УДК 532.528

ІМПУЛЬСНИЙ УДАР ЗАНУРЕНОГО ТІЛА

Ю. А. Семенов†, Ю. М. Савченко, Г. Ю. Савченко, О. І. Наумова

Інститут гідромеханіки НАН України
вул. Марії Капніст, 8/4, 03057, Київ, Україна
†*E-mail: yuriy.a.semenov@gmail.com*

Отримано 21.09.2023

У результаті розв'язання задачі з вільною межею отримано аналітичний розв'язок для імпульсного удару циліндричного тіла з довільним поперечним перерізом, зануреного під незбурену поверхню води. Досліджуваний випадок руху жорсткого тіла в рідині кінематично еквівалентний випадку руху рідини навколо нерухомого жорсткого тіла з прискоренням рідини. Задачу сформульовано в неінерційній системі координат, пов'язаній з тілом. Її розв'язання дозволяє визначити всі характеристики течії в системі координат, пов'язаній з незбуреною рідиною до удару. Для отримання комплексного потенціалу та комплексної швидкості, заданих у площині параметрів, застосовано метод інтегрального годографа. Крайову задачу зведено до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. Одне з них – відносно величини швидкості вільної поверхні, а інше – відносно напряму швидкості на донній поверхні. Поле швидкостей, імпульсний тиск на поверхні тіла та приєднану масу визначено в широкому діапазоні глибин занурення для різних форм поперечного перерізу тіла: плоскої пластини, кругового циліндра, прямокутника. Відповідні приєднані маси знайдено залежно від глибини занурення. У міру того як значення глибини занурення збільшується до нескінченності, приєднана маса прямує до значення, яке відповідає приєднаній масі в необмеженій області рідини. Показано, що удари вгору та вниз індукують однакові величини швидкості на вільній поверхні й однакові коефіцієнти приєднаної маси, але з протилежними напрямками швидкості руху. Отриманий розв'язок можна розглядати як наближення першого порядку при розв'язанні задачі методом малих часових рядів. Наявність вільної поверхні не змінює структуру потоку поблизу тіла, який визначає приєднану масу. Тому можна очікувати, що отримані результати будуть відображати реальні ситуації, аналогічні тим, які мають місце у випадку необмеженої області рідини.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: імпульс тиску, приєднана маса, комплексний потенціал, інтегральний метод годографа

На цей документ поширюється дія ліцензії CC-BY-NC-ND 4.0

DOI: https://doi.org/10.15407/jha2024.01.095

1. ВСТУП

Поняття імпульсного тиску бере початок з роботи Лагранжа (1983) [1], у якій він інтерпретував добуток густини на потенціал швидкості як імпульс тиску, необхідний для того, щоб раптово виштовхнути рідину зі стану спокою до її поточної швидкості. У цьому контексті варто також згадати першу роботу Жуковського (1984) [2] про зіткнення двох сфер, одна з яких наполовину занурена в рідину – у ній спочатку розглядалася приєднана маса.

Концепція імпульсного тиску отримала подальший розвиток у роботах фон Кармана (1929) [3] і Вагнера (1932) [4], які вивчали початкові стадії бурхливих ударних водних течій стосовно умов посадки літака та спуску корабля на воду. Хейвлок 1949 р. досліджував імпульсний рух циліндра зі сталою швидкістю [5] і сталим прискоренням [6] відповідно. Він застосував лінеаризовану граничну умову вільної поверхні та дослідив повну еволюцію останньої. Тиванд і Мілох (1995) [7] моделювали нестаціонарну нелінійну течію на вільній поверхні за допомогою методу розкладу малого часового ряду. При цьому враховувалися досить високі порядки членів, щоб врахувати основний гравітаційний вплив на висоту поверхні та спрогнозувати гідродинамічну силу, яка діє на циліндр. Пов'язану з цим проблему входу (виходу) води з круглого циліндра теоретично й експериментально дослідив Грінхау зі співавторами [8, 9].

Імпульсна концепція використовується для прогнозування впливу хвиль на морські та прибережні споруди [10], ударів кораблів [11], імпульсного вертикального руху тіла, яке спочатку плаває на плоскій вільній поверхні [12], течій, що проривають дамбу [13], імпульсного плескання в контейнерах і резервуарах [14], імпульсного удару крапель об тверду чи рідку поверхню [15]. Розв'язок, заснований на імпульсній концепції, може призвести до появи нескінченної швидкості там, де вільна поверхня зустрічається з твердим тілом. У таких випадках імпульсне наближення використовується як зовнішній розв'язок, який необхідно узгодити з внутрішнім поблизу контактної лінії за допомогою методу узгодженого асимптотичного розкладу [12, 16–18].

Математичні моделі імпульсних течій базуються на теорії нестисливої та безобертової течії, тому можна ввести потенціал швидкості. Перед ударом вільна поверхня вважається плоскою, під час удару потенціал на вільній поверхні залишається нульовим. Крайову задачу для потенціалу швидкості можна записати так:

$$\Delta\Phi' = 0 \qquad \text{в області рідини,} \tag{1}$$

$$\Phi' = 0 \qquad \text{на вільній поверхні,} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial n} = -Un_y \qquad \text{на поверхні тіла,} \tag{3}$$

де U – швидкість одразу після удару; $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні тіла; n_y – її компонента в напрямку осі Y.

Співвідношення (1)–(3) доповнюються умовою далекого поля:

$$|\nabla\Phi'| \to 0, \quad x^2 + y^2 \to \infty. \tag{4}$$

Вивчення приєднаної маси становить інтерес у зв'язку з концепцією дрейфового об'єму, введеною в механіку рідини Дарвіном 1953 р. [19]. Використовуючи теорію по-

тенційної течії, він показав, що для круглого циліндра дрейфовий об'єм між початковим і кінцевим положеннями тіла (на нескінченності вище течії та за течією відповідно) дорівнює приєднаному об'єму маси циліндра. Пізніше це було підтверджено для сфери [20]. Петерс і Лозе [21] представили експериментальне дослідження для диска, який імпульсно приводиться в рух на площині розділу нафта–вода. Вони показали, що існує часове вікно універсальної поведінки захопленої нафти для різних чисел Фруда.

На відміну від попередніх досліджень, ми розглядаємо імпульсний рух тіла, повністю зануреного в рідину. До цього спонукає знайомство з проблемами гідродинаміки морських високошвидкісних суден на підводних крилах: вони можуть зазнавати раптових вертикальних ударів, спричинених ударами хвиль об основний корпус [11]. Імпульсний тиск на тіло, швидкість на вільній поверхні й відповідна приєднана маса визначаються в широкому діапазоні глибин занурення та для різних форм, включаючи плоску пластину, круглий циліндр і прямокутник.

2. КРАЙОВА ЗАДАЧА

Схему фізичної області течії показано на Рис. 1а. Тіло, занурене під спокійну вільну поверхню симетрично відносно осі Y, тому розглядається лише половина області течії. Перед ударом, при $t = 0$, тіло і рідина перебувають у спокої. У момент $t = 0^+$ тіло раптово починає рухатися з прискоренням a, спрямованим униз таким чином, що протягом нескінченно малого інтервалу часу $\Delta t \to 0$ швидкість тіла досягає значення U. Задача про рух твердого тіла в рідині кінематично еквівалентна задачі про рух рідкого тіла навколо нерухомого твердого тіла з прискоренням a на нескінченності. Визначимо неінерціальну декартову систему координат XY, зв'язану з тілом у точці A, та інерціальну систему координат $X'Y'$, в якій швидкість рідини на нескінченності дорівнює нулю. Вважається, що тіло має довільну форму, яка може бути визначена нахилом тіла як функцією координати довжини дуги S: $\beta_b = \beta_b(S)$. Рідина вважається ідеальною та нестисливою. Починаючи зі стану спокою, в усі наступні моменти часу течія залишається необертальною. Сила тяжіння й поверхневий натяг не враховуються.

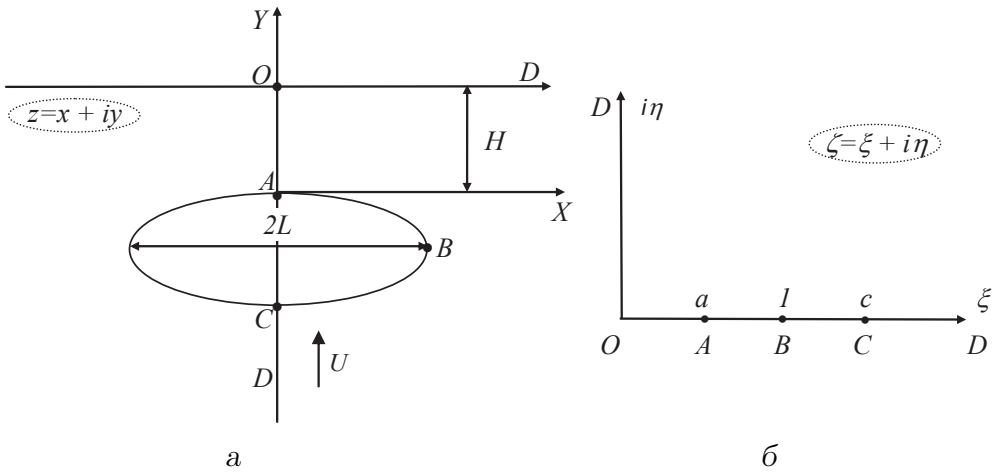

Рис. 1. Схема фізичної площини (а), параметрична або $\zeta-$площина (б)

Прийнявши $Z = X + iY$, уведемо комплексні потенціали

$$W(Z) = \Phi(X,Y) + i\Psi(X,Y), \qquad W'(Z) = \Phi'(X,Y) + i\Psi'(X,Y).$$

У цих термінах поля швидкостей пов'язані таким чином:

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{dW'}{dZ} - iat, \tag{5}$$

де a – прискорення; $0 < t < \Delta t$; $\Delta t \to 0$. Інтегруючи рівняння (5), знаходимо

$$W = W' - iatZ, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W'}{\partial t} - iaZ, \qquad \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - aY. \tag{6}$$

Підставивши останнє рівняння в рівняння Бернуллі

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{|V'|^2}{2} = \frac{p_a}{\rho} \tag{7}$$

та проінтегрувавши його на нескінченно малому інтервалі часу $\Delta t \to 0$, отримуємо

$$P = \int\limits_0^{\Delta t} p dt = -\rho\Phi + \rho UY. \tag{8}$$

Тут p і P – тиск та імпульсний тиск відповідно; $U = a\Delta t$; $|V'| < \infty$ – абсолютна величина швидкості; p_a – тиск на вільній поверхні. Інтеграли останніх величин при $\Delta t \to 0$ прямують до нуля.

Уведемо безрозмірні величини, нормовані на U, L і ρ:

$$v = |V|/U, \qquad x = X/L, \qquad y = Y/L, \qquad h = H/L, \qquad \phi(s) = \Phi(S)/(LU).$$

Вертикальну імпульсну силу F_y отримуємо інтегруванням імпульсного тиску на поверхні тіла:

$$F_y = -2\rho L^2 U \int\limits_{s_A}^{s_C} \phi(s)\cos(n,y)ds - 2\rho UA = \rho m L^2 U, \tag{9}$$

де s – координата довжини дуги вздовж поверхні тіла; s_A і s_C – довжини дуги для точок A і C; m – коефіцієнт приєднаної маси; A – площа поперечного перерізу. Коефіцієнт 2 відображає урахування сили, що діє на частину тіла, симетричну відносно осі Y. Унаслідок симетрії тіла відносно осі Y горизонтальна імпульсна сила дорівнює нулю.

Наша основна мета полягає у визначенні потенціалу швидкості $\phi(s)$ відразу після удару.

3. КОНФОРМНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ

Пряме знаходження комплексного потенціалу $w(z)$ є проблематичним. Тому введемо площину допоміжних параметрів ($\zeta-$площину), як запропоновано 1890 р. Мішелем [22] і Жуковським [23]. Сформулюємо крайові задачі для комплексної функції швидкості dw/dz і для похідної комплексного потенціалу $dw/d\zeta$ – обидві вони визначені в $\zeta-$площині. Тоді похідну функції відображення отримують як

$$\frac{dz}{d\zeta}\frac{dw/d\zeta}{dw/dz}.$$

Її інтегрування забезпечує відновлення функції відображення $z = z(\zeta)$, яка пов'язує координати в параметричній і фізичній площинах.

Оберемо перший квадрант $\zeta-$площини (див. Рис. 1б) як область, яка відповідає області рідини у фізичній площині (Рис. 1а). Теорема про конформне відображення дозволяє довільно вибирати розташування трьох точок: початку координат $O(\zeta = 0)$, D (D') на нескінченності та B при $\zeta = 1$ (див. Рис. 1б). Положення точок A $(\zeta = a)$ і C $(\zeta = c)$ визначають, виходячи з розв'язку задачі та фізичних міркувань.

3.1. Вирази для комплексної швидкості та похідної комплексного потенціалу

Тіло вважаємо нерухомим, тому його нахил і напрямок швидкості збігаються. Далі, на цьому етапі ми припускаємо, що величина швидкості на вільній поверхні – відома функція параметричної змінної $v(\eta)$. Тоді крайову задачу для комплексної швидкості в першому квадранті параметричної площини можна записати таким чином:

$$\chi(\xi) = \arg\left(\frac{dw}{dz}\right) = \begin{cases} -\beta_b(a) + \beta_0, & 0 \le \xi \le a, \\ -\beta_b(\xi), & a \le \xi \le c, \\ -\beta_b(c) - \beta_0, & c \le \xi < \infty. \end{cases} \tag{10}$$

$$v(\eta) = \left|\frac{dw}{dz}\right|_{\zeta=i\eta}, \qquad 0 \le \eta < \infty. \tag{11}$$

Тут $\beta_0 = \pi/2$; $\beta_b(a) = \pi$; $\beta_b(c) = 0$. Рівняння (10) задовольняє умови $\chi(\xi) = -\pi/2$ вздовж інтервалів OA і CD на лінії симетрії та $\chi(\xi) = -\beta_b(\xi)$ вздовж тіла. Аргумент комплексної швидкості демонструє стрибки $\Delta = -\pi/2$ в точках A і C при русі вздовж межі в фізичній площині від точки O до точки D. Цю крайову задачу можна розв'язати, застосувавши інтегральну формулу [24]

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty \exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\chi}{d\xi}\ln\left(\frac{\zeta+\xi}{\zeta-\xi}\right)d\xi - \frac{i}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\ln v}{d\eta}\ln\left(\frac{\zeta-i\eta}{\zeta+i\eta}\right)d\eta + i\chi_\infty\right], \tag{12}$$

де $v_\infty = v(\eta)_{\eta\to\infty}$ і $\chi_\infty = \chi(\xi)_{\xi\to\infty}$. Підставляючи рівняння (10) і (11) у співвідношення (12) та обчислюючи перший інтеграл за східчастою зміною в точках $\zeta = a$ і $\zeta = c$, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= v_\infty \left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a}\right)^{1/2}\left(\frac{\zeta-c}{\zeta+c}\right)^{1/2} \times \\ &\times \exp\left[\frac{1}{\pi}\int_a^c \frac{d\beta_b}{d\xi}\ln\left(\frac{\zeta-\xi}{\zeta+\xi}\right)d\xi - \frac{i}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\ln v}{d\eta}\ln\left(\frac{\zeta-i\eta}{\zeta+i\eta}\right)d\eta - i\beta_0\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Легко перевірити, що для $\zeta = \xi$ аргументом правої частини (13) є функція $-\beta_b(\xi)$, а для $\zeta = i\eta$ модуль (13) тотожно дорівнює функції $v(\eta)$. Таким чином, граничні умови (10) і (11) задовольняються. Зауважимо також, що комплексна функція швидкості має нулі порядку 1/2, які відповідають течії навколо кута $\pi/2$ в точках A і C.

Щоб отримати похідну комплексного потенціалу, спершу проаналізуємо його поведінку. Перед ударом вільна поверхня плоска й збігається з віссю (див. Рис. 1а). Тиск уздовж вільної поверхні сталий. Тоді, як випливає з рівняння Ейлера, набута в результаті удару швидкість перпендикулярна до вільної поверхні, де тиск сталий, або швидкість спрямована в напрямку осі Y. Отже, x-компонента швидкості дорівнює нулю, а $dw = (dw/dz)dz = (v_x - iv_y)dx = -ivdx$. Таким чином, вільна поверхня відповідає інтервалу $(-\infty, 0)$ на уявній осі ψ в $w-$площині. $\mathbf{Im}\,(w) = 0$ уздовж прямої $OABCD$ завдяки умові непроникності на тілі ABC та інтервалах OA і CD лінії симетрії. При цьому $\mathbf{Re}\,(w)$ змінюється від нуля в точці O до $-\infty$ на нескінченності D. Таким чином, область течії у фізичній площині відповідає третьому квадранту w-площини. Вони пов'язані між собою як $w = -K\zeta$, де K – додатне дійсне число, звідки

$$\frac{dw}{d\zeta} = -K. \tag{14}$$

Проста форма комплексного потенціалу $w(\zeta) = -K\zeta + w_O$ дозволяє виключити параметр ζ і отримати розв'язок у формі Кірхгофа, для якого комплексна швидкість є функцією комплексного потенціалу. Тут w_O – комплексний потенціал у точці O. Похідна функції відображення отримується в результаті ділення співвідношення (14) на (13):

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= -K\left(\frac{\zeta+a}{\zeta-a}\right)^{1/2}\left(\frac{\zeta+c}{\zeta-c}\right)^{1/2} \times \\ &\times \exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_a^c \frac{-d\beta_b}{d\xi}\ln\left(\frac{\zeta-\xi}{\zeta+\xi}\right)d\xi + \frac{i}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{d\ln v}{d\eta}\ln\left(\frac{\zeta-i\eta}{\zeta+i\eta}\right)d\eta + i\beta_0\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Інтегрування цього рівняння дає функцію відображення $z = z(\zeta)$, яка зв'язує параметричну й фізичну площини. Рівняння (13) і (14) містять параметри a, c, K, а також функції $v(\eta)$ і $\beta_b(\xi)$. Усі вони мають бути визначені з фізичних міркувань і кінематичної граничної умови на вільній поверхні та на твердій межі $OABCD$.

3.2. Граничні умови на тілі

Довжини дуг s_{AB} між точками A і B і s_{BC} між точками B і C, а також глибина занурення визначаються таким чином:

$$\int\limits_a^1 \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\xi} = s_{AB}, \qquad \int\limits_1^c \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\xi} = s_{BC}, \qquad \int\limits_0^a \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\xi} = h. \tag{16}$$

Невідому функцію $\beta_b(\xi)$ знаходять з інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{d\beta_b}{d\xi} = \frac{d\beta_b}{ds}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\xi}, \tag{17}$$

де $\beta_b(s)$ – задана функція. Воно Рівняння розв'язується методом ітерацій з використанням значення $d\beta_b/d\xi$, обчисленого на попередній ітерації за співвідношенням (15).

3.3. Граничні умови на на вільній поверхні

Імпульсний удар характеризується нескінченно малим інтервалом часу $\Delta t \to 0$ – таким, що положення вільної поверхні не змінюється під час удару. З рівнянь Ейлера випливає, що індукована ударом швидкість перпендикулярна до вільної поверхні ($p = p_a$):

$$\arg\left(\left.\frac{dw}{dz}\right|_{\zeta=i\eta}\right) = -\beta_0, \qquad 0 \le \eta \le \infty. \tag{18}$$

Взявши аргумент комплексної швидкості зі співвідношення (13), отримаємо для функції $d\ln v/d\eta$ інтегральне рівняння

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\ln v}{d\eta} \ln\left|\frac{\eta'-\eta}{\eta'+\eta}\right| d\eta' + \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\eta}{a}\right) + \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\eta}{c}\right) + \frac{2}{\pi}\int\limits_a^c \frac{d\beta_b}{d\xi}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) d\xi = 0, \tag{19}$$

яке є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду з логарифмічним ядром. Його розв'язок має вигляд

$$v(\eta) = \sqrt{\eta^2+a^2}\sqrt{\eta^2+c^2}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_a^c \frac{d\beta_b}{d\xi}\ln(\eta^2+\xi^2)d\xi\right). \tag{20}$$

Подробиці щодо його знаходження подано в Додатоку.

Співвідношення (16), (17) і (19) утворюють замкнену систему рівнянь відносно параметрів a, c, K та функцій $\beta_b(\xi)$ і $\ln v(\eta)$.

4. РЕЗУЛЬТАТИ

Отримані результати наведено в системі координат, пов'язаній з рідиною на нескінченності. Спричинений імпульсним ударом плоскої пластини розподіл швидкості на вільній поверхні показано на Рис. 2 для різних глибин занурення. Три положення пластини позначені товстими горизонтальними лініями – кожна має той самий колір, що й відповідний розподіл швидкості.

Одразу після удару пластина набуває швидкості -1. При відносно невеликій глибині занурення $h < 0.25$ швидкість рідини над пластиною $|x| < 1$ близька до -1, тобто пластина захоплює рідину й вони рухаються майже разом. За межами пластини, $|x| > 1$ відбувається витіснення рідини й вона рухається вгору, забезпечуючи баланс притоку й витоку з цієї області. Чим більша глибина занурення пластини, тим слабкіше реагує вільна поверхня.

Залежності розподілу швидкості вздовж вільної поверхні та імпульсного тиску від координати довжини дуги s для круглого циліндра показані на Рис. 3а та б відповідно. Координати $s = 0$ і $s = \pi$ відповідають верху (точка A) й низу (точка C) циліндра. У нижній частині циліндра тиск позитивний і слабо залежить від глибини занурення. У верхній частині тиск від'ємний, але зростає в міру наближення циліндра до вільної поверхні.

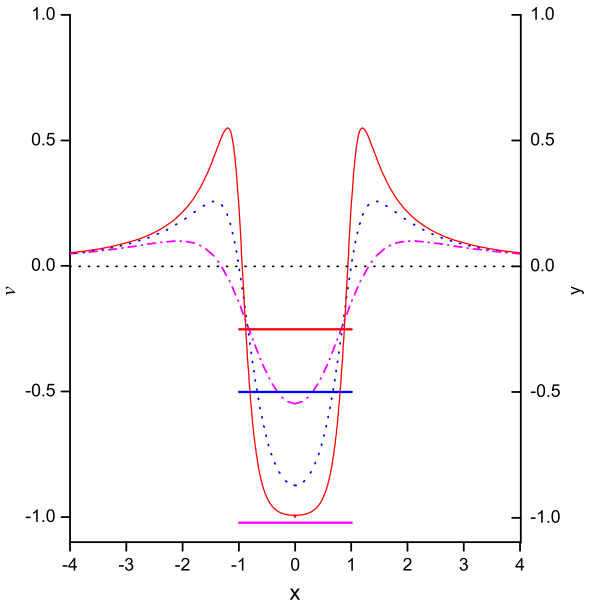

Рис. 2. Величина швидкості на вільній поверхні (ліва вісь)
для різних глибин занурення (права вісь):
$h = 0.25$ — червона неперервна; $h = 0.5$ — синя штрихова;
$h = 1$ — пурпурова штрих-пунктирна

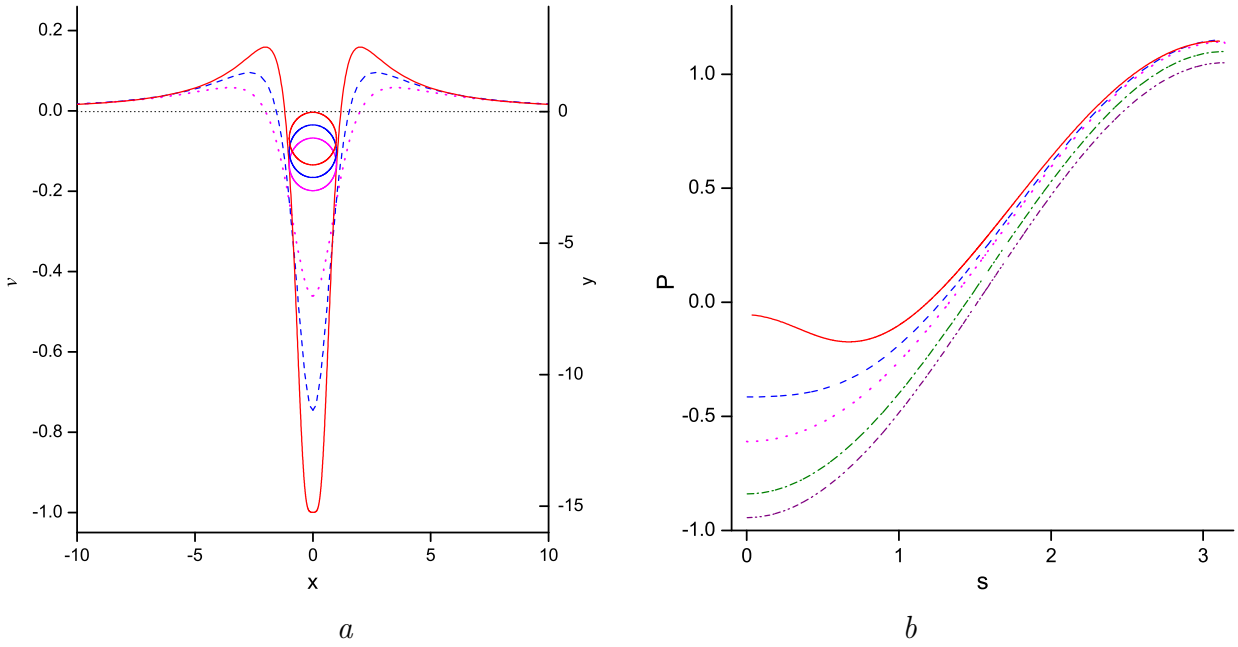

Рис. 3. Швидкість уздовж вільної поверхні (а)
та імпульсний тиск уздовж циліндра (б) для різних глибин занурення:
$h = 0.02$ — червона неперервна; $h = 0.1$ — синя штрихова; $h = 1$ — пурпурова пунктирна;
$h = 3$ — зелена штрих-пунктирна; $h = 10$ — фіолетова штрих-пунктирна

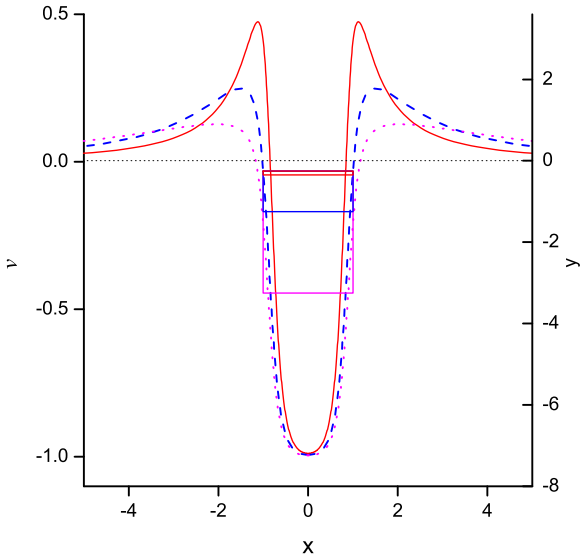

Рис. 4. Швидкість уздовж вільної поверхні (ліва вісь), індукована ударом прямокутника, зануреного на глибину $h = 0.25$, і положення самого прямокутника (права вісь): $b = 0.1$, $m = 2.272$ — червона неперервна; $b = 1$, $m = 2.786$ — синя штрихова; $b = 3$, $m = 3.241$ — пурпурова пунктирна

Табл. 1. Коефіцієнт приєднаної маси для різних форм тіла та глибини занурення (* – необмежена область рідини)

h	0	0.02	0.05	0.1	0.3	0.5	1	5	50	∞^*
Пластинка	1.571	1.624	1.735	1.876	2.265	2.516	2.835	3.108	3.137	π
Круг	–	2.090	2.111	2.162	2.370	2.531	2.777	3.104	3.141	π
Квадрат	–	2.993	3.011	3.048	3.292	3.552	4.024	4.667	4.754	4.754

Реакція вільної поверхні, викликана імпульсним ударом зануреного прямокутника, показана на Рис. 4 для глибини $h = 0.25$ і різних значень довжини b сторони прямокутника. На графіку верхні сторони всіх прямокутників збігаються ($y = -h$), а нижні ($y = -h - b$) показані лініями відповідних кольорів.

Для прямокутника малої довжини ($b = 0.1$) розподіл швидкості дуже близький до розподілу для пластинки на глибині $h = 0.25$, показаного на Рис. 2. Зі збільшенням b швидкість зменшується, тоді як зона вільної поверхні в напрямку осі X, на яку суттєво впливає удар, розширюється. Така поведінка забезпечує баланс між рухом рідини за та течією та проти неї.

Коефіцієнти приєднаної маси для різних форм тіла наведено в Табл. 1. При $h \to 0$ (для плоскої пластини) $m \to \pi/2$. Це узгоджується з величиною приєднаної маси для плоскої пластини, що плаває на вільній поверхні (розв'язок фон Кармана для удару). При великій глибині занурення ($h = 50$) вплив вільної поверхні стає незначним, а коефіцієнт приєднаної маси наближається до значення, яке відповідає приєднаній масі в необмеженій рідині.

Грінхау і Янбао представили аналітичну формулу Волтона для приєднаної маси зануреного циліндра [9]. Еквівалентний вираз запропонував Венкатесан [25]. Обидві формули містять еліптичні інтеграли і досить складні для обчислень. Через це Грінхау і Янбао [9] запропонували поліноміальне наближення, яке забезпечує точність у межах 2%. Зазначимо, що різниця між результатами, отриманими нами, та величинами, розрахованими на основі апроксимаційної формули, також становить $< 2\%$.

5. ІМПУЛЬСНИЙ УДАР УГОРУ

Проаналізуємо, як напрямок зіткнення з зануреним тілом впливає на поле швидкостей. У системі координат, пов'язаній із тілом, зміна напрямку удару призводить до зміни напрямку швидкості рідини на нескінченності і на всій твердій межі, включаючи тіло та лінію симетрії. Рівняння (10) збереже свій вигляд, якщо ми задамо значення $\beta_0 = -\pi/2$, $\beta_b(a) = 0$ і $\beta_b(c) = -\pi$ або ж віднімемо π від $\chi(\xi)$. У цьому випадку вираз для комплексної швидкості (13) також залишається незмінним. Похідна комплексного потенціалу отримується з (14) при зміні знаку виразу. Таким чином, усі рівняння задачі зберігають свій вигляд, а величина швидкості на вільній поверхні (20) залишається однаковою для напрямків удару як угору, так і вниз.

У системі координат, пов'язаній з рідиною, зміна напрямку удару призводить до зміни напрямку швидкості на вільній поверхні. При цьому абсолютна величина швидкості та коефіцієнти приєднаної маси ті ж, що й при ударі вниз. Рис. 5 ілюструє розподіл швидкості на вільній поверхні, який' відповідає удару пластинки вгору, для тих самих глибин занурення, що й на Рис. 2 (для удару вниз). Зауважимо, що при ударі вгору характер розподілу швидкості на вільній поверхні біля країв пластинки зумовлює відрив потоку від країв пластини в більш пізній час.

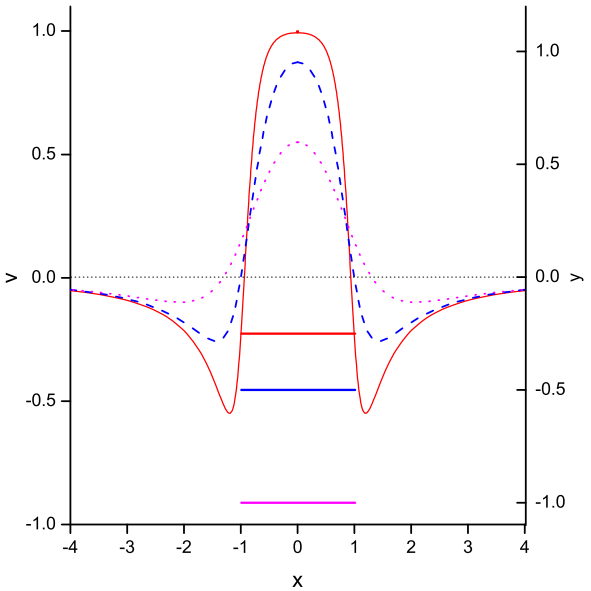

Рис. 5. Те ж саме, що й на Рис. 2, але при ударі вгору:
$h = 0.25$ — червона неперервна; $h = 0.5$ — синя штрихова;
$h = 1$ — пурпурова штрих-пунктирна

6. ВИСНОВКИ

Методом інтегрального годографа знайдено аналітичний розв'язок імпульсного удару циліндричного тіла під незбуреною вільною поверхнею. При цьому поперечний переріз тіла може мати форму багатокутника чи довільної гладкої криволінійної фігури. У статті наведено кількісні результати, отримані для плоскої пластини, круглого циліндра та прямокутника. Рівняння для комплексної швидкості містить величину швидкості на вільній поверхні, аналітичну форму якої визначено.

Відповідні приєднані маси визначають як функцію глибини занурення. Коли глибина занурення прямує до нескінченності, приєднана маса прямує до значення, що відповідає приєднаній масі в необмеженій області рідини.

Показано, що удари вгору і вниз створюють однакову величину швидкості на вільній поверхні та однакові коефіцієнти приєднаної маси. Однак напрямок швидкості протилежний. Отриманий розв'язок можна розглядати як розв'язок першого порядку при розв'язуванні задачі методом малих часових рядів.

Наявність вільної поверхні не змінює структуру потоку біля тіла, який визначає приєднану масу. Тому можна очікувати, що отримані результати відображатимуть реальні ситуації, подібні до тих, що мають місце у випадку необмеженої області рідини.

ДОДАТОК

Розглянемо багатокутник, вписаний у задану гладку межу тіла. Нехай N_p – кількість сторін довжини l_i, нахил до якої становить β_{pi}, а ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, N_p$ – точки в параметричній області, які відповідають вершинам багатокутника. Тоді функцію $\beta_b(\xi)$ можна записати явним чином:

$$\beta_b(\xi) = \beta_{bi}, \qquad \xi_{i-1} < \xi \le \xi_i, \quad i = 1, \ldots N_p, \tag{21}$$

де $\xi_0 = a$, $\xi_{N_p} = c$, $\beta_{p1} = \pi$ and $\beta_{Np} = 0$. Підставляючи вираз (21) у співвідношення (13) та обчислюючи інтеграл за східчастою зміною функції $\beta_b(\xi)$ у точках $\xi = \xi_i$, отримуємо комплексну швидкість для тіла в формі багатокутника:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \left(\frac{\zeta - a}{\zeta + a}\right)^{1/2} \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c}\right)^{1/2} n \times \\ &\times \prod_{i=1}^{N_p} \left(\frac{\zeta - \xi_i}{\zeta + \xi_i}\right)^{\Delta\beta_{pi}/\pi} r \exp\left[-\frac{i}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\ln v}{d\eta} \ln\left(\frac{\zeta - i\eta}{\zeta + i\eta}\right) d\eta - i\beta_0\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Гранична умова на вільній поверхні (18) з комплексною швидкістю (22) призводить до інтегрального рівняння

$$\int_0^\infty \frac{d\ln v}{d\eta} \ln\left|\frac{\eta' + \eta}{\eta' - \eta}\right| d\eta' = f(\eta), \tag{23}$$

де

$$f(\eta) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\eta}{a}\right) + \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\eta}{c}\right) + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{N_b} \Delta\beta_{bi} \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi_i}\right).$$

Застосовуючи перетворення [26]

$$\frac{d\ln v}{d\eta} = -\frac{2}{\pi^2}\frac{d}{d\eta}\int\limits_{\eta}^{\infty}\frac{F(u)du}{\sqrt{u^2-\eta^2}}, \qquad F(u) = \frac{d}{du}\int\limits_{0}^{u}\frac{pf(p)}{\sqrt{u^2-p^2}}dp, \tag{24}$$

отримуємо розв'язок інтегрального рівняння (23) у формі

$$v(\eta) = \sqrt{\eta^2+a^2}\sqrt{\eta^2+c^2}\prod_{i=1}^{N_p}\left(\eta^2+{\xi_i}^2\right)^{\frac{\Delta\beta_{bi}}{\pi}}. \tag{25}$$

Визначивши межу (25) при $N_b \to \infty$ й використавши апроксимацію

$$\Delta\beta_{bi} = \left(\frac{d\beta_b}{d\xi}\right)_i \Delta\xi_i,$$

отримаємо рівняння (20).

REFERENCES

[1] J.-L. Lagrange, "Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides," *Mémoires extraits des recueils de l'Académie royale de Berlin*, vol. 12, pp. 151–198, 1781.

[2] N. E. Joukowskii, "On the impact of two spheres, one of which floats in liquid," *Zapiski Matematicheskogo Otdeleniia Novorossiiskogo Obshchestva Estestvoispytatelej*, vol. 5, pp. 43–48, 1884.

[3] T. von Karman, *The impact of seaplane floats during landing*. Washington, DC: NACA Technical Note 321, 1929.

[4] H. Wagner, "Über Stoßund Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 12, pp. 192–215, 1932.

[5] T. H. Havelock, "The wave resistance of a cylinder started from rest," *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 2, pp. 325–334, 1949. DOI: https://doi.org/10.1093/qjmam/2.3.325

[6] T. H. Havelock, "The resistance of a submerged cylinder in accelerated motion," *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 2, pp. 419–427, 1949. DOI: https://doi.org/10.1093/qjmam/2.4.419

[7] P. A. Tyvand and T. Miloh, "Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 286, pp. 67–101, 1995. DOI: https://doi.org/10.1017/s0022112095000656

[8] M. Greenhow and W.-M. Lin, *Nonlinear free surface effects: experiments and theory. MIT Internal Report 83-19*. Cambridge, MA: Department of Ocean Engineering, 1983.

[9] M. Greenhow and L. Yanbao, "Added masses for circular cylinders near or penetrating fluid boundaries-review, extension and application to water-entry, -exit and slamming," *Ocean Engineering*, vol. 14, no. 4, pp. 325–348, 1987. DOI: https://doi.org/10.1016/0029-8018(87)90031-x

[10] M. J. Cooker and D. H. Peregrine, "Pressure-impulse theory for liquid impact problems," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 297, pp. 193–214, 1995. DOI: https://doi.org/10.1017/s0022112095003053

[11] O. M. Faltinsen, *Hydrodynamics of high-speed marine vehicles*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511546068

[12] A. Iafrati and A. A. Korobkin, "Starting flow generated by the impulsive start of a floating wedge," *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 51, no. 2, pp. 99–126, 2005. DOI: https://doi.org/10.1007/s10665-004-3686-9

[13] A. Korobkin and O. Yilmaz, "The initial stage of dam-break flow," *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 63, no. 2-4, pp. 293–308, 2009. DOI: https://doi.org/10.1007/s10665-008-9237-z

[14] P. A. Tyvand and T. Miloh, "Incompressible impulsive sloshing," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 708, pp. 279–302, 2012. DOI: https://doi.org/10.1017/jfm.2012.305

[15] K. B. Hjelmervik and P. A. Tyvand, "Incompressible impulsive wall impact of liquid cylinders," *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 103, no. 1, pp. 159–171, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s10665-016-9866-6

[16] A. C. King and D. J. Needham, "The initial development of a jet caused by fluid, body and free-surface interaction. part 1. a uniformly accelerating plate," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 268, pp. 89–101, 1994. DOI: https://doi.org/10.1017/s0022112094001278

[17] D. J. Needham, J. Billingham, and A. C. King, "The initial development of a jet caused by fluid, body and free-surface interaction. part 2. an impulsively moved plate," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 578, pp. 67–84, 2007. DOI: https://doi.org/10.1017/s0022112007004983

[18] A. A. Korobkin and Y.-M. Scolan, "Three-dimensional theory of water impact. part 2. linearized Wagner problem," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 549, pp. 343–373, 2006. DOI: https://doi.org/10.1017/s0022112005008049

[19] C. Darwin, "Note on hydrodynamics," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 49, no. 2, pp. 342–354, 1953. DOI: https://doi.org/10.1017/s0305004100028449

[20] I. Eames, S. E. Belcher, and J. C. R. Hunt, "Drift, partial drift and Darwin's proposition," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 275, pp. 201–223, 1994. DOI: https://doi.org/10.1017/s0022112094002338

[21] I. R. Peters, M. Madonia, D. Lohse, and D. van der Meer, "Volume entrained in the wake of a disk intruding into an oil-water interface," *Physical Review Fluids*, vol. 1, no. 3, pp. 033 901 (1–9), 2016. DOI: https://doi.org/10.1103/physrevfluids.1.033901

[22] J. H. Michell, "On the theory of free stream lines," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, vol. 181, pp. 389–431, 1890.

[23] N. E. Joukovskii, "Modification of Kirchhoff's method for determination of a fluid motion in two directions at a fixed velocity given on the unknown streamline," *Matematicheskii Sbornik*, vol. 15, no. 1, pp. 121–278, 1890.

[24] Y. A. Semenov and B.-S. Yoon, "Onset of flow separation for the oblique water impact of a wedge," *Physics of Fluids*, vol. 21, no. 11, pp. 112 103 (1–11), 2009. DOI: https://doi.org/10.1063/1.3261805

[25] S. K. Venkatesan, "Added mass of two cylinders," *Journal of Ship Research*, vol. 29, no. 4, pp. 234–240, 1985. DOI: https://doi.org/10.5957/jsr.1985.29.4.234

[26] A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, *Handbook of integral equations*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1998.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Lagrange J.-L. Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides // Mémoires extraits des recueils de l'Académie royale de Berlin. — 1781. — Vol. 12. — P. 151–198.

[2] Жуковский Н. Е. Об ударе двух шаров, из которых один плавает в жидкости // Записки математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей. — 1884. — Т. 5. — С. 43–48.

[3] von Karman T. The impact of seaplane floats during landing. — Washington, DC : NACA Technical Note 321, 1929.

[4] Wagner H. Über Stoßund Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1932. — Bd. 12. — S. 192–215.

[5] Havelock T. H. The wave resistance of a cylinder started from rest // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1949. — Vol. 2. — P. 325–334.

[6] Havelock T. H. The resistance of a submerged cylinder in accelerated motion // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1949. — Vol. 2. — P. 419–427.

[7] Tyvand P. A., Miloh T. Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder // Journal of Fluid Mechanics. — 1995. — Vol. 286. — P. 67–101.

[8] Greenhow M., Lin W.-M. Nonlinear free surface effects: experiments and theory. MIT Internal Report 83-19. — Cambridge, MA : Department of Ocean Engineering, 1983. — 103 p.

[9] Greenhow M., Yanbao L. Added masses for circular cylinders near or penetrating fluid boundaries-review, extension and application to water-entry, -exit and slamming // Ocean Engineering. — 1987. — Vol. 14, no. 4. — P. 325–348.

[10] Cooker M. J., Peregrine D. H. Pressure-impulse theory for liquid impact problems // Journal of Fluid Mechanics. — 1995. — Vol. 297. — P. 193–214.

[11] Faltinsen O. M. Hydrodynamics of high-speed marine vehicles. — Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2006.

[12] Iafrati A., Korobkin A. A. Starting flow generated by the impulsive start of a floating wedge // Journal of Engineering Mathematics. — 2005. — Vol. 51, no. 2. — P. 99–126.

[13] Korobkin A., Yilmaz O. The initial stage of dam-break flow // Journal of Engineering Mathematics. — 2009. — Vol. 63, no. 2-4. — P. 293–308.

[14] Tyvand P. A., Miloh T. Incompressible impulsive sloshing // Journal of Fluid Mechanics. — 2012. — Vol. 708. — P. 279–302.

[15] Hjelmervik K. B., Tyvand P. A. Incompressible impulsive wall impact of liquid cylinders // Journal of Engineering Mathematics. — 2016. — Vol. 103, no. 1. — P. 159–171.

[16] King A. C., Needham D. J. The initial development of a jet caused by fluid, body and free-surface interaction. Part 1. A uniformly accelerating plate // Journal of Fluid Mechanics. — 1994. — Vol. 268. — P. 89–101.

[17] Needham D. J., Billingham J., King A. C. The initial development of a jet caused by fluid, body and free-surface interaction. Part 2. An impulsively moved plate // Journal of Fluid Mechanics. — 2007. — Vol. 578. — P. 67–84.

[18] Korobkin A. A., Scolan Y.-M. Three-dimensional theory of water impact. Part 2. Linearized Wagner problem // Journal of Fluid Mechanics. — 2006. — Vol. 549. — P. 343–373.

[19] Darwin C. Note on hydrodynamics // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1953. — Vol. 49, no. 2. — P. 342–354.

[20] Eames I., Belcher S. E., Hunt J. C. R. Drift, partial drift and Darwin's proposition // Journal of Fluid Mechanics. — 1994. — Vol. 275. — P. 201–223.

[21] Volume entrained in the wake of a disk intruding into an oil-water interface / Peters I. R., Madonia M., Lohse D., and van der Meer D. // Physical Review Fluids. — 2016. — Vol. 1, no. 3. — P. 033901 (1–9).

[22] Michell J. H. On the theory of free stream lines // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A. — 1890. — Vol. 181. — P. 389–431.

[23] Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока // Математический сборник. — 1890. — Т. 15, № 1. — С. 121–278.

[24] Semenov Y. A., Yoon B.-S. Onset of flow separation for the oblique water impact of a wedge // Physics of Fluids. — 2009. — Vol. 21, no. 11. — P. 112103 (1–11).

[25] Venkatesan S. K. Added mass of two cylinders // Journal of Ship Research. — 1985. — Vol. 29, no. 4. — P. 234–240.

[26] Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of integral equations. — Boca Raton, FL : CRC Press, 1998. — 796 p.

Yu. A. Semenov, Yu. M. Savchenko, G. Yu. Savchenko, O. I. Naumova

Impulsive impact of a submerged body

An analytical solution of the impulsive impact of a cylindrical body with an arbitrary cross-section submerged in an undisturbed water surface is obtained by solving a free boundary problem. The studied case of a rigid body moving in a fluid is kinematically equivalent to the case of a fluid moving around a fixed rigid body with acceleration. The problem is formulated in a non-inertial coordinate system attached to the body. After solving the problem, one can find all the flow characteristics in the coordinate system attached to the undisturbed fluid before the impact. The integral hodograph method is applied to derive the complex potential and the complex velocity, both defined in a parameter plane. The boundary-value problem is reduced to a system of the Fredholm integral equations of the first kind. One of them is in the velocity magnitude at the free surface, and the other is in the velocity direction at the bottom surface. The velocity field, the impulsive pressure on the body surface, and the added mass are computed in a wide range of submergence depths for various cross-sectional shapes of the body, such as a flat plate, a circular cylinder, and a rectangle. The associated added masses are found depending on the submergence depth. As the submergence depth tends to infinity, the added mass tends to the value corresponding to that in an unbounded fluid domain. The upward and downward impacts are shown to generate similar magnitudes of the velocity on the free surface and added mass coefficients but with the opposite velocity directions. The obtained solution may be considered as the first-order approximation when solving the problem by the method of small-time series. The presence of the free surface does not change the structure of the flow near the body, determining the added mass. Therefore, the obtained results are expected to reflect practical situations similar to those occurring in the case of the unbounded fluid domain.

KEY WORDS: pressure impulse, added mass, complex potential, the integral hodograph method