові хвилі і хвиль брижі) доцільно розглядати суперпозицію спектрів, що описують окремо вітрові хвилі і окремо хвилі брижі. Відзначимо, що спектральні максимуми цих хвильових рухів відрізняються один від одного: для хвиль брижі цей максимум розташований в області більш низьких частот. Для моделювання спектру такого хвилювання в роботі використовується сума двох спектрів JONSWAP з різними спектральними піками, помноженими на поправку Китайгородського, в результаті чого ми будемо розглядати двохпиковий спектр.

Таким чином, вважаємо, що на уступ набігають нерегулярні хвилі, спектр яких $SP(\omega)$ представляється у вигляді суперпозиції двох ТМА спектрів (JONSWAP, помножений на поправку Китайгородського $F(kH)$), причому спектральні максимуми спектрів відрізняються один від одного.

$$SP(\tilde{\omega}) = \left[S_1(\tilde{\omega}) + S_2(\tilde{\omega})\right] \cdot F(k_1 H_1), \tag{5.5}$$

$$S_1(\tilde{\omega}) = \alpha \frac{H_1^{5/2}}{\tilde{\omega}^5 g^{1/2}} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_m^{(1)}}\right)^{-4}\right] \gamma^{\Gamma}, \tag{5.6}$$

$$S_2(\tilde{\omega}) = \alpha \frac{H_1^{5/2}}{\tilde{\omega}^5 g^{1/2}} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_m^{(2)}}\right)^{-4}\right] \gamma^{\Pi}, \tag{5.7}$$

$$F(k_1 H_1) = \operatorname{th}^2 k_1 H_1 \frac{\operatorname{sh} 2k_1 H_1}{\operatorname{sh} 2k_1 H_1 + 2k_1 H_1}, \tag{5.8}$$

$$\Gamma = \exp\left[-\frac{(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_m^{(1)})^2}{2\sigma_1 \cdot (\tilde{\omega}_m^{(1)})^2}\right], \quad \Pi = \exp\left[-\frac{(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_m^{(2)})^2}{2\sigma_2 \cdot (\tilde{\omega}_m^{(2)})^2}\right],$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma_a = 0.07 & \text{при} \quad \tilde{\omega} \le \tilde{\omega}_m^{(1)} \\ \sigma_b = 0.09 & \text{при} \quad \tilde{\omega} > \tilde{\omega}_m^{(1)}, \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} \sigma_a = 0.07 & \text{при} \quad \tilde{\omega} \le \tilde{\omega}_m^{(2)} \\ \sigma_b = 0.09 & \text{при} \quad \tilde{\omega} > \tilde{\omega}_m^{(2)}, \end{cases}$$

$\gamma = 3.3$, $\tilde{\omega} = \omega \cdot \sqrt{H_1/g}$.

Частоти спектральних максимумів (в розмірному вигляді) приймемо рівними $\omega_m^{(1)} = 2\pi \cdot 0.125\ \mathrm{rad/sec}$, $\omega_m^{(2)} = 2\pi \cdot 0.1875\ \mathrm{rad/sec}$. Відзначимо, що такі частоти були використані в роботі [76] при моделюванні впливу форми спектрів на параметри хвилювання. Аналіз даних залежності частот спектральних максимумів від величини хвильового розгону, що представлено в роботі [74], показує, що, наприклад, при швидкості вітру $U_{10} = 10$ м / сек частота спектрального піку змінюється в межах від 0.1 Hz до 0.3 Hz.

Вирази (5.5) - (5.8) залежать як від частоти, так і хвильових чисел. Ці величини пов'язані один з одним за допомогою дисперсійного рівняння

$$\tilde{\omega}^2 = k_1 H_1 \tanh k_1 H_1 . \qquad (5.9)$$

Розглянемо вид хвильового спектру перед уступом. Розрахунки проводилися на основі формул (5.5) - (5.8). Важливо підкреслити, що вплив кінцевої глибини рідини, що враховується шляхом введення функції $F(kH)$, проявляється в тому, що ця функція є в певному значенні фільтр, через який безперешкодно проходять високі частоти, в той же час дуже низькі частоти затримуються. Вид цієї функції представлений на рис. 5.1.

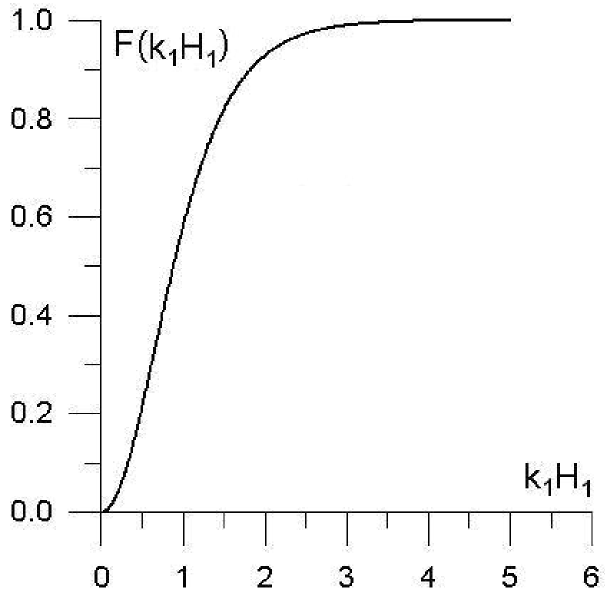

Рис. 5.1. Графік поправочної функції

Для визначеності будемо розглядати випадок, коли глибина рідини перед уступом дорівнює $H_1 = 10$ м, а глибини над уступом є різними.

Зупинимося на описах можливості застосування спрощених апроксимацій для розрахунків трансформації розглянутого хвильового спектру. Для малих значень $k_1 H_1$ (довгі хвилі) дисперсійне рівняння (5.9) приймає вид $\widetilde{\omega}^2 = k_1^2 \cdot H_1^2$ з точністю до 4% при $k_1 H_1 \le 0.5$. Тоді стає зрозуміло, що при $H_1 < g/4\omega^2$ з вказаною точністю можна застосовувати довгохвильове наближення. Для частоти $\omega = 0.38$ рад / сек, яка розглянута в роботі [65], (відзначимо, що нерівність, аналогічна, наведеним вище, містить описку) при глибині $H_1 < 15$ м дійсно для опису хвиль з такою частотою може бути застосоване довгохвильове наближення. У нашому випадку оцінка показує, що для низькочастотного спектрального піку глибина повинна бути менша 3.5 м, щоб можна було застосовувати таке наближення.

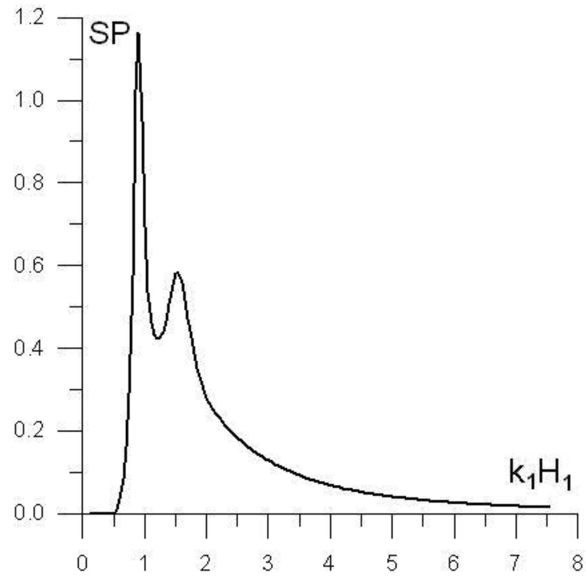

Рис. 5.2. Двохпиковий спектр поверхневого хвилювання. Глибина рідини дорівнює 10 м. Розмірність $SP(k_1 H_1)$ - $м^2 \cdot сек$.

Для низькочастотного піку ця оцінка істотно менша. Таким чином, в даному випадку необхідно вирішувати задачу в повній постановці, як це зроблено в розділі 2.

На рис. 5.2 наведено розрахований на основі формул (5.5) - (5.9) двохпиковий спектр поверхневого хвилювання, який набігає на уступ. Чітко видно двохпикову структуру спектра. Як показує аналіз натурних даних [13], низькочастотний пік відповідає хвилям брижі, високочастотний - вітровому хвилюванні. Як і слід було очікувати, основна енергія сконцентрована в довгохвильовій частині спектра (область низьких частот).

5.3. Трансформація спектру на уступі.

Необхідно зупинитися на процесі формування спектру вітрового хвилювання і взаємодії з різкими неоднорідностями донної поверхні. Відомо, що формування спектру відбувається за рахунок нелінійних взаємодій вітру і хвиль на поверхні рідини, а також шляхом трьох - і чьотирьохмодових нелінійних взаємодій спектральних компонентів. Цей процес вимагає досить багато часу (велика довжина вітрового нагону). При взаємодії хвиль з різкою зміною донної поверхні цей процес не встигає реалізуватися на відносно невеликих відстанях від скачка глибини і можна говорити в такому випадку про лінійне моделювання процесу трансформації нерегулярного хвилювання. Тут простежується певна аналогія з різким зовнішнім впливом на поведінку розвиненої турбулентності, спектр якої також формується за рахунок нелінійних взаємодій окремих спектральних складових. Такий підхід, коли деформації впливають на турбулентне поле швидкості, дозволяє врахувати зміни деяких або всіх компонентів турбулентності на основі лінійної теорії [82]. Важливими прикладами таких "спотворень" є усереднені або випадкові деформаційні переміщення, масові сили, взаємодія з іншими типами течій (наприклад, з хвилями). Ця теорія зазвичай називається теорією швидких спотворень (RDT - Rapid Distortion Theory). У розглянутому нами випадку відбувається швидке "спотворення" окремих спектральних складових під впливом різкої зміни глибини рідини, і результатів нелінійної взаємодії спектральних компонентів слід очікувати пізніше, при подальшому поширенні хвиль в області за уступом. Відмітимо, що такий підхід був здійснений в роботі [60], в якій розглядалася трансформація однопикового спектру типу JONSWAP на вертикальному тонкому бар'єрі. Враховуючи, що основна енергія хвиль міститься в низькочастотній області спектру, задача про трансформацію спектру вітрових хвиль на пористому або перфорованому хвилеломі була розглянута в наближенні довгих хвиль в роботі [65].

Таким чином, вважаємо, що на уступ набігають нерегулярні поверхневі хвилі, форма спектру яких представлена на рис. 5.2. Для розгляду трансформації цього спектру на уступі використовуємо результати, наведені в розділі 2. Форма уступу представлена на рис. 2.1. Глибина рідини до уступу становить H_1, а після - H_2.

У другому розділі в результаті розв'язання крайової задачі про трансформацію лінійних поверхневих хвиль на підводному уступі для заданих значень глибин рідини до і після уступу був розрахований модуль коефіцієнта проходження $T(k_1 H_1)$, який, природно, залежить від довжини хвилі, що набігає. Ця залежність в графічному вигляді представлена на рис. 2.4. Відзначено помітне зростання коефіцієнта проходження в довгохвильовому діапазоні.

Для отримання даних про трансформацію спектру хвиль розрахунки, які проводилися в розділі 2, були доповнені, щоб знайти форму трансформованого спектру SP^T. Враховуючи вищенаведені міркування про можливість застосування лінійного моделювання досліджуваного процесу, розрахунок спектру виконувалися із застосуванням залежності $SP^T = SP \cdot T^2$.

Оскільки цікавість викликає параметри хвилювання в області після уступу, результати представлені у вигляді графічних залежностей спектральної щільності від $k_2 H_2$. Перерахунок координат здійснювався на основі дисперсійного рівняння, яке для області 2 має наступний (розмірний) вид

$$\frac{\omega^2 H_2}{g} = k_2 H_2 \,\mathrm{th}\, k_2 H_2 . \qquad (5.10)$$

Результати розрахунків трансформованого спектру поверхневих хвиль представлені на рисунках 5.3-5.5, відповідно для глибин $H_2 = 1$м, $H_2 = 3$м, $H_2 = 5$м.

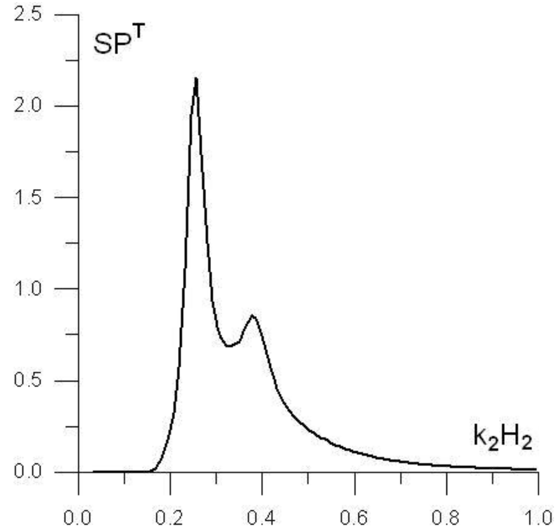

Рис. 5.3. Графік спектру SP^T, глибини $H_1 = 10$м, $\mathrm{H}_2 = 1$м.

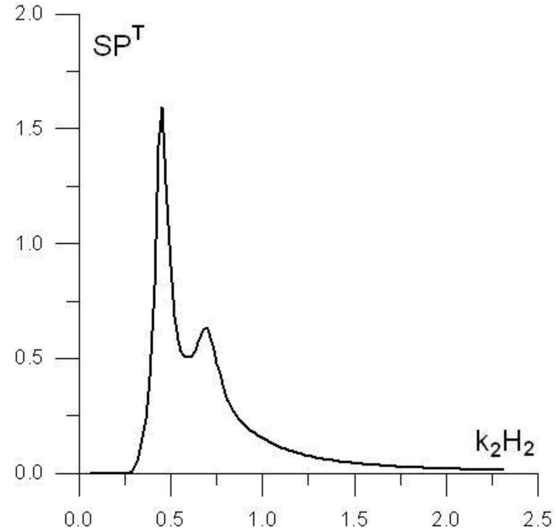

Рис. 5.4. Графік спектру SP^T, глибини $H_1 = 10$м, $\mathrm{H}_2 = 3$м.

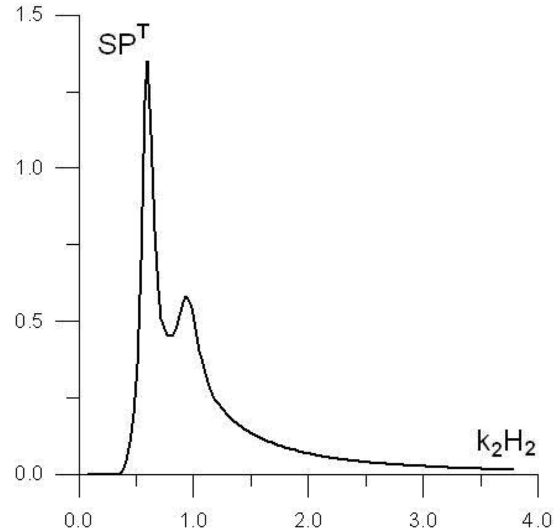

Рис. 5.5. Графік спектру SP^T, глибини $H_1 = 10$м, $\text{Н}_2 = 5$м.

Величина спектральної щільності, відкладена вздовж вертикальної осі, вимірюється в $\text{м}^2 \cdot \text{сек}$. Аналіз рисунків показує, що значення спектральної щільності в областях спектральних піків зростають при зменшенні глибини рідини. Так, в разі $H_2 = 1\text{м}$ ці величини складають: 2.15 $\text{м}^2 \cdot \text{сек}$ (низькочастотний пік) і 0.85 $\text{м}^2 \cdot \text{сек}$ (другий спектральний пік). Для $H_2 = 3\text{м}$ ці величини рівні 1.6 $\text{м}^2 \cdot \text{сек}$ і 0.66 $\text{м}^2 \cdot \text{сек}$, для $H_2 = 5\text{м}$ - 1.35 $\text{м}^2 \cdot \text{сек}$ і 0.58 $\text{м}^2 \cdot \text{сек}$, відповідно. Звідси випливає висновок про те, що після уступу амплітуда хвиль істотно зростає, і чим менша глибина H_2, тим сильніше це зростання. Для порівняння наведемо значення цих же величин в області до уступу: вони відповідно рівні 1.16 $\text{м}^2 \cdot \text{сек}$ і 0.57 $\text{м}^2 \cdot \text{сек}$.

Інша, не менш важлива особливість трансформації поверхневих спектрів пов'язана зі зменшенням довжин відповідних хвиль. В якості характерних точок розглянемо частоти спектральних максимумів. Так, наприклад, довжина хвилі, яка відповідає низькочастотному піку спектра падаючих хвиль (до уступу) зменшується над уступом в 1.7 рази для $H_2 = 3\text{м}$, і другого піку - 1.5 раз. Іншими словами, хвилі після проходження уступу стають коротшими. Зі зменшенням глибини H_2 цей ефект посилюється.

5.4. Висновки до розділу 5.

В даному розділі розглянуто трансформацію спектра нерегулярного хвилювання при його поширенні над уступом. В якості залежностей, що описують спектр хвилювання, розглянуті відомі спектри JONSWAP, TMA. Враховано вплив кінцевої глибини рідини шляхом введення поправки, запропонованої Китайгородським. Розглянуто випадок змішаного хвилювання, коли хвильовий спектр має двохпиковий характер.

При проходженні хвиль над уступом, який різко впливає на хвилі, за аналогією з теорією швидкого спотворення (RDT - rapid distortion theory) розглянуто лінійну задачу про трансформацію поверхневих хвиль. Міркування, що дозволяють використовувати такий підхід, полягають в тому, що при різкому зовнішньому впливі на хвилювання нелінійні ефекти, які обумовлюють формування спектра хвилювання, не встигають сприйняти і належним чином відреагувати на даний вплив і спочатку можна використовувати лінійний підхід. Відмітимо, що RDT добре себе зарекомендувала при вивченні розвитку турбулентності при різкому впливі на неї деформаційних спотворень або масових сил, вплив яких враховується на основі лінійного підходу, незважаючи на те, що спектр розвиненої турбулентності формується під впливом нелінійних ефектів.

Показано, що відбувається суттєва перебудова спектра хвилювання, коли хвилі поширюються над уступом. Форма спектра не зазнає суттєвих змін, але змінюються максимальні значення відповідно до коефіцієнта проходження, результати розрахунку якого представлені в розділі 2. Іншими словами, амплітуди хвиль помітно зростають. Але крім цього, довжини хвиль над уступом помітно зменшуються, і самі хвилі стають крутішими. Це може привести до обвалення хвиль і втрати їх енергії.

Розроблений метод дозволяє розраховувати параметри спектра поверхневих хвиль, трансформованих різким підняттям донної поверхні (уступом). Дані про трансформований спектр дають можливість на її основі отримати інформацію про розподіл висот і періодів хвиль, про значну висоту хвиль, про середній період і т.д., тобто практично всю статистичну інформацію. Така інформація вкрай необхідна при виконанні робіт з проектування хвилеломів, для оцінок ступеня впливу хвиль на берегову зону і гідротехнічні споруди.

ВИСНОВКИ

У роботі розв’язано клас задач, присвячених трансформації поверхневих хвиль на занурених перешкодах, які мають відносно прості форми (уступ, бар, бар’єр) і можуть використовуватись у якості хвилеломів або входять як складова частина у великі конструкції. Застосована модель ідеальної нестисливої рідини. Задачі зводяться до рівняння Лапласа для потенціалу швидкості з відповідними граничними умовами на дні і на вільній поверхні. Розглядається варіант методу часткових областей, коли здійснюється декомпозиція всій області, зайнятої рідиною, на ряд підобластей, які відокремлені одна від одної вертикальними межами. Задача зводиться до виконання умов спряження розв’язків, відомих в кожній з підобластей. Застосовується метод нормальних мод. Для невідомих коефіцієнтів розкладання розв’язків в ряди за власними функціями отримані нескінченні системи алгебраїчних рівнянь, які, як правило, вирішуються методом редукції.

Характерною особливістю розглянутих хвилезахисних конструкцій є наявність гострих кутів. Відомо, що в їх околі розподіл швидкості має особливості (степеневі або кореневі), в яких швидкість прямує до нескінченності. Наявність особливостей обумовлює погану збіжність результатів при вирішенні згаданих систем рівнянь і призводить до необхідності істотно збільшувати їх розмірність. В роботі запропоновано використовувати метод поліпшеної редукції, в якому шляхом виділення зазначених особливостей знайдено асимптотичні властивості невідомих коефіцієнтів. Це дозволило зменшити розмірність систем рівнянь, в той же час облік вищих мод виконується асимптотично. В результаті розв’язання задач трансформації поверхневих хвиль на розглянутих неоднорідностях:

- розвинено чисельно-аналітичний метод для розв'язання задач розсіювання хвиль на перешкодах, в якому за рахунок виділення особливості по швидкості, знайдено асимптотичні вирази для невідомих, що дозволило підвищити точність розрахунків і зменшити розмірність системи рівнянь;

- проведено розрахунки коефіцієнтів відбиття і проходження поверхневих хвиль через перешкоди різної форми;

- виявлено, що зміна висоти симетричної перешкоди призводить до зсуву значень хвильових чисел, при яких спостерігається нульове відбиття хвилі. Це пов'язано зі зміною фазових характеристик хвилі, яка поширюється над перешкодою в прямому і зворотному напрямках, і відповідною зміною умов інтерференції з відбитою від перешкоди хвилі;

- показано, що відсутність симетрії розташування перешкоди кінцевої довжини призводить до того, що характер поведінки коефіцієнта відбиття залишається осцилюючим, однак його значення в точках локального мінімуму відрізняються від нуля на відміну від симетричного випадку, коли коефіцієнти відбиття стають рівними нулю ("Брегівське" розсіювання). Ця відмінність стає істотною зі зростанням висоти перешкоди і зростанням глибини рідини за перешкодою;

- для симетричної перешкоди в рамках плоско-хвильового наближення ("plane-wave approximation") знайдено аналітичні залежності для коефіцієнтів відбиття і проходження. Знайдено умови, коли коефіцієнт відбиття дорівнює нулю;

- показано, що відбувається суттєва перебудова спектрів поверхневого хвилювання, коли хвилі поширюються над уступом. Форма спектру залишається подібною до спектру хвиль, що падають на перешкоду. Виявлено, що змінюються максимальні значення у відповідності до коефіцієнту проходження, тобто амплітуди хвиль зростають. Крім того, довжина хвиль зменшується і хвилі стають більш крутими. Ці ефекти підсилюються зі зменшенням глибини.

Отримані результати дозволяють поглибити наше розуміння процесів розсіювання поверхневих хвиль різними видами підводних перешкод, можуть бути використані при конструюванні берегозахисних споруд.

СПИСОК ВИКОРОСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Городецкая Н.С. К задаче об отражения первой симметричной нормальной волны от защемленного торца полуполосы / Н.С. Городецкая // Акустический вестник, 1999.- **2**, №2.- С. 26-34.

2. Городецкая Н.С. О рассеянии поверхностных гравитационных волн тонкими вертикальными барьерами / Н.С. Городецкая, Т.Н. Миргородская, В.И. Никишов // Прикладная гидромеханика, 2015. **17**, №2.- С. 9-19.

3. Городецкая Н.С. Рассеяние поверхностных гравитационные волны подводным уступом/ Н.С. Городецкая, Т.Н. Щербак, В.И. Никишов // Прикладная гидромеханика, 2015.-**17**, №4.- С. 24-35.

4. Городецкая Н.С. Влияние симметрии подводного препятствия на распространение поверхностных гравитационных волн / Н.С. Городецкая, Т.Н. Щербак, В.И. Никишов // Прикладная гидромеханика, 2016.-**18**,№1.- С. 16-30.

5. Городецька Н.С. Розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль підводним прямокутним баром / Н.С. Городецька, Т.М. Щербак, В.І. Нікішов. // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка, 2015.-№4.- С. 29-34.

6. Городецька Н.С. Трансформація спектру нерегулярного хвилювання на уступі / Н.С. Городецька, Т.М. Щербак, В.І. Нікішов // Доповіді НАН України, 2016.- №7.- С.37-43.

7. Городецька Н.С. Вплив зміни глибини прибережної смуги на спектр нерегулярного хвилювання / Н.С. Городецька, Т.М. Щербак, В.І. Нікішов // Наукоємні технології. Фізика, 2016.- №3.- С. 279-283.

8. Городецька Н.С. Поширення хвиль у середовищі з різкою зміною межі / Н.С. Городецька, Т.М. Миргородська, В.І. Нікішов. // Консонанс – 2015. Акустичний симпозіум (Київ, Інститут гідромеханіки НАН України, 1-2 жовтня 2015 р.). Тези доповідей, К.-2015.

9. Городецька Н.С. Трансформація поверхневих гравітаційних хвиль на неоднорідності донної поверхні / Н.С. Городецька, Т.М. Щербак, В.І. Нікішов // Комп'ютерна гідромеханіка. 5 міжнародна науково-практична конференція (Київ, Інститут гідромеханіки НАН України, 29-30 вересня 2016 р). Тези доповідей, К.-2016.

10. Гринченко В.Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк.-К.: Наук, думка, 1986.- 240 с.

11. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко.- К.: Наук. думка, 1981.- 284 с.

12. Гринченко В.Т. О локальных особенностях в математических моделях физических полей / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1998.- **41**, №1.- С. 12-34.

13. Давидан И.Н. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс / И.Н. Давидан , Л.И. Лопатухин, В.А. Рожков .- Л.: Гидрометеоиздат, 1978.- 284 с.

14. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1 / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, И.В. Розе . - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963 . - 585 с.

15. Ламб Г. Гидродинамика / Г. Ламб . – М.-Л.: Гостехиздат, 1947 . - 928 с.

16. Ландау Л. Д. Теоретическая физика. Т. VI Гидромеханика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц . - М.: Физматлит, 2001 . - 736 с

17. Мацыпура В.Т. Акустические поля в неканонических областях. Диссертация на соиск. ученой степени докт. физ.-мат. наук / В.Т. Мацыпура. – Киев: Ин-т гидромеханики НАН Украины, 2003.- 331 с.

18. Мелешко В.В. Електро-осмотичні течії в'язкої рідини в прямокутній порожнині / В.В. Мелешко, О.А. Гуржій, Е.М. Безим'янна // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2007. - **50**, №1. - С. 107-116.

19. Прудников А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев . -М.: Наука, 1981.- 798 с.

20. Стурова И.В. Распространение плоских поверхностных волн над подводным препятствием и погруженной пластиной / И.В. Стурова // ПМТФ, 1991.- №3. -С. 55-62.

21. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана / О.М. Филлипс. - М.: Мир, 1969. - 268 с.

22. Abul-Azm A.G. Wave diffraction through submerged breakwater / A.G. Abul-Azm // J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., 1993.- **119**, No.6.-P.587-605.

23. Abul-Azm A.G. Diffraction through wide submerged breakwater under oblique waves / A.G.Abul-Azm // Ocean Engng, 1994.- **21**, No. 7.-P. 683-706.

24. Banerjea S. Oblique wave scattering by submerged thin wall with gap in finite-depth water / S. Banerjea, M. Kanoria, D.P. Dolai, B.N. Mandal // Applied Ocean Research, 1996. – **18**.- P. 319-327.

25. Bartholomeusz E.F. The reflexion of long waves at a step / E.F. Bartholomeusz // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. ,1958. - **54**, No.1. -P. 106–118.

26. Bender Ch.J. Wave transformation by two-dimensional bathymetric anomalies with sloped transitions / Ch.J. Bender, R.G. Dean // Coastal Engineering, 2003. - **50**. - P. 61–84.

27. Blenkinsopp Ch. The effect of micro-scale bathymetric steps on wave breaking and implications for artificial surfing reef construction / Ch. Blenkinsopp // Proceedings of the 3rd International Surfing Reef Symposium. Raglan, New Zealand, June 22-25.- 2003.- P. 139-155.

28. Bouws E. Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water : 1. Spectral form. / E. Bouws, H. Gunther, W. Rosenthal, C.L. Vincent // J. Geophys. Res., 1985. - **90**, No. C1. - P. 975-86.

29. Chakraborty R. Water wave scattering by a rectangular trench / R. Chakraborty,· B.N. Mandal // J. Eng. Math., 2014. – **89**. -P. 101–112.

30. Chakraborty R. Oblique wave scattering by a rectangular submarine trench / R. Chakraborty, B.N. Mandal // ANZIAM J., 2015. – **56**. - P. 286–298.

31. Chamberlain P. G. The modified mild-slope equation / P.G. Chamberlain, D. Porter // J. Fluid Mech., 1995.- **291**.- P. 393-407.

32. Daemrich K.-F. Influence of spectral density influence of spectral density distribution on wave parameters and simulation in time domain./ K.-F. Daemrich, S. Mai, N. Ohle, E. Tautenhain // 2nd Chinese - German Joint Symp. on Coastal and Ocean Eng. 2004, October 11 to 20. Nanjing, China . – 2004. - 12 p.

33. Dalrymple R.A. Reflection and transmission from porous structures under oblique wave attack / R.A. Dalrymple, V.A. Losada, PA. Martin // J . Fluid Mech., 1991. – **224**. -P. 625-644.

34. Dalrymple R.A. Wave diffraction through offshore breakwaters / R.A. Dalrymple, P.A. Martin // J.of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 1990. - **116**, No.6 . -P. 727-741.

35. Devillard P. Localization of gravity waves on a channel with a random bottom / P. Devillard, F. Dunlop, B. Souillard // J. Fluid Mech., 1988 . – **186** . -P. 521-538.

36. Gerwick B.C. Construction of marine and offshore structures / B.C. Gerwick // CRC Press, 2007, 802p.

37. Goda Y. Random seas and design of martimer structures / Y. Goda. - World Scientific Publishing , 2000. - 462 p..

38. Guazzelly E. Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds / E. Guazzelly, V. Rey, M Belzons // J . Fluid Mech.,1992 .- **245**. -, P. 301-317.

39. Guedes Soares C. Representation of double-peaked sea wave spectra / C. Guedes Soares // Ocean Engineering, 1984. -**11**, No. 2. -P. 185-207.

40. Hasselmann K. Measurement of windwave growth and swell decay during the joint North Sea wave project (JOHNSWAP) / K. Hasselmann., N.P. Barnett, E. Bouws, H. Carlson, D.E. Cartwright, K. Enke, J.A. Ewing, H. Gienapp, D.E. Hasselmann, P. Müller, D.J. Olbers, K. Richter, W. Sell, H. Walden // Deutsche Hydrographisce Zeitschrift, 1973. - No. 12. -P.1-95.

41. Hu H. Wave motion over a breakwater system of a horizontal plate and a vertical porous wall / H. Hu, K.-H. Wang, A.-H. Williams // Ocean Engineering, 2002. – **29**. -P. 373–386.

42. Hudspeth R.T. Waves and wave forces on coastal and ocean structures/ R. T. Hudspeth. - World Scientific Publishing, 2006. - 954 p.

43. Hunt J.N. Direct solution of wave dispersion equation / J.N. Hunt // J. - Waterway, Port, Coast. and Ocean Eng., 1979. – **105. -** P. 457–459.

44. Jung T.-H. Linear wave reflection by trench with various shapes / T.-H. Jung, K.-D. Suh, S.O. Lee, Y.-S. Cho // Ocean Engineering, 2008. – **35 . -**P. 1226 – 1234.

45. Kagemoto H. Revisiting the complete wave transmission and reflection due to an array of 2-D surface-piercing truncated plates fixed in regular incident waves / H. Kagemoto // Ocean Engineering, 2011. – **38**. -P. 976-982.

46. Kamphuis J.W. Introduction to coastal engineering and management / J. W. Kamphuis. - Worfd Scientific Pubiishing, 2000. - 470 p.

47. Kanoria M. Water-wave scattering by thick vertical barriers / M Kanoria, D. P. Dolai, B.N. Mandal // J. Eng. Math., 1999.- **35.** -P. 361–384.

48. Kanoria M. Water wave scattering by a submerged thick wall with a gap / M. Kanoria // Applied Ocean Research, 1999 . – **21**. -P. 69–80

49. Kitaigorodskiy S.A. On Phillips' theory of equilibrum range in the spectra of wind-generated gravity waves / S. A. Kitaigorodskiy, V. P. Krasitskiy, M.M. Zaslavskiy // J.. Phys. Oceanogr., 1975. - **5**, No.3. -P. 410-420.

50. Kirby J.T. Propagation of obliquely incident water waves over a trench / J. T. Kirby, R.A. Dalrymple // J . Fluid Mech., 1983. – **133**. - P. 47-63.

51. Komen G.J. Dynamics and modeling of ocean waves / G.J. Komen, L. Cavaleri, M. Donelan, K. Hasselman, S. Hasselman, P.A.E.M. Janssen. - Cambridge University Press, 1994.-555 p.

52. LeBlond P.H. Wave spectra in Canadian waters. / P.H. LeBlond, S.M. Calisal, M. Isaacson.- Can. Contract. Rep. Hydrogr. Ocean Sci., 1982. - 6:57 p. + 134 p. Appendices.

53. Lee J.-J. Wave propagation over a rectangular trench / J.-J. Lee, R.M. Ayer // J. Fluid Mech., 1981. – **110** .-P. 335-347.

54. Lee J.L. Modeling of Wave Scattering by Vertical Barriers / J.L. Lee, D.Y. Lee // Proc. of the Thirteenth International Offshore and Polar Engineering Conference. Honolulu, Hawaii, USA 2003, -7 p,.

55. Lin P. Analytical study of linear long-wave reflection by a two-dimensional obstacle of general trapezoidal shape / P. Lin, H.-W. Liu // J. Eng. Mech., 2005.- **131**, No. 8. -P. 822-830.

56. Linton C.M. Handbook of Mathematical Techniques for Wave. Structure Interactions / C.M. Linton, P. McIver .- Chapman & Hull/CRC, 2001. - 298 p.

57. Liu H.-W. An analytic solution to the modified mild-slope equation for wave propagation over one-dimensional piecewise smooth topographies / H.-W. Liu, J. Yanga, P. Lin // Wave Motion, 2012. – **49. -**P. 445–460.

58. Liu H.-W. Analytic solution to the modified mild-slope equation for reflection by a rectangular breakwater with scour trenches / H.-W. Liu, D.-J. Fu, X.-L. Sun // J. Eng. Mech., 2013.- **139**. -P. 39-58.

59. Liu H.-W. Analytical solution for long-wave reflection by a general breakwater or trench with curvilinear slopes / H.-W. Liu, J.-X. Luo, P. Lin, R. Liu // J. Eng. Mech., 2013.- **139**, No. 2. -P. 229-245.

60. Losada I. J. Wave spectrum scattering by vertical thin barriers / I.J. Losada, M.A. Losada, M. Losada // Applied Ocean Res., 1994. – **16**. -P.123-128.

61. Losada I. J. Propagation of oblique incident waves past rigid, vertical thin barriers / I.J. Losada, M.A. Losada, A.J. Roldan // Appl. Ocean Res., 1992. -**14**. -P. 191-99.

62. Mandal B.N. Water Wave Scattering / B.N. Mandal, S. De. - CRC Press, 2015 .- 375 p.

63. Massel S. On the geometry of ocean surface waves / S. Massel // Oceanology, 2011. - **53**, No. 2. -P. 521-548.

64. Massel S.R. Hydrodynamics of coastal zones / Elsevier Science Publishers B.V., 1989. - 335 p.

65. Massel S.R. Transmission of random wind waves through perforated or porous breakwaters / S.R. Massel, C.C. Mei // Coastal Engineering, 1977. -**1**. -P.63-78.

66. McIver P. Scattering of water waves by two surface-piercing vertical barriers / P. McIver // IMA J. of Applied Mathematics, 1985. – **35**.-P. 339-355.

67. McIver P. The dispersion relation and eigenfunction expansions for water waves in a porous structure / P. McIver // J. Eng. Math.1998. – **34**. -P. 319–334.

68. Mei C.C. Scattering of surface waves by rectangular obstacle in water of finite depth / C.C. Mei, J. Black // J. Fluid Mech., 1969. - **38**, pt. 3.-P.499-511.

69. Mei C.C. Theory and applications of ocean surface waves / C.C. Mei, M. Stiassnie, D.K.-P. Yue. - World Scientific Publishing, 2005.- 1135 p.

70. Miles J.W. Surface-wave scattering matrix for a shelf / J.W. Miles // J . Fluid Mech., 1967. - **28**, part 4.- P. 755-767.

71. Newman J.N. Propagation of water waves over an infinite step / J.N. Newman // J . Fluid Mech., 1965. - **23**, part 2. -P. 399-415.

72. Newman J.N. Propagation of water waves past long two-dimensional obstacles / J.N. Newman // J. Fluid Mech., 1965. - **23**, part 1. -P. 23-29.

73. Ochi M.K. Ocean waves. The stochastic approach / M.K. Ochi. - Cambridge University Press, 1998. - 333 p.

74. Ochi M.K. Hurricane-Generated Seas / M.K. Ochi .- Elsevier, 2003.-155 p.

75. O'Hare T.J. A new model for surface wave propagation over undulating topography / T.J. O'Hare, A.G. Davies // Coastal Engineering, 1992.-**18**. -P. 251-266.

76. Ohle N. Influence of spectral shape on wave parameters and design method in time domain. Ocean waves measurement and ahalysis // N. Ohle, K. Daemrich, E. Tautenhain // 5th Int. Symp. WAVES 2005, 3rd-7th July, 2005, Madrid, Spain. – 2004.- Paper No. 150. -10 p.

77. Pierson W.J. A proposed spectral form for fully developed sea based on the similarity theory of S.A. Kitaigorodskii / W.J. Pierson, L.A. Moskowitz // J. Geoph. Res., 1964. - **69**, No. 24. – P. 5181-5190.

78. Porter R. Complementary approximations to wave scattering by vertical barriers / R. Porter, D.V. Evans // J. Fluid Mech., 1995. – **294**. -P. 155-180.

79. Rey V. Propagation of surface gravity waves over a rectangular bar / V. Rey, M. Belzone, E. Guazzelli // J. Fluid Mech., 1992. – **235**. -P. 453-479.

80. Sahoo T. On the scattering of water waves by porous barriers / T. Sahoo // ZAMM, 1998. – **5**. -P. 364-370.

81. Sawaragi T. Coastal engineering – waves, beaches, wave-structures interactions / T. Sawaragi. - Elsevier, 1995. - 497 p.

82. Savill A.M. Recent developments in rapid-distortion theory / A. M. Savill // Annual Rev. Fluid Mech., 1987. -**19**. -P. 531-575.

83. Seo S.-N. Transfer matrix of linear water wave scattering over a stepwise bottom / S.-N. Seo // Coastal Engineering, 2014. – **88**. -P. 33–42.

84. Shen Y.M. On the radiation and diffraction of linear water waves by a rectangular structure over a sill. Part I. Infinite domain of finite water depth / Y.M. Shen, Y.H. Zheng, Y.G. You // Ocean Engineering, 2005. – **32** . -P. 1073–1097.

85. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity: I. Removal, interpretation, and analysis/ G.B. Sinclair // Appl. Mech. Rev, 2004.- **57**, No.4.- P. 251-297.

86. Sneddon I.N. Mixed Boundary value Problems in Potential Theory / I.N. Sneddon .-Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1966.- 292 p.

87. Sobey R. J. The distribution of zero-crossing wave heights and periods in a stationary sea state / R.J. Sobey // Ocean Engng., 1992. - **19**, No. 2. -P.101-118

88. Sollitt C.K. Wave transmission through permeable breakwaters / C.K. Sollitt, R.H. Cross // Proceedings of the 13-th Conference on Coastal Engineering, Vancouver, ASCE, 1972.- P. 1827–846.

89. Takano K. Effets d'un obstacle parallélépipédique sur la propagation de la houle / K. Takano // La Houille Blanche, 1960.- **15**, No.3. -P.247-267.

90. Takano K. Effets d'un obstacle de parallélépipédique rectangle sur la propagation de la houle / K. Takano, H. Nakazawa // J. of the Oceanogr. Soc. of Japan, 1966.- **22**, No.5. -P. 1-9.

91. Torsethaugen K. A Two peak wave spectrum model / K. Torsethaugen // Proceedings of the 12th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 1993. -P. 175-180.

92. Tsai C.-C. On step approximation for Roseau's analytical solution of water waves / C.-C. Tsai, T.-W. Hsu, Y.-T. Lin // Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, **2011**, Article ID 607196.- 20 p.

93. Usha R. Wave motion over a twin-plate breakwater / R. Usha, T Gayathri / Ocean Engineering, 2005. -**32**. -P. 1054–1072.

94. Wang K.-H. Wave motion over a group of submerged horizontal plates Int / K.-H. Wang, Q Shen // J. Eng. Science, 1999. – **37**. –P. 703-715.

95. Wiegel R. L. Transmission of wave past a rigid vertical thin barrier / R.L. Wiegel // J. Waterways & Harbors Division, ACSE, 1960. - **86**, No. WW1. -P. 1-12.

96. Xie J.-J. Analytical Solution for Long-Wave Reflection by a Rectangular Obstacle with Two Scour Trenches / J.-J. Xie, H.-W. Liu, P. Liu // J. Eng. Mech., 2011. - **137**, No. 12. -P. 919-930.

97. Young I.R. Wind generated ocean waves / I.R. Young .- Elsevier Science Ltd., 1999.- 307 p.

98. Yu X. Diffraction of water waves by porous breakwater / X. Yu// J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., 1995. - **121**, No. 6.-P. 275-282.